

تانسور تنش (Stress Tensor)

مقدمه:

وظیفه اصلی مهندس طراحی است. در طراحی سه معیار (3S) باید مورد ارزیابی قرار گیرد.
(1) مقاومت (Strength)
یعنی سازه باید در مقابل بارهای وارده مقاومت کند، که در اینجا مفهوم تنش را به کار می گیریم:

$$\sigma_{\max} \leq \sigma_{all}, \tau_{\max} \leq \tau_{all}$$

۲- سختی (Stiffness)

یعنی تغییر شکل های سازه در اثر بارهای وارده باید از یک حد مشخص کمتر باشد. در اینجا مفهوم کرنش را به کار می گیریم:

$$\delta_{\max} \leq \delta_{spec} \text{ or } w_{\max} \leq w_{spec} \text{ or } \phi_{\max} \leq \phi_{spec} \dots$$

۳- پایداری (Stability)

در بعضی از طراحی ها مانند ستون ها، باید از کمانش آن جلوگیری شود:

$$P \leq P_{cr}$$

یادآوری در مورد مفهوم تنش:

تنش یک خاصیت نقطه ای است.

تانسور تنش متقارن است.

واحد تنش نیرو بر واحد سطح است.

© M.H. Abolbashari, Ferdowsi University of Mashhad

اصل تنش اویلر و کوچی

(Euler and Cauchy)

ساختاری که در لحظه ای مشخصی با جسم B اشغال شده را در نظر بگیرید.

یک سطح بسته S در B تصور کنید.

می خواهیم تأثیر مواد خارج این سطح روی مواد داخل آن را بررسی نماییم.

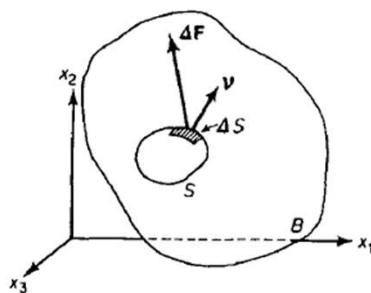


Fig. 3.1:1. Stress principle.

ΔS : یک المان سطح کوچک روی سطح تصور شده S

$\vec{v}$: یک بردار یکه عمود بر ΔS که جهت آن از داخل S به طرف خارج سطح است.

آنگاه می توان دو طرف ΔS را بر اساس جهت $\vec{v}$ از هم تفکیک کرد.

$\overline{\Delta F}$: نیرویی که جسم قرار گرفته در طرف مثبت عمود بر سطح، به جسم قرار گرفته در طرف منفی وارد می کند.

بنابراین، $\overline{\Delta F}$ تابعی از سطح و جهت سطح است.

فرض می‌کنیم که:

- اگر ΔS به سمت صفر میل کند، نسبت $\Delta F/\Delta S$ به یک حد معین dF/dS میل می‌کند
- ممان نیرویی که روی سطح ΔS اثر می‌کند حول هر نقطه‌ای روی سطح در حد صفر است.
- بردار حدی به شکل زیر نوشته می‌شود.

(1)

$$\vec{T} = \frac{dF}{dS}, \quad \frac{\text{Force}}{\text{Unit Surface}} \left[\frac{\text{kg.m}}{\text{s}^2.\text{m}^2} \text{ or } \frac{M}{LT^2} \right]$$

Traction
بردار تنش

یعنی بردار تنش روی سطحی که بردار یکه نرمال بر آن سطح، $\vec{n}$ است.

اصل تنش اوپلر و کوچی (Euler and Cauchy)

روی هر سطح بسته‌ای مانند S در داخل یک جسم پیوسته، یک میدان بردار تنش تعریف می‌شود که عمل آن (مصالح خارج سطح S) روی مصالح داخل با عمل مصالح داخل روی خارج آن معادل است.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

3/19

مؤلفه‌های تنش

در حالت خاصی که ΔS موازی یکی از صفحات مختصات باشد و بردار عمود بر آن در جهت K باشد، داریم:

(2)

$$T_1^k = \tau_{k1}, \quad T_2^k = \tau_{k2}, \quad T_3^k = \tau_{k3},$$

مؤلفه بردار تنش در جهت محور x_1
مؤلفه بردار تنش در جهت محور x_2
مؤلفه بردار تنش در جهت محور x_3

جهت‌های مثبت مؤلفه‌ها

Fig. 3.1:2. Notations of stress components.

