

Third Edition

MECHANICS OF MATERIALS

CHAPTER 2

**Ferdinand P. Beer
E. Russell Johnston, Jr.
John T. DeWolf**

**Lecture Notes:
J. Walt Oler
Texas Tech University**

مسایل نامعین ایستایی:
سازه‌های تحت نیروهای محوری

© M.H. Abolbashari, Ferdowsi University of Mashhad

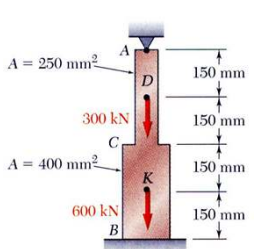
Mc Graw Hill

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

Beer • Johnston • DeWolf

MECHANICS OF MATERIALS

نامعینی ایستایی



- سازه‌هایی را که نیروهای داخلی و عکس‌العمل‌های آنها نتواند به تنهایی از ایستایی به دست آید، از نظر **ایستایی نامعین** می‌گویند.
- سازه‌ای که تعداد تکیه گاه‌های آن از تعداد لازم برای داشتن تعادل بیشتر باشد، از نظر **ایستایی نامعین** است.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

2 - 2 of 15

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

رویکرد کلی در حل مسایل نامعین ایستایی

۱. در تمامی مسایل نامعین ایستایی معادلات تعادل (اعم از محلی و کلی) همچنان معتبرند. این معادلات لازم ولی کافی نیستند.
۲. معادلات تکمیلی با در نظر گرفتن هندسه تغییر شکل به دست می آیند. یعنی در مجموعه های سازه ای ضرورت فیزیکی ایجاب می کند که عناصر و اجزای خاصی با هم خیز پیدا کنند، با هم بیچند، با هم منبسط شوند و ... یا ساکن باشند. این معادلات مستقل از خواص مصالح هستند و محدود به پاسخ ارتجاعی خطی نمی شوند.
۳. روابط مشخصه (تنش-کرنش) برای مصالح باید رعایت شده باشد.

گراوری و تنظیم: محمدحسین ابوالشیری

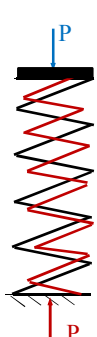
© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

2 - 3 of 15

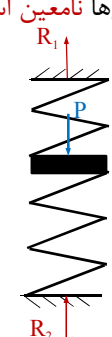
MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

سیستم های از نظر ایستایی نامعین (Statically indeterminate systems)

۱. در بعضی از سازه ها ممکن است یکی از دو حالت زیر اتفاق بیفتد که سازه را نامعین می سازد. بعضی از عکس العمل ها و تکیه گاه ها برای در حالت تعادل بودن اضافی اند و روابط تعادل برای به دست آوردن عکس العمل ها کافی نیستند. و به آن ها **نامعین استاتیکی خارجی** گویند. مانند شکل الف.
۲. با استفاده از روابط تعادل ایستایی به تنهایی نمی توان تمام نیروهای داخلی را به دست آورد و به آن ها **نامعین استاتیکی داخلی** می گویند مانند شکل ب.



ب: نمونه نامعینی استاتیکی داخلی



الف: نمونه نامعینی استاتیکی خارجی

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

2 - 4 of 15

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

دو روش عمومی نیرو و تغییر مکان برای حل مسایل ساده تر

۱- تحلیل بر اساس روش نیرو:

حذف و سپس برگرداندن عکس العمل اضافی به شکلی که شرط سازگاری در مرزها برآورده شود.

این روش را **روش انعطاف پذیری** نیز می نامند؛ زیرا:

رابطه فنر

$$\delta_L = \frac{PL}{AE} = fP \equiv x = \frac{F}{k} = fF$$

سفتی (stiffness) k انعطاف پذیری (flexibility) f

این روش برای سیستم های خطی و هر تعداد بار محوری، هر نوع سطح مقطع میله ها، خواص مصالح و اثرات حرارتی عمومیت داشته و قابل کاربرد است.

