Eighth Edition

CHAPTER 4

VECTOR MECHANICS FOR ENGINEERS: STATICS

Ferdinand P. Beer
E. Russell Johnston, Jr.

Lecture Notes:
J. Walt Oler
Texas Tech University

تعادل اجسام صلب
بخش اول

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2007 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مقدمه

- برای یک جسم صلب در حال تعادل، نیروهای خارجی و ممان‌ها بالانس هستند و هیچ‌گونه حرکت انتقال یا چرخشی به جسم وارد نمی‌کنند.
- شرط لازم و کافی برای تعادل ایستایی یک جسم این است که برآیند نیرو و کوپل همه نیروهای خارجی، سیستمی معادل صفر تشکیل دهند.

$$\sum \vec{F} = 0 \quad \sum \vec{M}_O = \sum \left(\vec{r} \times \vec{F}\right) = 0$$

- اگر همه نیروها و ممان‌ها را به مؤلفه‌های کارتزین‌شان تجزیه کنیم ۶ معادله اسکالر به دست می‌آید که شرایط تعادل ایستایی را بیان می‌کنند.

بنابراین:

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum F_z = 0$$
$$\sum M_x = 0 \quad \sum M_y = 0 \quad \sum M_z = 0$$

- در 3-D شش معادله تعادل داریم و
- در 2-D سه معادله

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2007 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

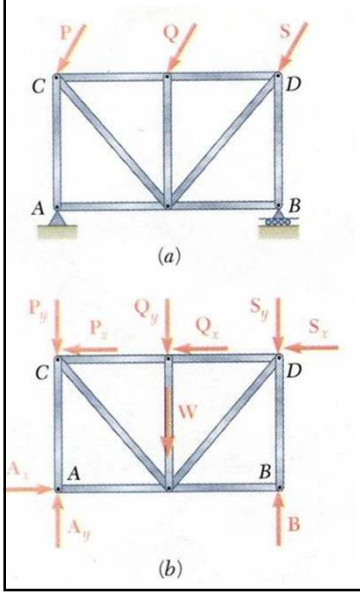
در این معادلات همه نیروهای زیر باید در نظر گرفته شوند:

نیروهای خارجی: نیروهایی که از محیط به سازه وارد می‌شوند (مانند وزن، بارهای هنگام کارکردن (service loads) و غیره)

نیروهای داخلی: نیروهای اعضای سازه یا اتصالات که از تغییرشکل‌های مصالح بوجود آمده‌اند.

عکس‌العمل‌ها: نیروهایی که کل سازه را به عنوان یک مجموعه نگاه می‌دارد. عکس‌العمل‌ها هم نیروهای داخلی‌اند، ولی به سبب اهمیت آن‌ها، جداگانه لیست شده‌اند.

معادلات تعادل برای مسائل دو بعدی



$$\sum F_x = 0$$
$$\sum F_y = 0$$
$$\sum M_o = 0$$

- سه معادله را می‌توان برای به دست آوردن سه مجهول استفاده کرد و نه بیشتر!
- به این سه معادله، معادله‌ای را نمی‌توان اضافه کرد ولی آن‌ها را با معادلات دیگری می‌توان جایگزین کرد. $\sum F_x = 0 \quad \sum M_A = 0 \quad \sum M_B = 0$ $\sum M_A = 0 \quad \sum M_B = 0 \quad \sum M_C = 0$

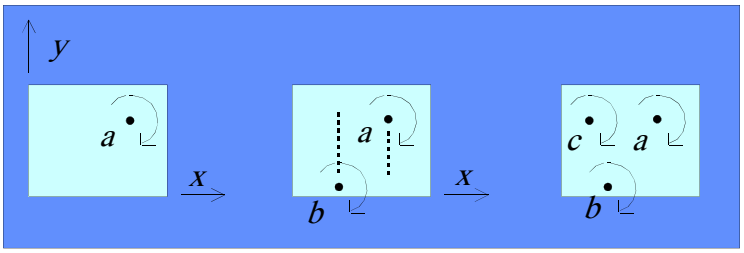
شکل‌های مختلف سه معادله تعادل برای مسائل دوبعدی

$\sum F_x=0$	$\sum F_x=0$	$\sum M_a=0$
$\sum F_y=0$	$\sum M_a=0$	$\sum M_b=0$
$\sum M_a=0$	$\sum M_b=0$	$\sum M_c=0$

نقاط a، b و c نمی‌توانند روی یک خط باشند.

نقاط a و b نمی‌توانند مختصات x یکسانی داشته باشند.

هیچ محدودیتی در مورد نقطه a وجود ندارد.



معادلات تعادل برای مسائل دو بعدی

شکل‌های مختلف سه معادله تعادل برای مسائل دوبعدی

$$\sum F_a = 0$$

$$\sum M_A = 0$$

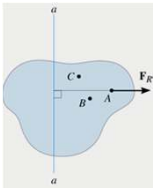
$$\sum M_B = 0$$

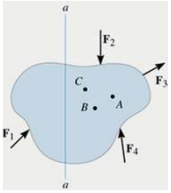
$$\sum M_A = 0$$

$$\sum M_B = 0$$

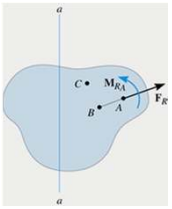
$$\sum M_C = 0$$

$F_a=0$ یعنی اگر نیرویی باشد باید عمود بر MF5 aa باشد. اکنون می‌گوییم از آنجا که $M_A=0$ است ایجاب می‌کند چنین نیروی از نقطه A نیز بگذرد. ولی از آنجا که $M_B=0$، نیرو نمی‌تواند هم از نقطه B بگذرد و هم عمود بر aa باشد.