یا برای سیستم مختصات کارترین x, y, z

سایر مؤلفه‌ها: تنش‌های برشی

(3)

تنش‌های نرمال

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

4/19

مؤلفه‌های فرمز در کتاب نیست و باید تصحیح شود.

بار دیگر تأکید می‌شود که تنش نیرویی (بر واحد سطح) است که بخش طرف مثبت یک المان سطح (طرف مثبت بردار عمود خارج از سطح) به بخشی که در طرف منفی قرار گرفته وارد می‌کند.

بنابراین اگر بردار عمود خارج از سطح در جهت مثبت محور x_i باشد و τ_{ii} مثبت باشد، برداری که مؤلفه عمود تنش را روی المان سطح نشان می‌دهد به طرف مثبت جهت x_i است.

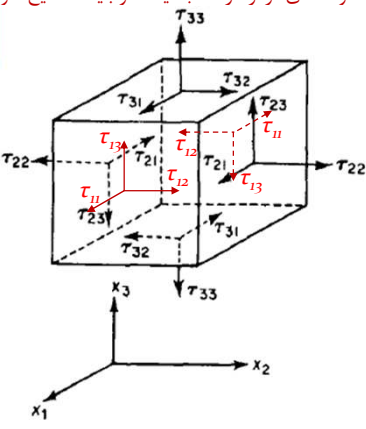


Fig. 3.1:3. Senses of positive stresses.

اگر τ_{ii} مثبت باشد در حالی که بردار عمود بر سطح به طرف خارج سطح در جهت منفی x_i ، آنگاه بردار تنشی که روی المان عمل می‌کند نیز به طرف x_i منفی است.

فرض کنید جهت محور x_i $\vec{v}$ ، آنگاه جهت τ_{ii} مثبت

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

5/19

3.2- قوانین حرکت (Laws of Motion)

قوانین اساسی مکانیک برای اجسام (اعم از جامد و مایع) معادلات اویلرند که بر اساس قوانین حرکت نیوتن برای ذرات توسعه یافته‌اند.

- فرض کنید سیستم مختصات x_1, x_2, x_3 یک سیستم مختصات اینرسی باشد.
- اگر فرض کنیم فضایی که مصالح یک جسم در لحظه t اشغال می‌کند با $\mathbf{B}(t)$ نشان داده شود،
- اگر $\vec{r}$ بردار موقعیت یک ذره نسبت به مرکز مختصات باشد،
- اگر $\vec{V}$ بردار سرعت یک ذره در نقطه x_1, x_2, x_3 باشد،
- اگر ρ چگالی ماده باشد، آنگاه داریم:
- مومنتم خطی P جسم در موقعیت $\mathbf{B}(t)$ عبارت است از:

$$(1) \quad \vec{P} = \int_{B(t)} \vec{V} \rho dv$$

و ممان مومنتم:

$$(2) \quad \vec{H} = \int_{B(t)} \vec{r} \times \vec{V} \rho dv$$

قوانین نیوتن، آنچنان‌که اویلر برای یک جسم پیوسته بیان کرد عبارت است از:

نرخ تغییرات (مشتق مادی) مومنتم خطی برابر است با مجموع نیروهای $\vec{F}$ که به جسم وارد می‌شوند. (مشتق مادی را در اسلایدهای بعد تعریف می‌کنیم.)

$$(3) \quad \vec{\dot{P}} = \vec{F}$$

7/19

و اینکه: نرخ تغییرات ممان مومنتم برابر است با مجموع گشتاورهای $\vec{L}$ وارد به جسم.

$$(4) \quad \vec{\dot{H}} = \vec{L}$$

گشتاور $\vec{L}$ نسبت به همان نقطه‌ای مرکز بردار موقعیت $\vec{r}$ گرفته می‌شود.

می‌توان به سادگی اثبات کرد که اگر معادله (3) برقرار باشد، آنگاه اگر معادله (4) برای یک مرکز صحیح باشد، برای هر نقطه‌ای به عنوان مرکز صحیح است.

نیروهای خارجی:

در محیط پیوسته، دو نوع نیروی خارجی بر اجسام مادی اثر می‌کند:

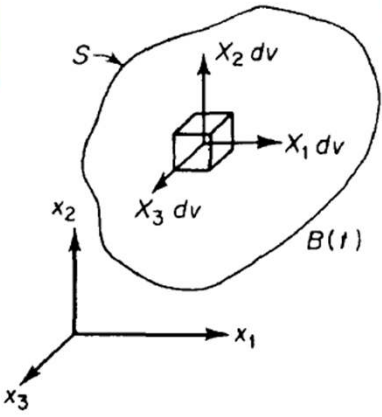
۱. نیروهای کالبدی که به المان‌های حجم یک جسم اثر می‌کند.