روش نیرو در عمل زیاد کاربرد ندارد زیرا انتخاب سیستماتیک تکیه گاه های اضافی برای مسایل بزرگ مشکل است.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالشیری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

2 - 5 of 15

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

تحلیل به روش نیرو

- نیروهای عکس العمل اضافی (زائد) (redundant) را با بارهای مجهول جایگزین می کنیم که با سایر نیروهای وارد به سازه، باید تغییر شکل های سازگاری بوجود بیاورند.
- تغییر شکل در اثر بارهای واقعی و عکس العمل های اضافی جداگانه به دست آورده می شوند و سپس با هم جمع یا ادغام (superposed) می شوند. یعنی برآیند تنش یا کرنش در یک سیستم که تحت تأثیر چند نیروست، برابر با مجموع جبری اثرات آنها وقتی جداگانه اثر می کنند است. این فرض تنها وقتی صحیح است که: هر اثر به طور خطی به نیرویی که آن را باعث شده مربوط شود (قانون هوک).

$$\delta = \delta_L + \delta_R = 0$$

حذف موقت یک تکیه گاه تا سیستم معین شود. برگرداندن نیروی عکس العمل (تکیه گاه) و حذف نیرو

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالشیری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

2 - 6 of 15

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مثال 2.04 (تحلیل به روش نیرو)

عکس‌العمل‌های A و B در میله فولادی تحت بارگذاری‌های محوری نشان داده شده را به دست آورید. فرض کنید در هر دو تکیه‌گاه قبل از اعمال بار هیچگونه فاصله‌ای وجود نداشته است.

حل:

- عکس‌العمل در B را اضافی در نظر می‌گیریم و میله را از تکیه‌گاه جدا می‌کنیم و تغییر مکان B را در اثر بار وارده به دست می‌آوریم.
- تغییر مکان در B را در اثر عکس‌العمل اضافی در B محاسبه می‌کنیم.
- تغییر مکان‌ها در اثر بارها و عکس‌العمل‌های اضافی باید سازگار باشند؛ یعنی باید مجموع آن‌ها صفر شود.
- عکس‌العمل A با توجه به بارهای اعمال شده و عکس‌العملی که در B به دست آوردیم محاسبه می‌شود.

گرآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 2 - 7 of 15

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مثال 2.04 (تحلیل به روش نیرو)

حل:

- با آزاد سازی قید اضافی، تغییر مکان نقطه B در اثر بارهای اعمال شده را به دست می‌آوریم.

$P_1 = 0, \quad P_2 = P_3 = 600 \times 10^3 \text{ N}, \quad P_4 = 900 \times 10^3 \text{ N}$
 $A_1 = A_2 = 400 \times 10^{-6} \text{ m}^2, \quad A_3 = A_4 = 250 \times 10^{-6} \text{ m}^2$
 $L_1 = L_2 = L_3 = L_4 = 0.150 \text{ m}$
 $\delta_L = \sum_i \frac{P_i L_i}{A_i E_i} = \frac{1.125 \times 10^9}{E}$

تغییر مکان در نقطه B را در اثر قید اضافی به دست می‌آوریم.

$P_1 = P_2 = -R_B$
 $A_1 = 400 \times 10^{-6} \text{ m}^2, \quad A_2 = 250 \times 10^{-6} \text{ m}^2$
 $L_1 = L_2 = 0.300 \text{ m}$
 $\delta_R = \sum_i \frac{P_i L_i}{A_i E_i} = \frac{P_1 L_1}{A_1 E_1} + \frac{P_2 L_2}{A_2 E_2}$
 $= -\frac{R_B (0.3)}{E \times 10^{-6}} \left(\frac{1}{400} + \frac{1}{250} \right) = -\frac{(1.95 \times 10^3) R_B}{E}$

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 2 - 8 of 15

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مثال 2.04 (تحلیل به روش نیرو)

• تغییر مکان در اثر بارگذاری و در اثر عکس‌العمل‌های اضافی باید سازگار باشند.

$$\delta = \delta_L + \delta_R = 0$$

$$\delta = \frac{1.125 \times 10^9}{E} - \frac{(1.95 \times 10^3) R_B}{E} = 0$$

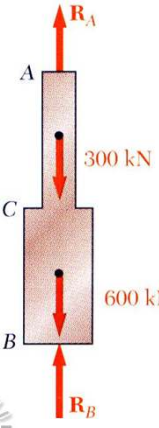
$$R_B = 577 \times 10^3 \text{ N} = 577 \text{ kN}$$

• عکس‌العمل در A در اثر بارگذاری و عکس‌العمل در B را به دست می‌آوریم:

$$\sum F_y = 0 = R_A - 300 \text{ kN} - 600 \text{ kN} + 577 \text{ kN}$$

$$R_A = 323 \text{ kN}$$

$R_A = 323 \text{ kN}$
 $R_B = 577 \text{ kN}$



گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالشیری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

2 - 9 of 15

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

دو روش عمومی نیرو و تغییر مکان برای حل مسایل ساده‌تر (ادامه)

۲- تحلیل بر اساس روش تغییر مکان: سازگاری تغییر مکان‌های اعضای مجاور و در مرزها در فرایند بارگذاری باید برقرار باشد (یعنی اگر نقطه‌ای از جسم در یک جهت تغییر مکانی به اندازه Δ داشته باشد، طول یک طرف به اندازه Δ کم و طول طرف دیگر به اندازه همان Δ اضافه می‌شود).