از آنجا که $M_A=0$ و $M_B=0$، اگر نیرویی باشد باید از AB بگذرد. از آنجا که $M_C=0$ است، نیروی فرضی ممانی حول C ایجاد می‌کند که این ممان هم باید صفر باشد زیرا $M_C=0$.



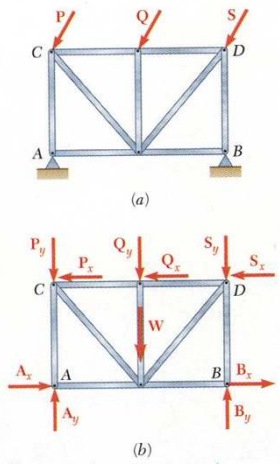
Slide 6

MF5 Fa=0 means if there is a force it should be perpendicular to aa. Now MA=0 means the force should pass through point A. Then since MB=0 the force is zero because B can not be in the line perpendicular to aa.

Since MA=0 and MB=0, if there is a force it shoud pass through AB. Now Since MC=0 the assumed force produce a moment about C. But this moment also should be Zero because MC=0.

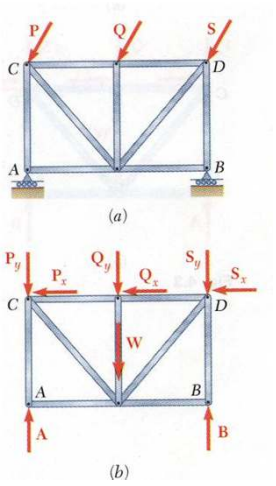
My Friend٠۶/٠۴/٢٠٠٩ ؛

نامعینی استاتیکی(حالت ۱)



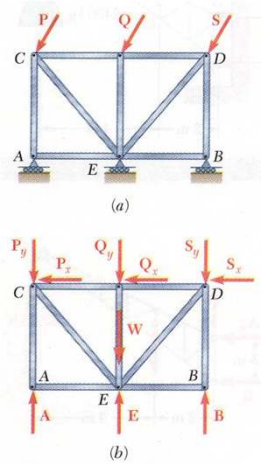
- از آنجا که مجموعه معادلات تعادل (دو بعدی) تنها برای به دست آوردن سه مجهول می‌تواند استفاده شود، عکس‌العمل‌های تکیه‌گاه‌ها برای جسم صلب دو بعدی اگر بیشتر از سه باشد نمی‌تواند به دست آورده شود؛ و به آن‌ها از نظر استاتیکی نامعین می‌گویند.

نامعینی استاتیکی (حالت ۲)



- از طرف دیگر، اگر تعداد عکس‌العمل‌ها از سه کمتر بود، تعادل برای حالت بارگذاری کلی وجود نخواهد داشت؛ و به سازه می‌گویند قیدهایش از آنچه برای تعادلش لازم است کمتر می‌باشد.

نامعینی استاتیکی (حالت ۳)



- این‌که سه عکس‌العمل باشد و سه معادله، تضمینی برای به دست آوردن آن‌ها نیز نیست. اگر تکیه‌گاه‌ها به شکلی قرارگرفته باشند که با هم موازی یا متقاطع (یا برای سه بعدی همه یک خط را قطع کنند) باشند، عکس‌العمل‌ها نمی‌توانند از معادلات استاتیک به دست آیند، و می‌گویند سازه نامناسب مقید شده است.

در سازه صلب دو-بعدی

نامعین ایستایی

تعادل برای بارگذاری کلی وجود نخواهد داشت؛ می‌گویند سازه کمتر از حد لازم مقید شده‌است.

تعداد قیود

> 3	تکیه‌گاه‌های اضافی		
< 3		کمتر از حد لازم مقید شده‌است. از نظر استاتیکی نامعین	**متقاطع یا موازیند**
$= 3$	عکس‌العمل‌ها	***OK***	**متقاطع یا موازی نیستند**

قیود- شرایط تکیه‌گاهی

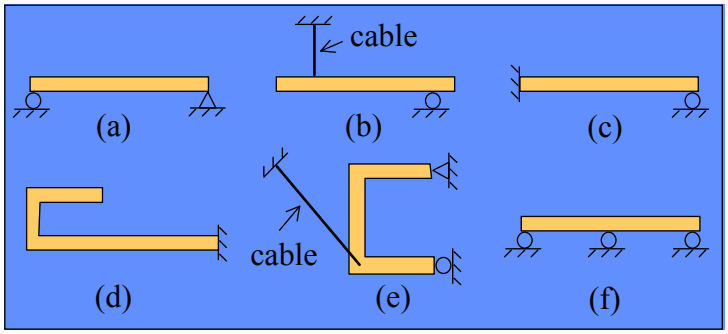
برای یک سازه‌ای که از نظر بارگذاری کلی در تعادل استاتیکی است، تعداد عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی باید با تعداد معادلات تعادل (در دوبعدی ۳ و در سه بعدی ۶) برابر یا از آن‌ها بزرگتر باشد. این یک شرط لازم ولی کافی نیست.

تکیه‌گاه‌های اضافی: وقتی تعداد تکیه‌گاه‌های سازه‌ای از تعداد لازم برای تعادلش بیشتر باشد، از نظر استاتیکی نامعین است.

