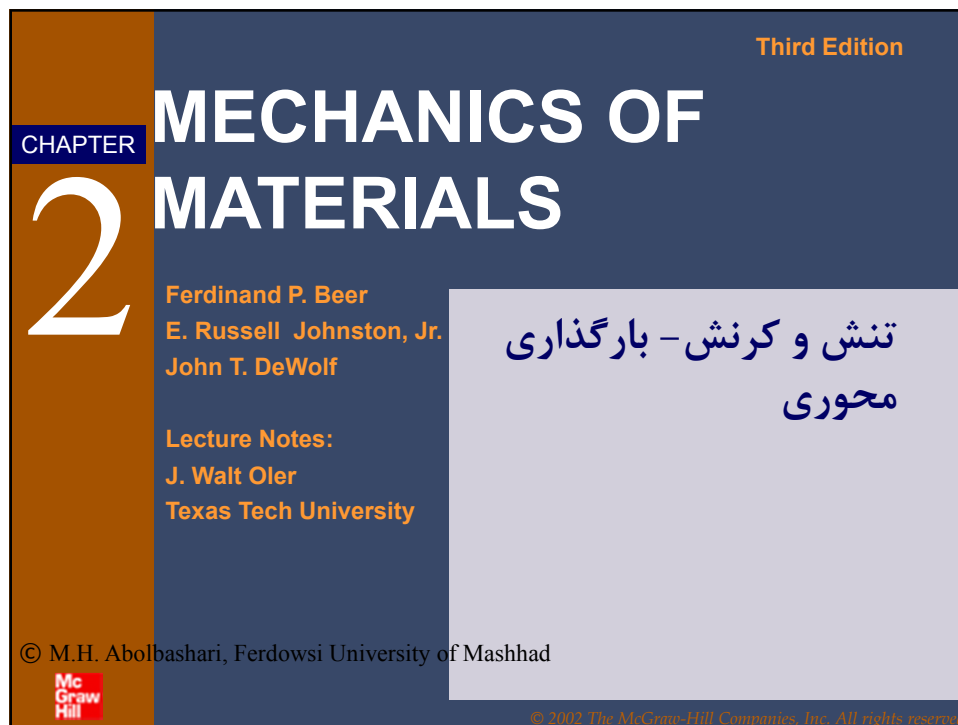




MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

تنش و کرنش: بارگذاری محوری

- مناسب بودن یک سازه یا ماشین هم به تغییر شکل‌های سازه و هم به تنش‌های بوجود آمده در اثر بارگذاری بستگی دارد. تحلیل‌های ایستایی به تنهایی کافی نیستند.
- اگر سازه را تغییر شکل پذیر (غیر صلب) در نظر بگیریم، می‌توانیم نیروهای اعضا و عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی را که نامعین‌اند به دست آوریم.
- به دست آوردن توزیع تنش در یک عضو نیز گاهی در گرو در نظر گرفتن تغییر شکل‌ها است (در مسائل نامعین).
- این فصل در باره تغییر شکل اعضای سازه‌هایی است که تحت بار محوری‌اند. بارهای پیچشی و خمشی خالص در فصل‌های بعدی بحث می‌شوند.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

2 - 2/38

MECHANICS OF MATERIALS

Beer • Johnston • DeWolf

کرنش قائم (سه نمونه از یک مصالح و با ابعاد مختلف را آزمایش می کنیم)

Fig. 2.1

Fig. 2.3

Fig. 2.4

بنابراین منحنی P بر حسب δ به ابعاد نمونه بستگی دارد. ولی منحنی کاربردی باید وابسته به ابعاد نمونه نباشد.

اگر سطح مقطع دو برابر شود با نیروی محوری $2P$ همان مقدار δ خواهیم داشت.

اگر طول میله دو برابر شود با نیروی محوری P تغییر مکانی به اندازه 2δ داریم.

اگر تنش ها و کرنش ها در سه میله را حساب کنیم می بینیم که یکسان است!

$$\sigma = \frac{P}{A} = \text{stress}$$

$$\epsilon = \frac{\delta}{L}$$

کرنش قائم یا تغییر شکل طول واحد

$$\sigma = \frac{2P}{2A} = \frac{P}{A}$$

$$\epsilon = \frac{\delta}{L}$$

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

$$\epsilon = \frac{2\delta}{2L} = \frac{\delta}{L}$$

بنابراین اگر منحنی σ بر حسب ϵ رسم شود به ابعاد نمونه بستگی نخواهد داشت.