مثال‌ها: نیروهای ثقلی و الکترومغناطیسی

۲. نیروهای سطحی یا تنش‌ها (متمرکز یا گسترده) که به المان‌های سطح اثر می‌کنند.

مثال‌ها: فشارهای آئرودینامیکی که روی جسم اثر می‌کنند و فشار در اثر تماس مکانیکی دو جسم

8/19



بردار نیروی برآیند که به عنوان **نیروی کالبدی** شناخته می‌شود را فرض می‌کنیم به شکل انتگرال حجم بیان می‌شود.

$$\int_B \vec{X} dv$$

سه مؤلفه $\vec{X}$ عبارتند از X_1, X_2, X_3 و همه دیمانسیون نیرو بر واحد حجم دارند $M(LT)^{-2}$ که نیروی کالبدی بر واحد حجم نامیده می‌شوند. به عنوان مثال، برای یک میدان ثقلی:

$$X_i = \rho g_i$$

که g_i ها مؤلفه‌های یک میدان شتاب ثقل و ρ چگالی (جرم بر واحد حجم) در یک نقطه از جسم است.

Fig. 3.2:1. Body forces.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

9/19

نیروی سطحی که بر روی یک سطح فرضی در داخل جسم اثر می‌کند بردار تنش است که در اصل **تنش اویلر و کوچی** بیان شد.

بر اساس این مفهوم، **نیروی کلی** که به مصالح اشغال کننده ناحیه B ، که داخل سطح بسته S قرار گرفته، اثر می‌کند عبارت است از

$$(5) \quad \vec{F} = \oint_S \vec{T} ds + \int_B \vec{X} dv = \vec{P} = \frac{D}{Dt} \int \vec{V} \rho dv$$

Total derivative (Material derivative) یا $\frac{D}{Dt}$ را مشتق مادی می‌گویند که بعداً تعریف می‌کنیم که عبارت است از:

$$\left(\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)$$

که در آن $\vec{T}$ بردار تنشی است که روی ds ، که بردار عمود به طرف خارج آن $\vec{v}$ است، اثر می‌کند.

به طور مشابه، گشتاور حول مرکز با عبارت زیر بیان می‌شود.

$$(6) \quad \vec{L} = \oint_S \vec{r} \times \vec{T} ds + \int_B \vec{r} \times \vec{X} dv = \vec{H} = \frac{D}{Dt} \int \vec{r} \times \vec{V} \rho dv$$

10/19

3.3- رابطه کوچی (Cauchy's Formula)

$$T_i^{\nu} = \nu_j \tau_{ji}$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

با استفاده از معادلات حرکت (در اسلاید بعد) نتیجه ساده‌ای می‌گیریم که می‌گویید:

$$(1) \quad \vec{T}^{(+)} = -\vec{T}^{(-)}$$

بردار تنش $\vec{T}^{(-)}$ که عمل مواد
داخل سطح روی مواد خارج =
بردار تنش $\vec{T}^{(+)}$ که عمل مواد
خارج سطح یک المان سطح
همان المان سطح است
روی مواد داخل سطح است

از نظر مقدار مساوی و از نظر
جهت خلاف جهت است با

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

12/19

اثبات: یک جعبه قرص کوچک با دو سطح موازی ΔS و ضخامت δ در نظر بگیرید. $(dv = \Delta S \delta)$. وقتی δ به سمت صفر میل کند در حالی که ΔS کوچک ولی محدود (غیر صفر) باشد از معادله حرکت داریم:

$$\oint_S \vec{T}^\nu dS + \int_B X dv = \frac{D}{Dt} \int_V \rho dv$$

وجود نیروهای سطحی در دو طرف جعبه باعث می شود که مجموع آن ها صفر باشد. برای سطح کوچک ΔS معادله حرکت عبارت است از:

$$\vec{T}^{(+)} \Delta S + \vec{T}^{(-)} \Delta S = 0$$

$$\vec{T}^{(+)} = -\vec{T}^{(-)}$$

یا

Fig. 3.3:1. Equilibrium of a "pill box" across a surface S.

