

2.2. Coordinate Transformation

تبدیل مختصات

2.4 Translation and Rotation of Coordinates

(A First course In Continuum Mechanics, 2nd ed. By Y.C. Fung)

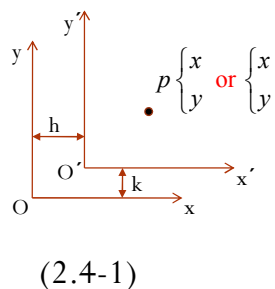
انتقال و چرخش

© M.H. Abolbashari, Ferdowsi University of Mashhad

فضای دو بعدی (Two Dimensional Space)

(۱) انتقال (Translation)

دو سیستم مختصات کارتزین متعامد $O-xy$ و $O'-x'y'$ را در نظر بگیرید. اگر مختصات $O'-x'y'$ از $O-xy$ با یک انتقال (shift) بدون چرخش به دست آمده باشد، به آن یک انتقال (translation) می‌گویند. اگر نقطه‌ای مانند P به ترتیب مختصات (x, y) و (x', y') نسبت به سیستم مختصات اولیه و جدید داشته باشد و اگر مرکز مختصات جدید O' در (h, k) در سیستم $O-xy$ باشد، آنگاه:



$$\begin{cases} x = x' + h \\ y = y' + k \end{cases} \quad \text{or} \quad \begin{cases} x' = x - h \\ y' = y - k \end{cases} \quad (2.4-1)$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

2/13

(۲) چرخش (Rotation)

اگر مرکز مختصات ثابت بماند و محوره‌های جدید با چرخش Ox و Oy به اندازه زاویه θ در جهت پادساعتگرد به وجود آمده باشد، انتقال محورها را **چرخش** می‌گویند. آنگاه:

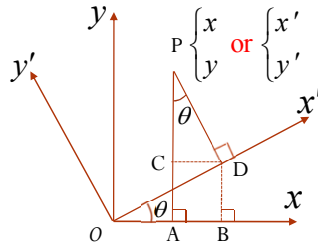


Figure 2.2 Rotation of coordinates.

$$\begin{cases} OA = x' \cos \theta - y' \sin \theta \\ OB = x' \sin \theta + y' \cos \theta \\ CD = AB \end{cases} \quad (2.4-2)$$

$$\begin{cases} x = x' \cos \theta - y' \sin \theta \\ y = x' \sin \theta + y' \cos \theta \end{cases} \quad (2.4-3)$$

3/13

با استفاده از نماد اندیسی: اگر از x_1, x_2 به جای x, y و از x'_1, x'_2 به جای x', y' استفاده کنیم، داریم: روشن است که چرخشی که با معادلات (2.4-3) بیان شد را می‌توان به شکل زیر نوشت.

$$x'_i = \beta_{ij} x_j, \quad (i = 1, 2) \quad (2.4-4)$$

که در آن β_{ij} المان‌های ماتریس مربعی زیر است.

$$(\beta_{ij}) = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2.4-5)$$

(مهم: به چگونگی بیان ماتریسی یک کمیت دو اندیسی توجه شود که مقادیر اندیس اول در هر سطر ثابت می‌ماند و اندیس دوم در ستون‌ها در محدوده خودش مقدار می‌گیرد.) چرخشی که با معادله (2.4-2) بیان می‌شود را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$x_i = \beta_{ji} x'_j, \quad (i = 1, 2) \quad (2.4-6)$$

که بر اساس معادله (2.4-2)، β_{ji} المان‌های زامین سطر و زامین ستون (β_{ij}) است. واضح است که ماتریس (β_{ji}) **ترانپوز** (transpose) ماتریس β_{ij} است. یعنی:

$$(\beta_{ji}) = (\beta_{ij})^T \quad (2.4-7)$$

نکته: در روابط (2.4-4) و (2.4-6) اندیس اول β با اندیس مختصات پرایم هماهنگ است. 4/13