تگیه‌گاه‌های نامناسب: برای تعادل استاتیکی، قیود باید از نظر تعداد کافی و از نظر قرار گرفتن آنچنان باشند که توان حرکت جسم صلب را نداشته باشد. سازه‌ای که بتواند مانند یک جسم صلب حرکت کند را یک مکانیزم می‌گویند.

مثال: برای سیستم‌های نشان داده شده زیر، درجه اضافی‌بودن (یعنی تعداد شرایط تکیه‌گاهی بیشتر از حد نیاز برای تعادل) را مشخص کنید.

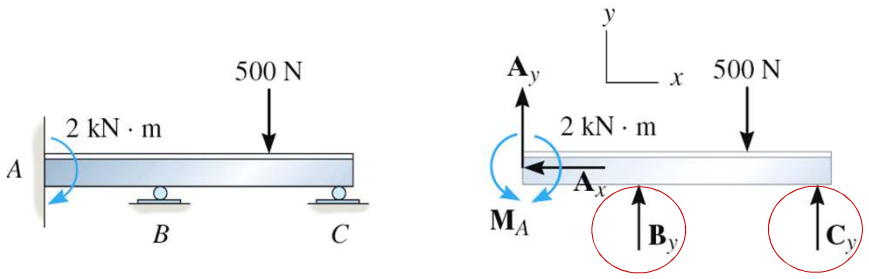
(تعداد معادلات یعنی ۳) – (تعداد قیود) = برای دوبعدی : درجه اضافی



	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)
تعداد قیود	3	2	4	3	4	3
درجه اضافی	0	-1	1	0	1	?

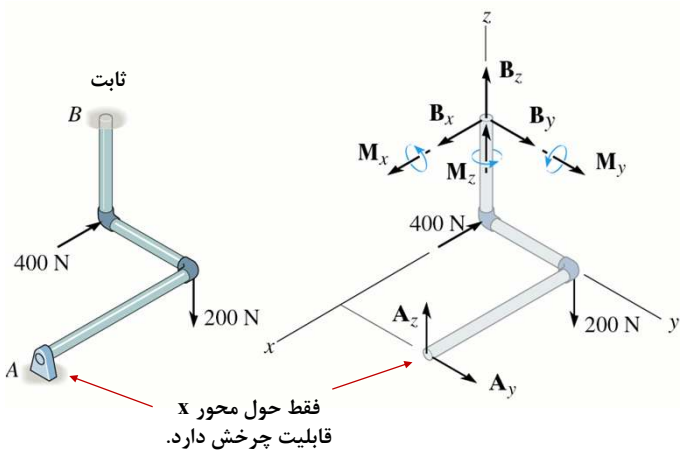
قیود یک جسم صلب در سه بعدی

قیود اضافی
از ۵ قید دو تا اضافی است.



قیود یک جسم صلب در سه بعدی

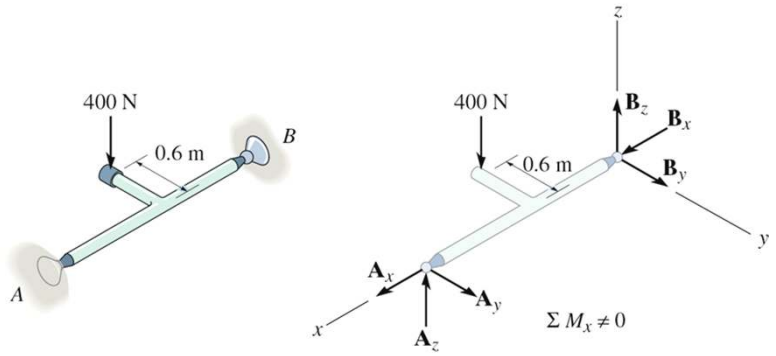
قیود اضافی
از ۱۱ قید ۵ تا اضافی است.



حتی اگر از ۵ قید A تنها دو قید را بگذاریم، همان دو قید نیز اضافی است.