بیان دیگر این نتیجه این است که: بردار تنش تابعی است از بردار عمود بر سطح. وقتی جهت بردار عمود بر سطح عکس شود، بردار تنش هم بر عکس می شود.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

اکنون نشان می دهیم که با دانستن مؤلفه های τ_{ij} بلادرنگ می توان بردار تنش روی هر سطحی که بردار یکه عمود بر سطح به طرف خارج صفحه $\vec{v}$ و مؤلفه های آن v_1, v_2, v_3 باشد نوشت. این بردار تنش با $\vec{T}$ نشان داده می شود که مؤلفه های آن $T_1^\nu, T_2^\nu, T_3^\nu$ است و از رابطه کوچی به دست می آید:

$$(2) \quad T_i^\nu = v_j \tau_{ji} \left[\frac{\text{Force}}{\text{Unit area}} = \frac{\text{kg.m}}{\text{s}^2.\text{m}^2} \text{ or } \frac{M}{LT^2} \right] = [1] \left[\frac{M}{LT^2} \right]$$

که از راه های مختلفی می توان آن را اثبات کرد. یک راه به دست آوردن مقدماتی را در اینجا بیان می کنیم.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

هرمی کوچک فرض کنید که با سه صفحه موازی صفحات مختصات تشکیل شده و قاعده آن عمود بر بردار $\vec{v}$ است (شکل 3.3:2 را ببینید). اگر مساحت قاعده که عمود بر $\vec{v}$ است برابر dS باشد، آنگاه مساحت سه وجه دیگر عبارت است از:

با توجه به شکل 3.1:3 جهتهای تنشهای مثبت صفحات دور از ما در جهتهای منفی محورههای مختصات است.

به جای زاویه بین ds و ds_i زاویه بین عمود بر هر یک را می گیریم.

$$dS_i = dS \cos(\nu, x_i)$$

$$= v_i dS = \text{area of surface } \parallel \text{ to the } x_2x_3\text{-plane,}$$

$$dS_2 = v_2 dS = \text{area of surface } \parallel \text{ to the } x_3x_1\text{-plane,}$$

$$dS_3 = v_3 dS = \text{area of surface } \parallel \text{ to the } x_1x_2\text{-plane,}$$

و حجم هرم عبارت است از:

$$dv = \frac{1}{3} h dS$$

که در آن h ارتفاع رأس P هرم از قاعده dS است.

Fig. 3.3:2. Surface tractions on a tetrahedron. 15/19

نیروهای در جهت مثبت X_i که روی وجوه اثر می کنند عبارتند از:

$$(-\tau_{11} + \varepsilon_1)dS_1, \quad (-\tau_{21} + \varepsilon_2)dS_2, \quad (-\tau_{31} + \varepsilon_3)dS_3,$$

که در آن $\tau_{11}, \tau_{21}, \tau_{31}$ تنشها در نقطه P است. علامت منفی بدین سبب است که بردارهای عمود خارج از سطح وجوه بر خلاف جهت محورههای مختصاتند؛ و ε ها بدین سبب اضافه شدند که ترکشنها (tractions) در نقاطی که با نقطه P فاصله اندکی دارند اثر می کنند.

اگر فرض کنیم میدان تنش پیوسته است، آنگاه $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ کمیات بسیار کوچکی اند.

از طرف دیگر، نیرویی که بر سطح مثلث عمود بر $\vec{v}$ اثر می کند، یک مؤلفه $(\vec{T}_1 + \varepsilon)dS$ در جهت محور x_1 دارد، نیروی کالبدی یک مؤلفه $(X_1 + \varepsilon')dv$ در جهت x_1 دارد و نرخ تغییرات مومنتم خطی نیز یک مؤلفه $\rho \vec{V}_1 dv$ دارد. در اینجا $\vec{T}_1$ و X_1 مربوط به نقطه P است و بنابراین مقادیر $\varepsilon, \varepsilon'$ بسیار کوچکنند. معادله اول حرکت عبارت است از:

$$\sum F = \dot{P} \rightarrow (-\tau_{11} + \varepsilon_1)v_1 dS + (-\tau_{21} + \varepsilon_2)v_2 dS + (-\tau_{31} + \varepsilon_3)v_3 dS + (\vec{T}_1 + \varepsilon)dS + (X_1 + \varepsilon')\left(\frac{1}{3} h dS\right) = \rho \vec{V}_1 \left(\frac{1}{3} h dS\right).$$

مؤلفه شتاب نقطه P در جهت محور x_1

16/19

اگر معادله را بر dS تقسیم کنیم و وقتی $h \rightarrow 0$ حد بگیریم داریم:

$$(3) \quad T_1 = \tau_{11}v_1 + \tau_{21}v_2 + \tau_{31}v_3,$$

که مؤلفه اول معادله (2) $T_i = v_j \tau_{ji}$ است.