2 - 3/38

MECHANICS OF MATERIALS

Beer • Johnston • DeWolf

کرنش قائم در یک نقطه

- در یک عضو با مساحت **سطح مقطع متغیر** A ، تنش قائم $\sigma = P/A$ در امتداد عضو **تغییر** می کند و باید کرنش در نقطه معین Q را با در نظر گرفتن جزء کوچکی با طول اولیه Δx تعریف کنیم. اگر تغییر شکل جزء تحت بارگذاری داده شده $\Delta\delta$ باشد، داریم:

$$\epsilon = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta\delta}{\Delta x} = \frac{d\delta}{dx}$$

- کرنش قائم در نقطه Q

2 - 4/38

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

آزمایش تنش-کرنش

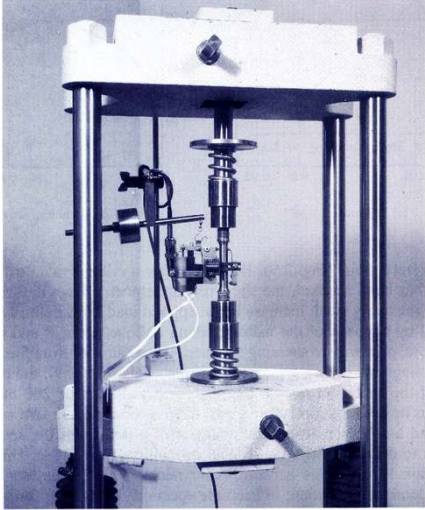


Fig. 2.7 This machine is used to test tensile test specimens, such as those shown in this chapter.

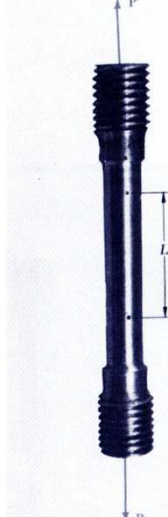


Fig. 2.8 Test specimen with tensile load.

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 2 - 5/38

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

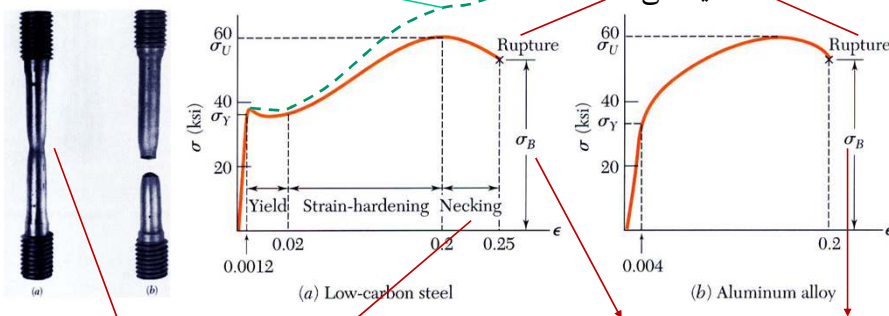
ترسیمه تنش-کرنش: مصالح چکش خوار (Ductile) مانند فولاد ساختمانی

تنش σ_Y که در آن تسلیم شروع می شود استقامت تسلیم ماده می گویند.

تنش σ_U متناظر با بار ماکزیمم را استقامت نهایی ماده می گویند.

منحنی واقعی (تنش از تقسیم نیرو به سطح مقطع لحظه ای به دست می آید)