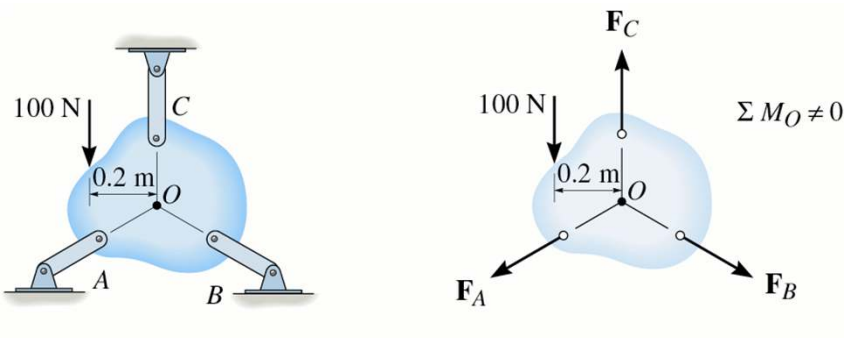
قیود یک جسم صلب در سه بعدی

قیود نامناسب



قیود یک جسم صلب در سه بعدی

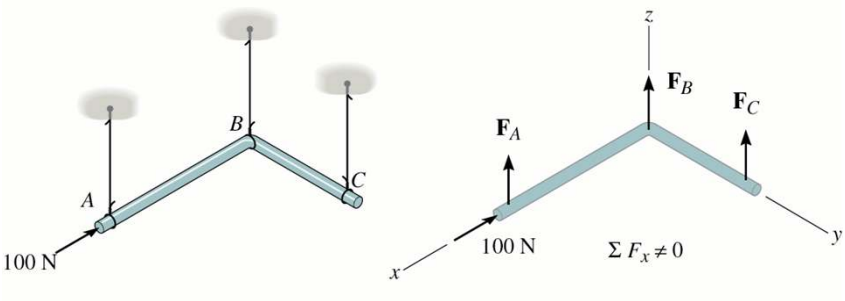
قیود نامناسب



قیود یک جسم صلب در سه بعدی

قیود نامناسب

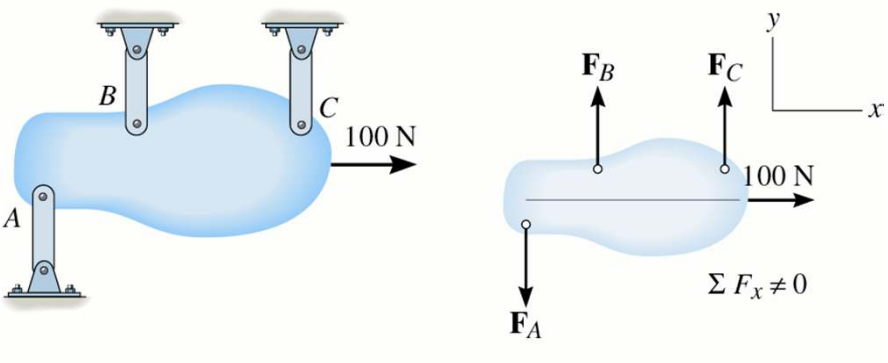
نیروهای عکس‌العمل موازی



قیود یک جسم صلب در سه بعدی

قیود نامناسب

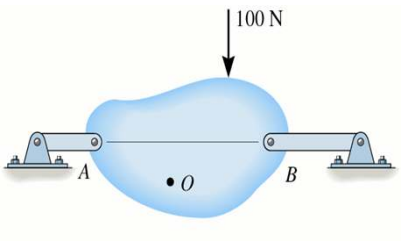
نیروهای عکس‌العمل موازی

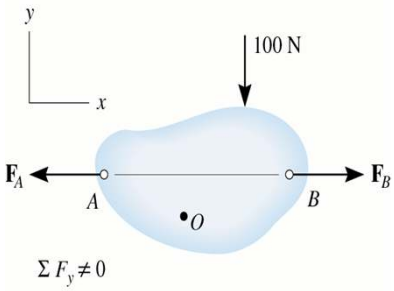


قیود یک جسم صلب در سه بعدی

قیود نامناسب

به شکل صحیح مقید نشدند.





MF4

نکته‌ای در حل مسائل:

اگر نقطه انتخاب شده برای محاسبه ممان ΣM_O با دقت انتخاب شود که ممان تعداد بیشتری از عکس‌العمل‌ها حول آن نقطه صفر شود مطلوب‌تر است.

همچنین اگر معادله ممان $\Sigma M_{AB} = 0$، که عبارت است از ممان نیروها حول محوری که نقطه A را به B متصل می‌کند، را بنویسیم عکس‌العمل‌های نقاط A و B از معادلات حذف می‌شوند و محاسبات ساده‌تر می‌شود.

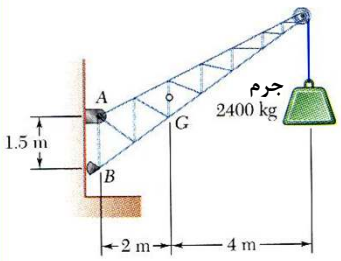
هنگامی که مسائل تعادل اجسام صلب را حل می‌کنیم، لازم است که تمامی نیروهایی که به جسم اثر می‌کنند را در نظر بگیریم. بنابراین، اولین گام حل عبارت است از رسم ترسیمه آزاد جسم که جسم مورد نظر و همه نیروهای وارد بر آن را نشان دهد.

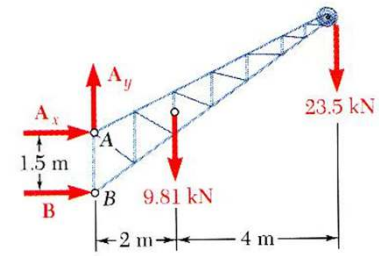
Slide 20

MF4 judicious: Careful, cautious, well judged
My Friend٠٦/٠٤/٢٠٠٩ ؛

Vector Mechanics for Engineers: Statics

ترسیمه آزاد جسم





- جسم را در نظر بگیرید و آن را از زمین و سایر اجسام جدا نمایید.
- محل اثر، مقدار و جهت نیروهای خارجی و همچنین وزن جسم را مشخص کنید.
- محل اثر و جهت‌های فرضی نیروهای مؤثر مجهول را مشخص کنید. این نیروها معمولاً عکس‌العمل‌های زمین و سایر اجسام هستند که خلاف حرکت فرضی جسم صلب‌اند.
- ابعاد و فواصل مورد نیاز برای محاسبه ممان‌های نیروها را روی شکل نشان دهید.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2007 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