نکته: در بعضی از مراجع ماتریس انتقال را به شکل

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

تعریف می کنند که با β رابطه زیر را دارد.

$$(a_{ij}) = (\beta_{ij})^T$$

در این صورت در روابط انتقال **اندیس دوم** a_{ij} با اندیس مختصات پرایم (بار) هماهنگ است. به عنوان مثال داریم:

$$\bar{s}_\beta = a_{\alpha\beta} s_\alpha$$

$$\bar{s}_i = \beta_{ij} s_j \quad \text{یا}$$

تعامد (Orthogonality)

از طرف دیگر، از نقطه نظر جواب دستگاه معادلات خطی همزمان $x'_i = \beta_{ij} x_j$ ماتریس (β_{ji}) در معادله $x_i = \beta_{ji} x'_j$ باید **معکوس** ماتریس (β_{ij}) باشد. یعنی:

$$(\beta_{ji}) = (\beta_{ij})^{-1} \quad (2.4-8)$$

از اینجا خاصیت اساسی ماتریس انتقال (β_{ij}) که چرخش محورهای مختصات کارتزین متعامد را تعریف می کند به دست می آید که:

$$(\beta_{ij})^T = (\beta_{ij})^{-1} \quad (2.4-9)$$

ماتریس (β_{ij}) ، $i, j = 1, 2, \dots, n$ که معادله (2.4-9) را ارضا کند ماتریس **متعامد** (orthogonal) نامیده می شود.

یک انتقال را **متعامد** می گویند اگر ماتریس انتقال آن **متعامد** باشد.

ماتریس معادله (2.4-5) که یک چرخش محورهای مختصات است را متعامد می گویند. برای یک ماتریس **متعامد** داریم:

$$(\beta_{ij})(\beta_{ij})^T = (\beta_{ij})(\beta_{ij})^{-1} = (\delta_{ij}) \quad \text{معادله ماتریسی}$$

بنابراین:

$$\beta_{ik} \beta_{jk} = \delta_{ij} \text{ or } \beta_{ki} \beta_{kj} = \delta_{ij} \quad (2.4-10) \quad \text{معادله اندیسی}$$

معنای هندسی این معادلات:

این معادلات را مستقیماً از چرخش محورهای مختصات به شکل زیر به دست می‌آوریم.

یک بردار **یکه** که از مرکز مختصات در امتداد محور x'_i است و کسینوس دایرکتوری‌های β_{i1} و β_{i2} به ترتیب نسبت به محورهای x_1 و x_2 دارد را در نظر بگیرید. این که طول آن واحد است با معادله زیر بیان می‌شود.

$$(\beta_{i1})^2 + (\beta_{i2})^2 = 1, \quad (i=1,2) \quad (2.4-11)$$

این که بردار واحد در امتداد محور x'_i بر بردار واحد در امتداد محور x'_j عمود است به شرطی که $j \neq i$ باشد به شکل زیر نوشته می‌شود.

$$\beta_{i1} \beta_{j1} + \beta_{i2} \beta_{j2} = 0, \quad (i \neq j) \quad (2.4-12)$$

$$A \cdot B = A_x B_x + A_y B_y$$

ترکیب معادلات (2.4-11) و (2.4-12) معادله (2.4-10) را نتیجه می‌دهد.

نکته: یک راه دیگر به این شکل است که: می‌دانیم β_{ij} ها از معادله (2.4-5) هستند و می‌توانیم معادله (2.4-10) را با محاسبه مستقیم به دست آوریم.

ماتریس کسینوس دایرکتوری‌ها

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \cos \alpha' & \cos \beta' & \cos \gamma' \\ \cos \alpha'' & \cos \beta'' & \cos \gamma'' \end{pmatrix}$$

فضای سه-بعدی

واضح است که بحث قبلی را می‌توان به سادگی به سه بعدی تعمیم داد. محدوده اندیس‌های i, j می‌تواند به 1, 2, 3 تغییر داده شود.