گسیختگی



(a) Low-carbon steel

(b) Aluminum alloy

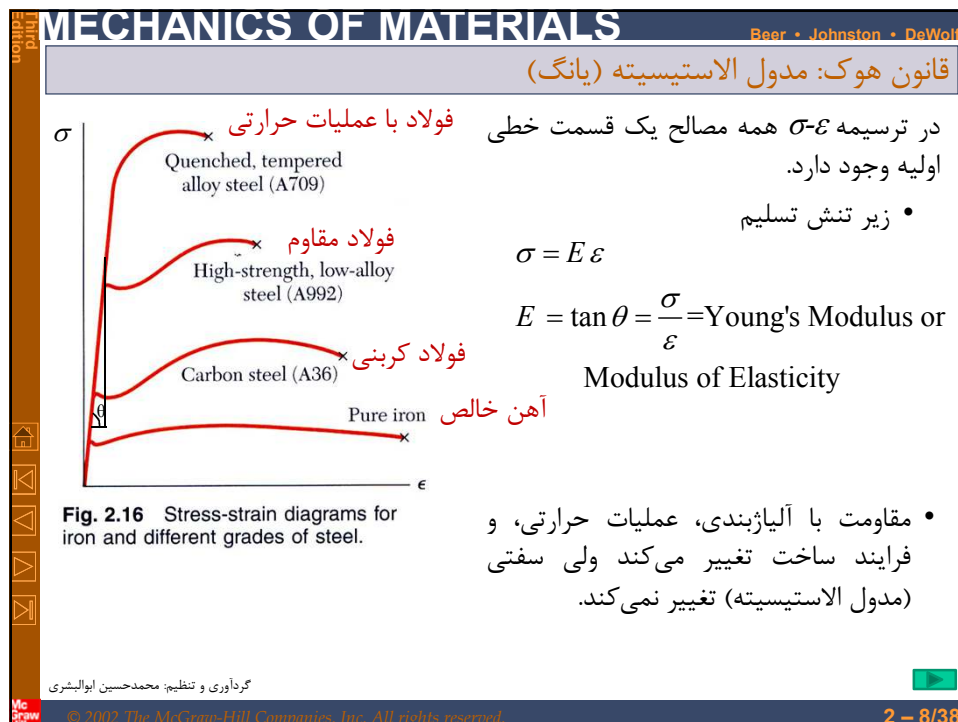
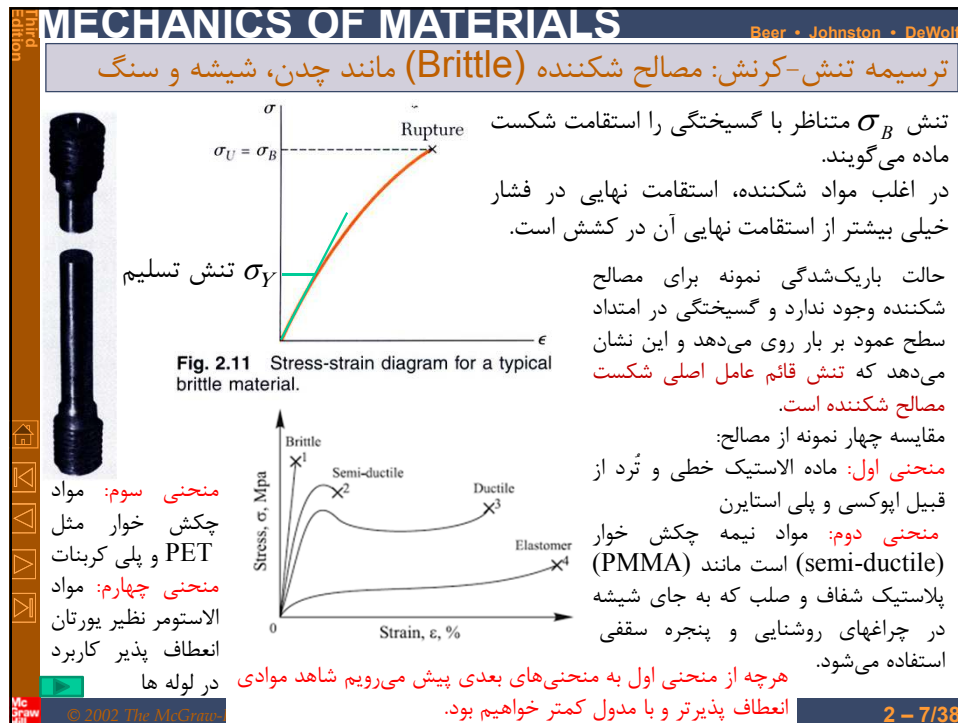
پدیده باریک شدگی

منحنی های مهندسی

گسیختگی در امتداد سطح مخروطی شکل روی می دهد که با سطح اولیه نمونه زاویه ۴۵ درجه می سازد و این نشان می دهد که برش عامل اصلی شکست مصالح چکش خوار است.