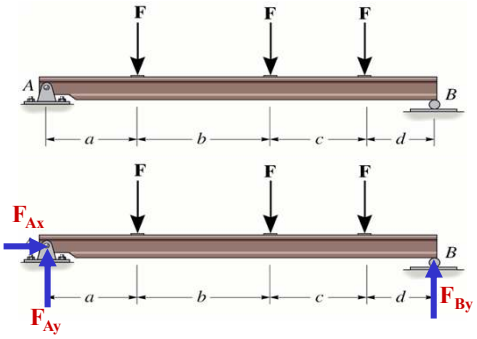
روش رسم ترسیمه آزاد جسم

۱. جسمی صلبی (یا بخشی از جسم صلب) که تعادل آن را می‌خواهید تحلیل کنید انتخاب کنید.
۲. تصور کنید که این جسم از بقیه سازه کاملاً جدا شده و یا از محیط اطرافش آزاد شده است.
   - در دوبعدی، فکر کنید که دایره‌ای دور جسم کشیده شده
   - در سه بعدی، فکر کنید یک سطح بسته‌ای جسم را در بر گرفته
۳. شکل تقریبی از جسم ترسیم کنید.
۴. همه نیروهای خارجی را که روی جسم اثر می‌کنند نشان دهید.
۵. هرگاه یک برش عضوی از سازه را قطع می‌کند، نیروی داخلی که در آنجا وجود دارد نشان دهید.
۶. هرگاه برش از تکیه‌گاهی عبور کرد، عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی که در آنجا وجود دارد نشان دهید.

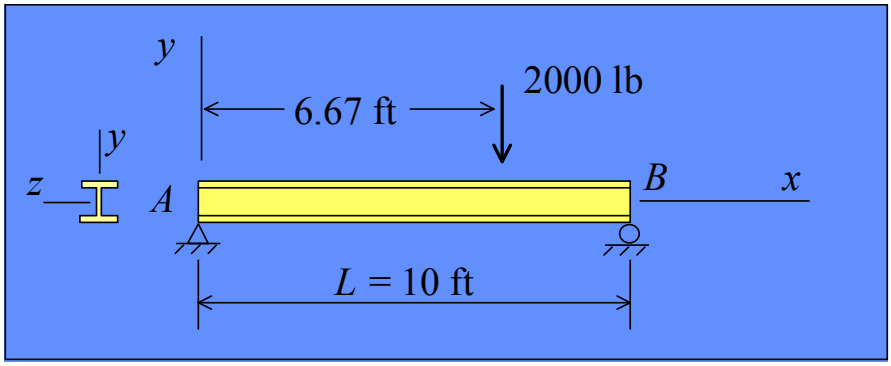
گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

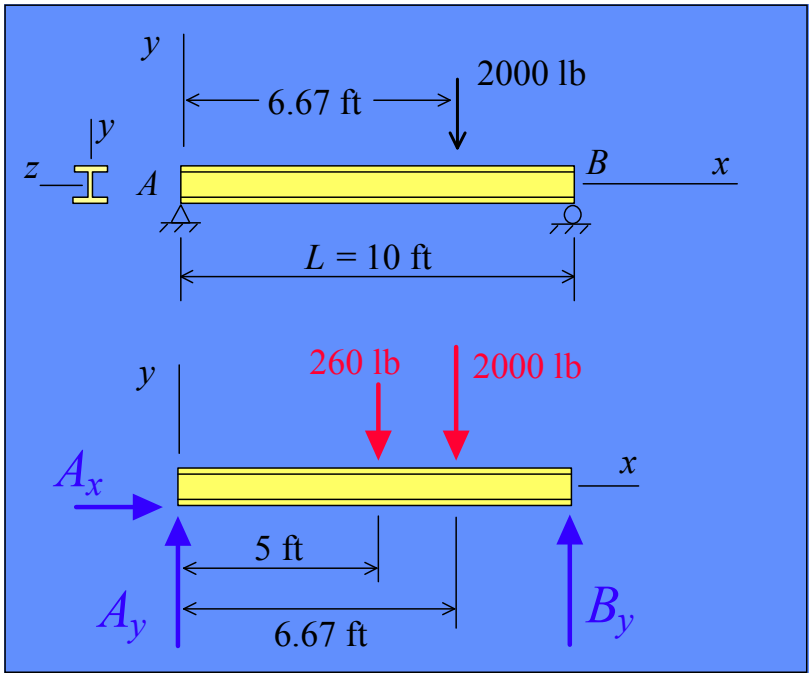
تعادل اجسام صلب دو بعدی

ترسیمه آزد جسم

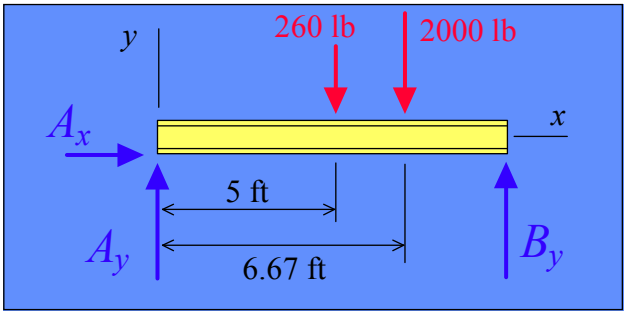


مثال: عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی برای تیر زیر به وزن 260 lb/ft که مقطع آن W14x26 است را به دست آورید.