مؤلفه‌های دیگر به طریق مشابهی به دست می‌آیند.

رابطه کوچی ما را مطمئن می‌سازد که نه (9) مؤلفه تنش τ_{ij} شرط لازم و کافی برای تعریف ترکشن روی هر المان سطح از جسم است. بنابراین حالت تنش در یک جسم با مجموعه کمیات τ_{ij} به طور کامل مشخص می‌شود.

از آنجا که T_i یک بردار است و معادله (2) $T_i = v_j \tau_{ji}$ برای هر بردار دلخواه v_j صادق است، از قاعده کوشنت (بخش 2.10) می‌توان نتیجه گرفت که τ_{ij} یک تانسور است. بنابراین τ_{ij} تانسور تنش نامیده می‌شود.

بار دیگر یادآور می‌شود که در توسعه نظری (تئوری) که تا کنون انجام دادیم فرض کرده بودیم اولاً تنش می‌تواند در هر نقطه از جسم تعریف شود، و ثانیاً میدان تنش پیوسته است. همین فرضیات را در ادامه برای میدان کرنش نیز خواهیم داشت. این فرضیات، در مکانیک محیط پیوسته بسیار اساسی‌اند.

17/19

مثال (از کتاب Lai): نسبت به سیستم مختصات x, y, z ماتریس حالت تنش در نقطه‌ای از جسم با

$$[\tau] = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

بیان می‌شود.

الف: بردار تنش و مقدار مؤلفه عمودی تنش را روی صفحه‌ای که از نقطه گذشته و موازی صفحه $x + 2y + 2z - 6 = 0$ است، بیابید.

ب: اگر $e'_1 = \frac{1}{3}(2\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 + \bar{e}_3)$ و $e'_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{e}_1 - \bar{e}_2)$ دو بردار یک‌ه باشند، $(T')_{21}$ را بیابید.

حل: الف: بردار یک‌ه عمود بر سطح $x + 2y + 2z = 6$ عبارت است از:

$$\bar{v} = \frac{1}{\sqrt{1+4+4}}(\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 + 2\bar{e}_3) = \frac{1}{3}(\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 + 2\bar{e}_3)$$

$$[T] = [\tau][v] = \left(\frac{1}{3}\right) \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{3}\right) \begin{bmatrix} 16 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{یا} \quad \bar{T} = \frac{1}{3}(16\bar{e}_1 + 4\bar{e}_2 + \bar{e}_3)$$

مؤلفه عمودی بردار تنش عبارت است از:

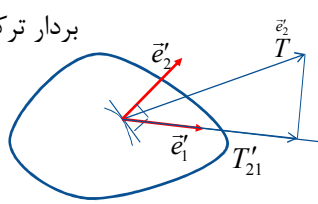
$$T_n = \bar{T} \cdot \bar{v} = \frac{1}{9}(1 \times 16 + 2 \times 4 + 2 \times 1) = 2.89 \text{ MPa}$$

18/19

$$(T')_{21} = \tau \vec{e}'_2 \cdot \vec{e}'_1 = \vec{e}'_1 \cdot \tau \vec{e}'_2 = \left(\frac{1}{3\sqrt{2}}\right) [2 \ 2 \ 1]_{(1 \times 3)} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}_{(3 \times 3)} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}_{(3 \times 1)}$$

$$= \left(\frac{1}{3\sqrt{2}}\right) [2 \ 2 \ 1]_{(1 \times 3)} \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}_{(3 \times 1)} = 1.65_{(1 \times 1)} \text{ MPa}$$

بردار ترکشن روی صفحه‌ای که بردار یکه عمود بر آن $\vec{e}'_2$ است $(\vec{T})$.
 مؤلفه بردار ترکشن فوق در امتداد $\vec{e}'_1$



نتیجه‌گیری: در هر نقطه از جسمی که تحت تأثیر بارگذاری‌های مختلف قرار دارد، بسته به اینکه چه سیستم مختصاتی تعریف کنیم بردار ترکشن و تانسور تنش منحصر به فردی داریم. یعنی با داشتن تانسور تنش، در دو صفحه مختلف (بند الف و ب) بردارهای ترکشن مختلفی داریم. یکی از این صفحات (جهت‌ها) اصلی است که در ادامه به آن خواهیم پرداخت.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

19/19