تنش شکست (Breaking stress)

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 2 - 6/38

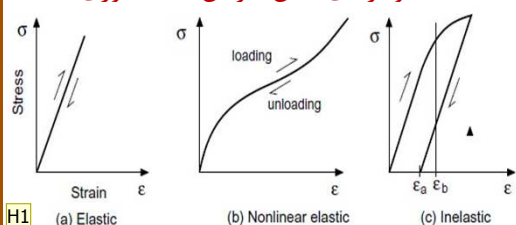


MECHANICS OF MATERIALS

Beer • Johnston • DeWolf

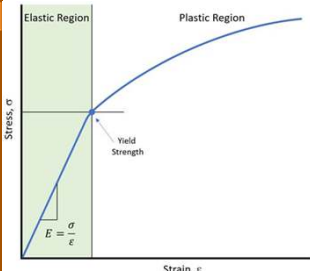
رفتار الاستیک در مقابل پلاستیک

نمودارهای تنش-کرنش تک محوری



(a) Elastic (b) Nonlinear elastic (c) Inelastic

الاستیک خطی الاستیک غیر خطی پلاستیک



Elastic Region Plastic Region

Yield Strength

$E = \frac{\sigma}{\epsilon}$

Strain, ϵ

Stress, σ

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

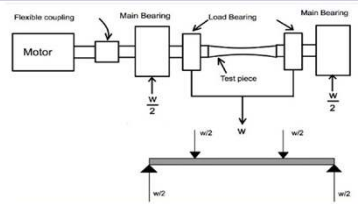
- اگر در مصالحی تنش برداشته شود، کرنش نیز از بین برود، رفتار مصالح را **الاستیک** می‌گویند.
- به بیشترین تنشی که رفتار هنوز الاستیک باقی می‌ماند **حد الاستیک** می‌گویند.
- ترسیمه σ - ϵ تا حد الاستیک برای بعضی از اجسام مانند اکثر فلزات **خطی** و برای بعضی دیگر مانند لاستیک‌ها ممکن است **غیر خطی** باشد.
- وقتی بعد از برداشتن تنش، کرنش صفر نشود، رفتار مصالح را **پلاستیک** می‌گویند.

2 – 9/38

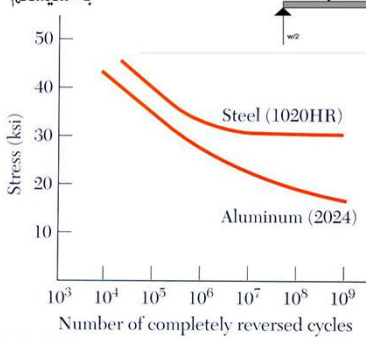
MECHANICS OF MATERIALS

Beer • Johnston • DeWolf

خستگی



تنش اعمال شده به سیستم



Stress (ksi)

Number of completely reversed cycles

Steel (1020HR)

Aluminum (2024)

Fig. 2.21

تعداد سیکلی که دوام می‌آورد

Rotational bending Fatigue Diagram

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

- خواص خستگی در ترسیمه S-N نشان داده می‌شوند.
- اگر عضوی تحت سیکل‌های بارگذاری زیادی قرار داشته باشد، در اثر خستگی، ممکن است در سطحی از تنش که به مراتب از مقاومت نهایی آن کمتر است، گسیخته شود (از کار بیفتد).
- **حد دوام (endurance)** : تنشی است که به ازای آن خستگی روی نمی‌دهد، حتی اگر تعداد سیکل‌های بارگذاری به طور نامعین زیاد باشد. حد دوام برای یک فولاد کم کربن، مانند فولاد ساختمانی، تقریباً **نصف استقامت نهایی** فولاد است.
- اگر تنش زیر **حد دوام (endurance)** باشد، تحت هر تعداد سیکل بارگذاری، گسیختگی در اثر خستگی اتفاق نمی‌افتد.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالشیری

2 – 10/38

H1

Engineering materials such as crystalline metals are classified as linear elastic solids whereas rubber-like materials are considered nonlinear elastic solids. The difference is the type of stress strain behavior as shown in Fig.3. These curves represent the stress-strain response to uniaxial loading. Figure 3(a) depicts the constant slope response associated with a linear isotropic Hookean material, a class to which most metals belong. Figure 3(b) depicts a behavior typical of rubber-like solids, in which stresses cannot be described as a linear function of strains. In both cases however, the curves during loading and unloading follow the same path; the stress is a unique function of the strain or deformation. Figure 3(c) depicts a third case where the stresses are not a single-valued function of the strains. Stresses during loading and unloading follow different paths. For a given strain, such as ϵ_b , there are two possible stress values depending on previous loading history. Also, note that upon unloading to zero stress, the material has acquired a permanent deformation ϵ_a . This is called inelastic behavior, and is typical of materials when the elastic limit is exceeded.