اکنون معادلات تعادل را می‌نویسیم:



$\sum F_x = 0 = A_x \Leftarrow$

$\sum F_y = 0 = A_y + B_y$ - 260 lb - 2000 lb

$\sum M_A = 0 =$ (260 lb) 5 ft + (2000 lb) 6.67 ft - B_y (10 ft)

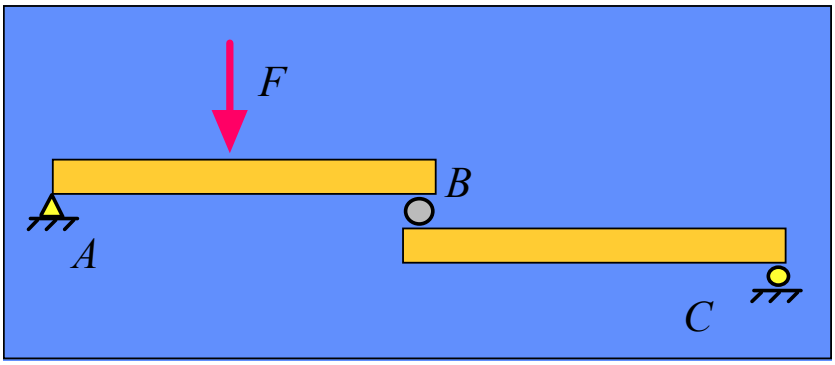
$\Rightarrow B_y$ =14640 ft-lb/10 ft = 1464 lb

$\Rightarrow A_y$ = 796 lb

توجه شود که می‌توان به جای معادلات فوق از $\sum M_A$, $\sum F_x$ و $\sum M_B$ نیز استفاد نمود.

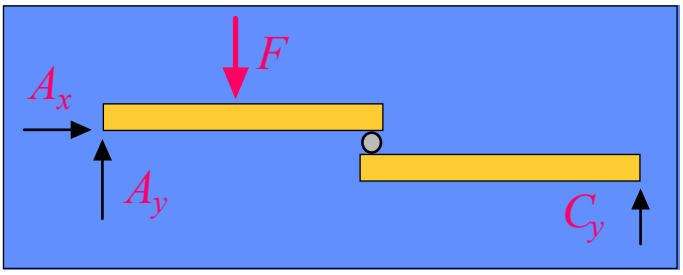
نکات مهم در ترسیمه آزاد

تمرین: ترسیمه آزاد را برای مجموعه ABC ترسیم کنید.

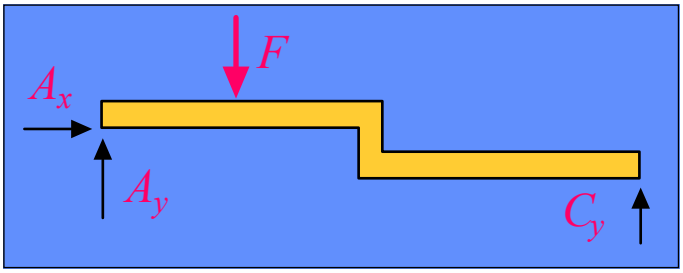


MF11

ABC یک جسم صلب نیست زیرا تحت بار به عنوان جسم صلب می‌چرخد. اگر به طور اشتباه آن‌را جسم صلب در نظر بگیریم، به معنی اینست که فرض کرده‌ایم شکل پایینی است.



آیا این یک ترسیمه آزاد صحیح است؟



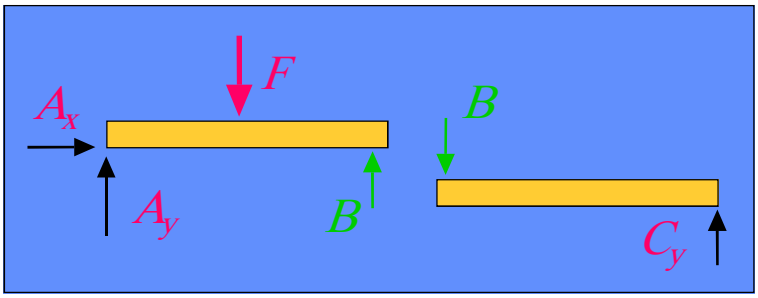
Slide 28

MF11 ABC is not a rigid body since it will rotate as a rigid body under loads. If we mistakenly consider it as a rigid body, it means that we assume it as the lower picture.

My Friend٠٧/٠٤/٢٠١٠ ٤

نه این یک ترسیمه آزاد صحیح نیست:

- وقتی ترسیم آزاد رسم می‌کنیم، یعنی جسم را یک جسم صلب فرض کرده‌ایم. (یا می‌توان آن را در حالت ایده آل یک جسم صلب فرض کرد)
- در این مسئله، ABC یک جسم صلب نیست، زیرا یک غلتک (مفصل) در وسط آن وجود دارد.
- برای این مسئله باید یک ترسیمه آزاد برای AB و یک ترسیمه آزاد برای BC ترسیم کنیم.

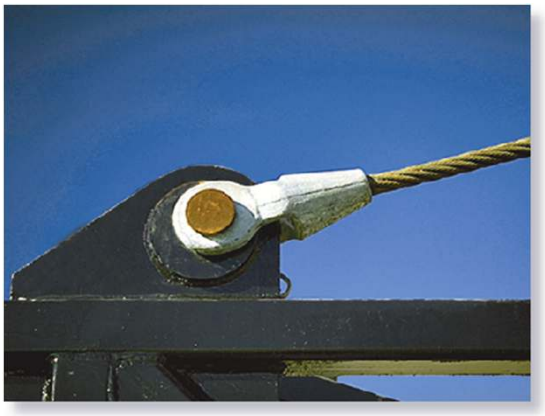


تعادل اجسام صلب دو بعدی

عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی واقعی

تعادل اجسام صلب دو بعدی

عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی واقعی



تعادل اجسام صلب دو بعدی

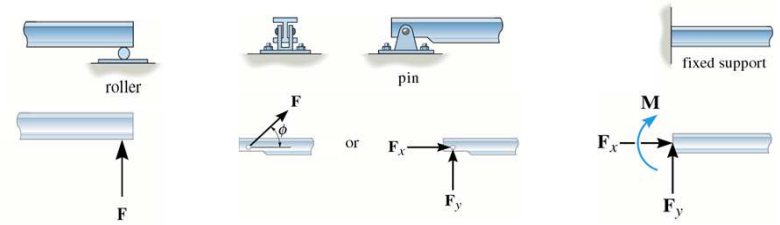
عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی واقعی