دو سیستم مختصات کارتزین متعامد راست (right-handed) در نظر بگیرید. فرض کنید $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ بردارهای یکه (که در کارتزین مبنا هم گفته می‌شود) در سیستم مختصات x_1, x_2, x_3 و $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$ بردارهای یکه (مبنا) در سیستم مختصات x'_1, x'_2, x'_3 باشند. از آنجا که سیستم متعامد است، داریم:

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}, \quad \vec{e}'_i \cdot \vec{e}'_j = \delta_{ij} \quad (2.4-13)$$

بردار $\vec{x}$ بر حسب بردارهای مبنا به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\vec{x} = x_j \vec{e}_j = x'_j \vec{e}'_j \quad (2.4-14)$$

ضرب اسکالر طرفین رابطه (2.4-14) با $\vec{e}_i$ عبارت است از:

$$x_j (\vec{e}_j \cdot \vec{e}_i) = x'_j (\vec{e}'_j \cdot \vec{e}_i) \quad (2.4-15)$$

داریم:

$$x_j (\vec{e}_j \cdot \vec{e}_i) = x_j \delta_{ij} = x_i$$

بنابراین:

$$x_i = (\vec{e}'_j \cdot \vec{e}_i) x'_j \quad (2.4-16)$$

اکنون عبارت داخل پرانتز را تعریف می‌کنیم:

$$(\vec{e}'_j \cdot \vec{e}_i) \equiv \beta_{ji} \quad (2.4-17)$$

آنگاه

$$x_i = \beta_{ji} x'_j, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.4-18)$$

اکنون طرفین رابطه (2.4-14) را در e'_i ضرب اسکالر می‌کنیم:

$$x_j (\vec{e}_j \cdot \vec{e}'_i) = x'_j (\vec{e}'_j \cdot \vec{e}'_i)$$

اما داریم: $(\vec{e}'_j \cdot \vec{e}'_i) = \delta_{ij}$ و $(\vec{e}_j \cdot \vec{e}'_i) \equiv \beta_{ij}$ بنابراین:

$$x'_i = \beta_{ij} x_j, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.4-19)$$

معادلات (2.4-18) و (2.4-19) حالت کلی معادلات (2.4-4) و (2.4-6) برای سه بعدی‌اند.

معادله (2.4-17) معنی هندسی ضرایب β_{ij} را نشان می‌دهد.

اینکه معادلات $(\beta_{ji}) = (\beta_{ij})^{-1}$ و $(\beta_{ji}) = (\beta_{ij})^T$ برای حالت $i, j = 1, 2, 3$ برقرار است روشن است؛ زیرا (2.4-18) و (2.4-19) انتقال معکوس یکدیگرند. آنگاه معادلات $(\beta_{ij})^T = (\beta_{ji})^{-1}$ و $\beta_{ik} \beta_{jk} = \delta_{ij}$ به دست می‌آیند.

9/13

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

اکنون فرض کنید اعداد x_1, x_2, x_3 که نشانگر مختصات نقطه P در شکل 2.3 هستند، مؤلفه‌های بردار شعاعی $\vec{A}$ نیز هستند. توجه به این حقیقت،

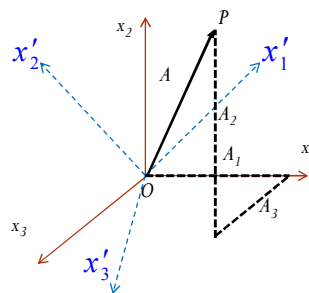


Figure 2.3 Radius vector and coordinates.