این روش را روش **سفتی** نیز می‌گویند؛ زیرا در آن از سفتی میله‌ها استفاده می‌شود.

سفتی (stiffness)

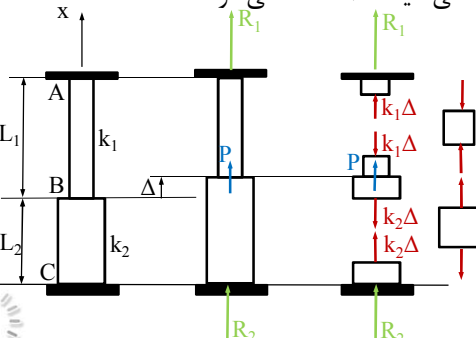
$$k = \frac{1}{f} = \frac{1}{\frac{L}{AE}} = \frac{AE}{L}$$

$$k_1 = \frac{A_1 E_1}{L_1} \quad k_2 = \frac{A_2 E_2}{L_2}$$

نیروهای عکس‌العمل و تغییر مکان Δ را در B وقتی در جهت مثبت محور x باشند مثبت در نظر می‌گیریم.

هدف اصلی در این مسئله به دست آوردن Δ است.

چون یک پارامتر Δ وجود دارد، مسئله یک درجه نامعینی سینماتیکی و یا یک **درجه آزادی** دارد.



گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالشیری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

2 - 10 of 15

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

تحلیل بر اساس روش تغییر مکان

معادله تعادل برای جسم آزاد در گره B

$$-k_1\Delta - k_2\Delta + P = 0 \rightarrow \Delta = \frac{P}{k_1 + k_2}$$

معادله تعادل برای جسم آزاد در گره A و C

$$R_1 = -k_1\Delta, R_2 = -k_2\Delta$$

$$R_1 = -\frac{k_1}{k_1 + k_2}P, R_2 = -\frac{k_2}{k_1 + k_2}P$$

علامت منفی R_1 و R_2 نشان می‌دهد عکس‌العمل‌ها بر خلاف جهت فرض شده است.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالشیری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

2 - 11 of 15

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

کاربرد روش تغییر مکان در مسایلی با چند درجه آزادی

این روش پرکاربردترین روش در حل مسائل بار محوری اعم از مصالح خطی یا غیرخطی است. در اینجا تنها مسائل ارتجاعی خطی را در نظر می‌گیریم.

روش تغییر مکان را می‌توان برای مسائل معین و نامعین به کار برد و از این جهت **عمومیت دارد**.

ترسیمه آزاد گره‌ها تغییر مکان و نیروی هر گره

هر گره ۱ تا ۴ می‌تواند در راستای قائم تغییر مکان داشته باشد، بنابراین سیستم دارای ۴ درجه آزادی است.

توجه شود که اگر در یک گره تغییر مکان مشخص شده باشد دیگر نمی‌توان در آن گره یک نیرو نیز مشخص شده باشد و بالعکس. یعنی در یک نقطه یا نیرو را داریم و تغییر مکان را به دست می‌آوریم و یا تغییر مکان را داریم و نیرو را به دست می‌آوریم.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالشیری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

2 - 12 of 15

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

کاربرد روش تغییر مکان در مسایلی با چند درجه آزادی

اکنون معادله تعادل نیرو $\sum F_x = 0$ را برای هر گره می‌نویسیم:

$$\begin{cases} P_1 - k_1(\Delta_1 - \Delta_2) & = 0 \\ P_2 + k_1(\Delta_1 - \Delta_2) - k_2(\Delta_2 - \Delta_3) & = 0 \\ P_3 + k_2(\Delta_2 - \Delta_3) - k_3(\Delta_3 - \Delta_4) & = 0 \\ P_4 + k_3(\Delta_3 - \Delta_4) & = 0 \end{cases}$$