تعادل اجسام صلب دو بعدی

عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی واقعی

تعادل اجسام صلب دو بعدی

عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی

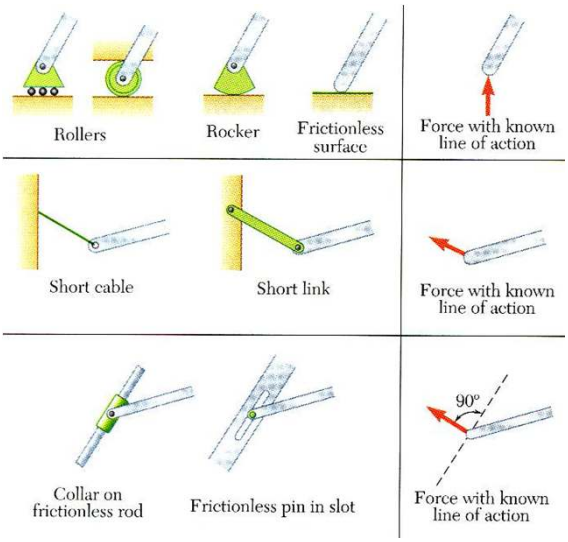


اگر تکیه‌گاهی از حرکت انتقالی جسم در راستای مشخصی جلوگیری نماید، آنگاه نیرویی در همان جهت به جسم وارد می‌کند. به همین ترتیب اگر تکیه‌گاه از حرکت چرخشی جلوگیری نماید، یک ممان کوپل به جسم وارد می‌کند.

MF3

Vector Mechanics for Engineers: Statics

عکس‌العمل‌ها در تکیه‌گاه‌ها و اتصالات برای سازه‌های دوبعدی

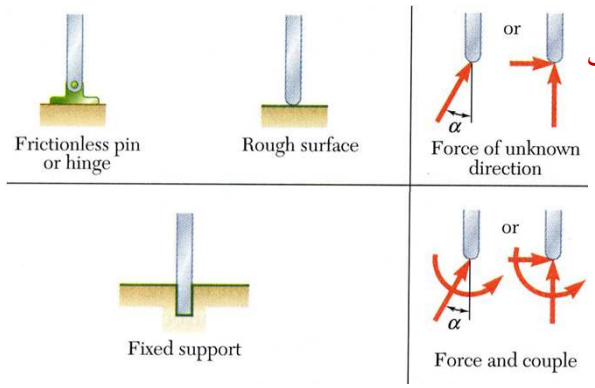


- عکس‌العمل‌های معادل با یک نیرو با راستای معلوم

© 2007 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

Vector Mechanics for Engineers: Statics

عکس‌العمل‌ها در تکیه‌گاه‌ها و اتصالات برای سازه‌های دوبعدی



عکس‌العمل‌های معادل با یک نیرو با جهت و مقدار نامعلوم

عکس‌العمل‌های معادل با یک نیرو با جهت و مقدار نامعلوم و یک کوپل نامعلوم

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2007 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

Slide 35

MF3 Collar: بست، طوقه

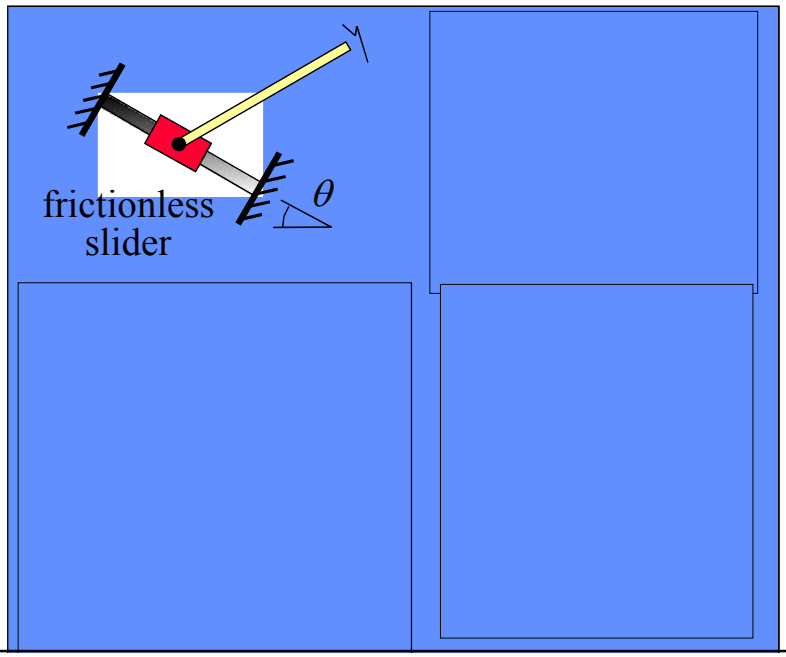
My Friend۰۵/۰۴/۲۰۰۹ ؛

تعادل اجسام صلب دو بعدی

ترسیمه‌های آزاد

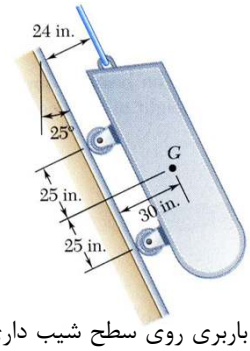
Types of Connection	Reaction	Number of Unknowns
(8) smooth pin or hinge	or	Two unknowns. The reactions are two components of force, or the magnitude and direction ϕ of the resultant force. Note that ϕ and θ are not necessarily equal [usually not, unless the rod shown is a link as in (2)].
(9) member fixed connected to collar on smooth rod		Two unknowns. The reactions are the couple moment and the force which acts perpendicular to the rod.
(10) fixed support	or	Three unknowns. The reactions are the couple moment and the two force components, or the couple moment and the magnitude and direction ϕ of the resultant force.