قانون انتقال مؤلفه‌های یک بردار در مختصات کارتزین متعامد را می‌دهد.

$$A'_i = \beta_{ij} A_j, \quad A_i = \beta_{ji} A'_j \quad (2.4-20)$$

که در آن β_{ij} نشانگر کسینوس زاویه بین محورهای Ox_j و Ox'_i است.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

10/13

اثبات $|\beta_{ij}| = 1$:

حجم یک متوازی السطوح که اضلاع آن سه بردار $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ باشند، ضرب سه گانه $(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{u}$ و یا منفی آن است. علامت آن بسته به ترتیب $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ است؛ که اگر به ترتیب پیشتر گفته شده و یک سیستم راست دست پیچ گوشتی وار را تشکیل دهند مثبت و در غیر این صورت منفی است. اگر سیستم راست دست باشد، حجم برابر با دترمینان مؤلفه های آن هاست.

$$\text{Volume} = \vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{v} \cdot (\vec{w} \times \vec{u}) = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \quad (2.4-21)$$

اگر فرض کنیم x_1, x_2, x_3 و x'_1, x'_2, x'_3 راست دست هستند. آنگاه واضح است که دترمینان β_{ij} نشانگر حجم یک مکعب به اضلاع **واحد** است که **حجم آن ۱** است. (هر سطر مؤلفه های یک بردار به طول یک است و سطرها هم معرف دو بردار یکه عمود بر هم اند).

$$(\beta_{i1})^2 + (\beta_{i2})^2 + (\beta_{i3})^2 = 1, i=1,2,3 \quad (2.4-11)$$

$$(\beta_{i1}\beta_{j1})^2 + (\beta_{i2}\beta_{j2})^2 + (\beta_{i3}\beta_{j3})^2 = 0, i \neq j \quad (2.4-12)$$

$$|\beta_{ij}| = \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{vmatrix} = 1 \quad (2.4-22)$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

11/13

انتقال قابل قبول (Admissible Transformations):

متغیرهای مستقل x_1, x_2, x_3 را می توان مختصات یک نقطه در یک سیستم مختصات در نظر گرفت. یک انتقال از x_1, x_2, x_3 به یک مختصات جدید $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ با معادله زیر صورت می پذیرد:

$$\bar{x}_i = f_i(x_1, x_2, x_3), \quad i = 1, 2, 3 \quad (1)$$

که یک انتقال مختصات را تعریف می کند. انتقال معکوس به شکل زیر است.

$$x_i = g_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3), \quad i = 1, 2, 3 \quad (2)$$

برای اطمینان از اینکه چنین انتقالی در یک ناحیه R از متغیرهای (x_1, x_2, x_3) برگشت پذیر (reversible) و یک به یک (one-to-one correspondence) باشد، یعنی به این منظور که هر مجموعه (x_1, x_2, x_3) یک مجموعه منحصر به فرد $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ را برای مجموعه (x_1, x_2, x_3) در فضای R بدهد و برعکس، کافی است شرایط زیر برقرار باشد:

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

12/13

(a) توابع f_i در فضای R تک مقداره و پیوسته بوده و مشتق اول پیوسته داشته باشند و

(b) **ژاکوبین** (که یک دترمینان به شکل $J = |\partial \bar{x}_i / \partial x_j|$ است) در هیچ نقطه‌ای در ناحیه R صفر نباشد؛ یعنی:

$$J = \left| \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_j} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \bar{x}_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \bar{x}_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \bar{x}_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \bar{x}_3}{\partial x_1} & \frac{\partial \bar{x}_3}{\partial x_2} & \frac{\partial \bar{x}_3}{\partial x_3} \end{vmatrix} \neq 0 \text{ in } R \quad (3)$$

انتقال مختصات با خواص (a) و (b) را انتقال قابل قبول می‌نامند.
 اگر $J > 0$ in R ، آنگاه یک مجموعه راست دست از مختصات به یک مختصات راست دست انتقال می‌یابد و انتقال را **سره (proper)** می‌گویند.
 اگر $J < 0$ in R ، آنگاه یک مجموعه راست دست از مختصات به یک مختصات چپ دست انتقال می‌یابد و انتقال را **ناسره (improper)** می‌گویند.
 در این کتاب فرض می‌کنیم همه انتقال‌ها **قابل قبول و سره (admissible and proper)** هستند.