Hossein • ٢/١٠/٢٠١٨ :

Third Edition

MECHANICS OF MATERIALS

Beer • Johnston • DeWolf

تغییر شکل‌ها در اثر بارگذاری محوری

- از قانون هوک داریم:

$$\sigma = E \varepsilon \quad \varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{P}{AE}$$

- از تعریف کرنش قائم داریم:

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L}$$

- از روابط بالا تغییر شکل را به دست می‌آوریم:

$$\delta = \frac{PL}{AE}$$

این رابطه تغییر شکل برای یک طول مشخص که با بار محوری کشیده یا فشرده می‌شود و سطح مقطع ثابت و جنس مصالح نیز تغییر نکند معتبر است. در غیر این صورت در هر طولی که شرایط فوق برقرار بود رابطه معتبر است. تغییر شکل کل از مجموع تغییر شکل‌های قسمت‌های جزیی به دست می‌آید:

$$\delta = \sum_i \frac{P_i L_i}{A_i E_i}$$

- برای میله‌ای با مقطع عرضی A که تابعی از x باشد و یا P و E تابعی از x باشند، داریم:

$$d\delta = \varepsilon dx = \frac{P dx}{AE} \rightarrow \delta = \int_0^L \frac{P dx}{AE}$$

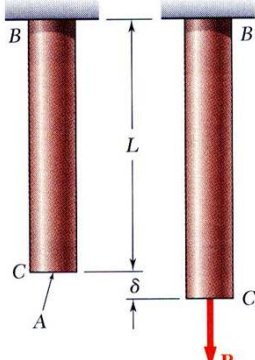


Fig. 2.22

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

2 – 11/38

Third Edition

MECHANICS OF MATERIALS

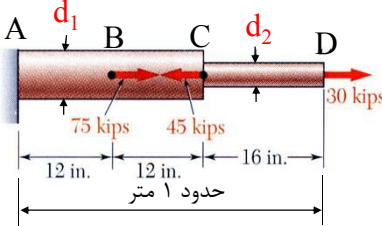
Beer • Johnston • DeWolf

مثال 2.01

تغییر شکل میله فولادی را تحت بارگذاری داده شده به دست آورید.

حل:

- میله را در نقاط اعمال نیرو به قسمت‌های مختلف تقسیم می‌کنیم.
- برای به دست آوردن نیروهای داخلی، ترسیمه آزاد هر عضو را تحلیل می‌کنیم.
- تغییر طول کل اعضا را محاسبه می‌کنیم.



$E = 29 \times 10^6 \text{ Psi}$

$d_1 = 1.07 \text{ in.} \quad d_2 = 0.618 \text{ in.}$

1 kips = 4.448 kN

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

2 – 12/38

MECHANICS OF MATERIALS

Beer • Johnston • DeWolf

حل:

- میله را به سه قطعه تقسیم می‌کنیم:
- برای به دست آوردن نیروهای داخلی، ترسیمه آزاد هر قطعه را تحلیل می‌کنیم.

$$P_1 = 60 \times 10^3 \text{ lb}$$

$$P_2 = -15 \times 10^3 \text{ lb}$$

$$P_3 = 30 \times 10^3 \text{ lb}$$

- تغییر مکان کل را محاسبه می‌کنیم:

$$\delta = \sum_i \frac{P_i L_i}{A_i E_i} = \frac{1}{E} \left(\frac{P_1 L_1}{A_1} + \frac{P_2 L_2}{A_2} + \frac{P_3 L_3}{A_3} \right)$$

$$= \frac{1}{29 \times 10^6} \left[\frac{(60 \times 10^3) 12}{0.9} + \frac{(-15 \times 10^3) 12}{0.9} + \frac{(30 \times 10^3) 16}{0.3} \right]$$

$$= 75.9 \times 10^{-3} \text{ in.}$$

$\delta = 75.9 \times 10^{-3} \text{ in} = 1.92 \text{ mm}$

- به علامت منفی نیروی فشاری عضو BC توجه کنید.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

2 - 13/38

MECHANICS OF MATERIALS

Beer • Johnston • DeWolf

مسئله نمونه 2.1

حل:

- ترسیمه آزاد BDE را تحلیل می‌کنیم تا نیروهایی را که از بازوهای AB و CD به آن وارد می‌شود به دست آوریم.
- تغییر شکل عضو AB و CD یا تغییر مکان B و D را به دست می‌آوریم.
- از راه هندسی با داشتن تغییر مکان B و D تغییر مکان نقطه E را به دست می‌آوریم.