این معادلات را معمولاً به شکل زیر می‌نویسند:

$$\begin{cases} k_1\Delta_1 - k_1\Delta_2 & = P_1 \\ -k_1\Delta_1 + (k_1 + k_2)\Delta_2 - k_2\Delta_3 & = P_2 \\ -k_2\Delta_2 + (k_2 + k_3)\Delta_3 - k_3\Delta_4 & = P_3 \\ -k_3\Delta_3 + k_3\Delta_4 & = P_4 \end{cases}$$

یا به شکل ماتریسی:

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix}$$

ماتریس سفتی متقارن

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 2 - 13 of 15

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

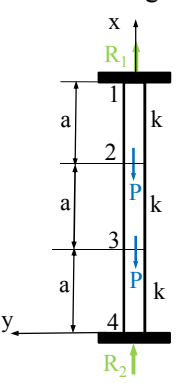
مثال P111 Popov, 1990- 2.16

در میله بدون وزن نشان داده شده در شکل که در دو انتها محکم شده و از مصالح ارتجاعی ساخته شده است، با استفاده از روش تغییر مکان، تغییر مکان گره‌ها و عکس‌العمل‌ها را به دست آورید. سطح مقطع ثابت است.

حل: در اینجا فقط Δ_2 و Δ_3 باید محاسبه شوند زیرا $\Delta_1 = \Delta_4 = 0$

سیستم دو درجه آزادی سینماتیکی دارد.

با استفاده از فرم ماتریسی معادلات داریم:



$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} k & -k & 0 & 0 \\ -k & 2k & -k & 0 \\ 0 & -k & 2k & -k \\ 0 & 0 & -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \\ -P \\ -P \\ R_2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{aligned} \Delta_2 &= \Delta_3 = -\frac{P}{k} \\ R_1 &= R_2 = P \end{aligned}$$

معنی این نتیجه این است که نیروی بالایی (که در گره ۲ اثر می‌کند) توسط تکیه‌گاه بالایی و نیروی گره ۳ توسط تکیه‌گاه پایینی تحمل می‌شود. قسمت میانی میله تغییر شکلی ندارد و مانند یک جسم صلب جابجا می‌شود زیرا $\Delta_2 = \Delta_3$.

نکته: در این مسئله که یک درجه نامعینی ایستایی وجود دارد، استفاده از روش نیرو ساده‌تر است. روش تغییر مکان برای مسایل با چند درجه آزادی توصیه می‌شود.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

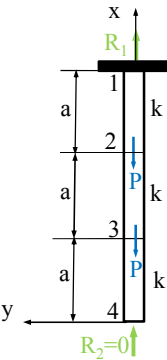
© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 2 - 14 of 15

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مثال 2.17- P111 Popov, 1990

برای میله بدون وزن نشان داده شده در شکل که تنها یک تکیه‌گاه در بالا دارد، الف- تغییر مکان گره‌ها و عکس‌العمل را به دست آورید (برای این حالت $R_2=0$ است). ب- قسمت الف را با فرض اینکه تغییر مکان سر آزاد $3P/k$ به طرف بالا باشد مجدداً انجام دهید.

حل: الف- در این حالت $\Delta_1=0$ است. با استفاده از فرم ماتریسی معادلات داریم:



$$\begin{bmatrix} k & -k & 0 & 0 \\ -k & 2k & -k & 0 \\ 0 & -k & 2k & -k \\ 0 & 0 & -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{Bmatrix}, P_2 = P_3 = -P$$

$$\Delta_2 = -\frac{2P}{k}, \Delta_3 = \Delta_4 = -\frac{3P}{k}$$

$$R_1 = 2P$$

ب- با توجه به مشخص بودن تغییر مکان در گره ۴ ($\Delta_4=3P/k$)، عکس‌العمل مجهول R_2 که در گره ۴ باید اعمال شود تا این تغییر مکان را باعث شود را به دست می‌آوریم.

$$\begin{bmatrix} k & -k & 0 & 0 \\ -k & 2k & -k & 0 \\ 0 & -k & 2k & -k \\ 0 & 0 & -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ 3P/k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ -P \\ -P \\ R_2 \end{Bmatrix} \rightarrow \Delta_2 = 0, \Delta_3 = \frac{P}{k}$$

$$R_1 = 0, R_2 = 2P$$

امتحان نیم ترم تا اینجا

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالشیری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 2 - 15 of 15