ترسیمه آزاد جسم را در تکیه‌گاه‌های زیر ترسیم نمایید.



Vector Mechanics for Engineers: Statics

مسئله نمونه 4.3



یک گاری باربری روی سطح شیب داری قرار گرفته است. وزن خالص گاری و بار آن 5500 lb است ک در نقطه G اثر می‌کند. گاری به وسیله یک کابل در آن حالت نگاه داشته می‌شود.

کشش کابل و عکس‌العمل در هر جفت از چرخ‌ها را به دست آورید.

حل:

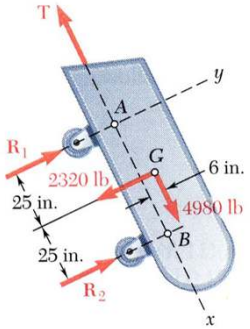
- ترسیمه آزاد را رسم می‌کنیم و محورهای مختصات را در راستای سطح شیبدار در نظر می‌گیریم.
- عکس‌العمل چرخ‌ها را با حل معادلات جمع ممان‌ها حول هر محور چرخ باید صفر باشد به دست می‌آوریم.
- کشش کابل را از حل معادلات مؤلفه جمع نیروها در راستای سطح شیبدار باید صفر باشد به دست می‌آوریم.
- مقادیر را با اینکه جمع مؤلفه‌ها در راستای عمود بر سطح شیبدار نیز صفر است چک می‌کنیم.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2007 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مسئله نمونه 4.3 (ادامه)



- ترسیمه آزاد را رسم می‌کنیم.

$$W_x = +(5500\,\text{lb})\cos 25^\circ$$
$$= +4980\,\text{lb}$$
$$W_y = -(5500\,\text{lb})\sin 25^\circ$$
$$= -2320\,\text{lb}$$

- عکس‌العمل‌ها در چرخ‌ها را به دست می‌آوریم:

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0: \quad -(2320\,\text{lb})25\text{in.} - (4980\,\text{lb})6\text{in.} + R_2(50\text{in.}) = 0$$

$$\boxed{R_2 = 1758\,\text{lb}}$$

$$+\circlearrowleft \sum M_B = 0: \quad +(2320\,\text{lb})25\text{in.} - (4980\,\text{lb})6\text{in.} - R_1(50\text{in.}) = 0$$

$$\boxed{R_1 = 562\,\text{lb}}$$

- کشش کابل را به دست می‌آوریم.

$$\sum F_x = 0: \quad +4980\,\text{lb} - \text{T} = 0$$

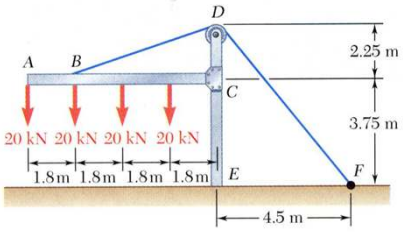
$$\boxed{T = +4980\,\text{lb}}$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2007 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مسئله نمونه 4.4



قابی برای سقف یک ساختمان کوچک طراحی شده است. کشش در کابل 150 kN است.

عکس‌العمل انتهای ثابت E را به دست آورید.

حل:

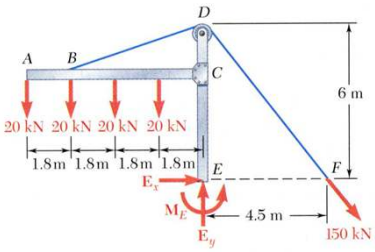
- ترسیمه آزاد قاب و کابل را رسم می‌کنیم.
- سه معادله تعادل را برای به دست آوردن مؤلفه‌های نیروهای عکس‌العمل و ممان در E حل می‌کنیم.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2007 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مسئله نمونه 4.4 (ادامه)



- ترسیمه آزاد قاب و کابل را رسم می‌کنیم.

- سه معادله تعادل را برای به دست آوردن مؤلفه‌های نیروهای عکس‌العمل و ممان حل می‌کنیم.

$$\Sigma F_x = 0: \quad E_x + \frac{4.5}{7.5}(150\,\text{kN}) = 0$$

$$\boxed{E_x = -90.0\,\text{kN}}$$

$$\Sigma F_y = 0: \quad E_y - 4(20\,\text{kN}) - \frac{6}{7.5}(150\,\text{kN}) = 0$$

$$\boxed{E_y = +200\,\text{kN}}$$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_E = 0: \quad +20\,\text{kN}(7.2\,\text{m}) + 20\,\text{kN}(5.4\,\text{m}) + 20\,\text{kN}(3.6\,\text{m}) + 20\,\text{kN}(1.8\,\text{m}) - \frac{6}{7.5}(150\,\text{kN})4.5\,\text{m} + M_E = 0$$

$$\boxed{M_E = 180.0\,\text{kN}\cdot\text{m}}$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2007 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.