میله صلب BDE با دو بازوی AB و CD نگهداشته می‌شود.

بازوی AB از آلومینیم ($E = 70 \text{ GPa}$) ساخته شده و مساحت سطح مقطع آن 500 mm^2 و بازوی CD از فولاد ($E = 200 \text{ GPa}$) و مساحت سطح مقطع آن 600 mm^2 است.

برای نیروی 30 kN نشان داده شده، تغییر مکان‌های B ، D ، و E را به دست آورید.

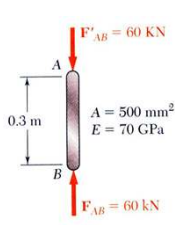
گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

2 - 14/38

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مسئله نمونه 2.1

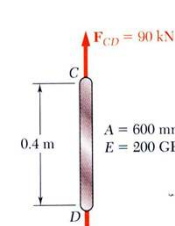
تغییر مکان B:



$$\delta_B = \frac{PL}{AE} = \frac{(-60 \times 10^3 \text{ N})(0.3 \text{ m})}{(500 \times 10^{-6} \text{ m}^2)(70 \times 10^9 \text{ Pa})} = -514 \times 10^{-6} \text{ m}$$

$\delta_B = 0.514 \text{ mm} \uparrow$

تغییر مکان D:

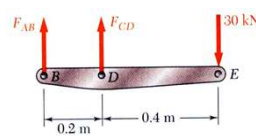


$$\delta_D = \frac{PL}{AE} = \frac{(90 \times 10^3 \text{ N})(0.4 \text{ m})}{(600 \times 10^{-6} \text{ m}^2)(200 \times 10^9 \text{ Pa})} = 300 \times 10^{-6} \text{ m}$$

$\delta_D = 0.300 \text{ mm} \downarrow$

حل:

ترسیمه آزاد: میله BDE



$\sum M_B = 0$

$$0 = -(30 \text{ kN} \times 0.6 \text{ m}) + F_{CD} \times 0.2 \text{ m}$$

$F_{CD} = +90 \text{ kN} \text{ tension}$

$\sum M_D = 0$

$$0 = -(30 \text{ kN} \times 0.4 \text{ m}) - F_{AB} \times 0.2 \text{ m}$$

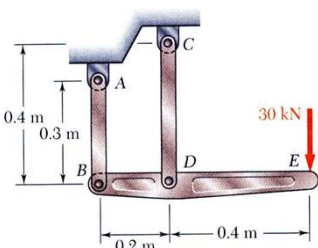
$F_{AB} = -60 \text{ kN} \text{ compression}$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالشیری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 2 - 15/38

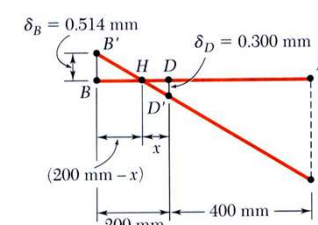
MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مسئله نمونه 2.1



$\delta_B = 0.514 \text{ mm}$

$\delta_D = 0.300 \text{ mm}$



تغییر مکان E: با توجه به صلب بودن میله BDE داریم:

$$\frac{BB'}{DD'} = \frac{BH}{HD}$$

$$\frac{0.514 \text{ mm}}{0.300 \text{ mm}} = \frac{(200 \text{ mm}) - x}{x}$$

$$x = 73.7 \text{ mm}$$

$$\frac{EE'}{DD'} = \frac{HE}{HD}$$

$$\frac{\delta_E}{0.300 \text{ mm}} = \frac{(400 + 73.7) \text{ mm}}{73.7 \text{ mm}}$$

$$\delta_E = 1.928 \text{ mm}$$

$\delta_E = 1.928 \text{ mm} \downarrow$

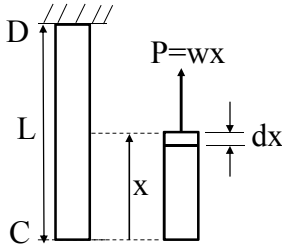
گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالشیری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 2 - 16/38

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

تغییر شکل یک میله تحت تأثیر وزن خودش

- مطلوب است تغییر مکان انتهای آزاد C یک میله CD تحت اثر وزن خودش؛ سطح مقطع ثابت و برابر A و وزن آن w [N/m] می باشد.



$$\delta = \int_C^D \frac{P_x dx}{AE} = \frac{1}{AE} \int_0^L wx dx = \frac{w}{AE} \frac{x^2}{2} \Big|_0^L = \frac{wL^2}{2AE}$$

- اگر وزن کل میله $W = wL$ باشد:

$$\delta = \frac{WL}{2AE}$$

- بنابراین در تغییر شکل، اثر وزن نصف اثر نیروی متمرکز معادل (که در انتهای میله اثر کند) است.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالشیری

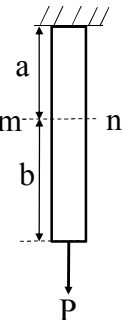
© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

2 - 17/38

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مثال:

- مطلوب است تغییر مکان مقطع mn میله نشان داده شده. سطح مقطع ثابت و برابر A، ضریب ارتجاعی E و وزن مخصوص آن γ می باشد.



- حل: در تغییر مکان مقطع mn وزن قسمت a، وزن قسمت b و نیروی محوری P مؤثرند.

$$\delta_{mn} = \frac{Pa}{AE} + \frac{\overbrace{\gamma A b}^{\text{weight of b}} a}{AE} + \frac{\overbrace{\gamma a A}^{\text{weight of a}} a}{2AE}$$

$$= \frac{(P + \gamma A b)a}{AE} + \frac{\gamma a^2}{2E}$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالشیری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

2 - 18/38

Third Edition

MECHANICS OF MATERIALS

Beer • Johnston • DeWolf

نامعینی ایستایی

گرذاوری و تنظیم: محمدحسین ابوالشیری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

- سازه‌هایی را که نیروهای داخلی و عکس‌العمل‌های آن‌ها نتواند به تنهایی از ایستایی به دست آید، از نظر ایستایی نامعین می‌گویند.
- سازه‌ای که بیشتر از تعداد لازم برای داشتن تعادل تکیه‌گاه داشته باشد، از نظر ایستایی نامعین است.
- نیروهای عکس‌العمل اضافی (زائد) (redundant) را با بارهای مجهول جایگزین می‌کنیم که با سایر نیروهای وارد به سازه، باید تغییر شکل‌های سازگاری بوجود بیاورند.
- تغییر شکل در اثر بارهای واقعی و عکس‌العمل‌های اضافی جداگانه به دست آورده می‌شوند و سپس با هم جمع یا ادغام (superposed) می‌شوند.

$$\delta = \delta_L + \delta_R = 0$$

McGraw Hill

2 – 19/38

Third Edition

MECHANICS OF MATERIALS

Beer • Johnston • DeWolf

مثال 2.04

گرذاوری و تنظیم: محمدحسین ابوالشیری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

عکس‌العمل‌ها در A و B در میله فولادی تحت بارگذاری‌های محوری نشان داده شده را به دست آورید. فرض کنید در هر دو تکیه‌گاه قبل از اعمال بار هیچگونه فاصله‌ای وجود نداشته است.

حل:

- عکس‌العمل در B را اضافی در نظر می‌گیریم و میله را از تکیه‌گاه جدا می‌کنیم و تغییر مکان B را در اثر بار وارده به دست می‌آوریم.
- تغییر مکان در B را در اثر عکس‌العمل اضافی در B محاسبه می‌کنیم.
- تغییر مکان‌ها در اثر بارها و عکس‌العمل‌های اضافی باید سازگار باشند؛ یعنی باید مجموع آنها صفر شود.
- عکس‌العمل A با توجه به بارهای اعمال شده و عکس‌العملی که در B به دست آوردیم محاسبه می‌شود.

McGraw Hill

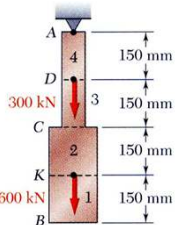
2 – 20/38

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مثال 2.04

حل:

- با آزاد سازی قید اضافی، تغییر مکان نقطه B را در اثر بارهای اعمال شده به دست می آوریم.



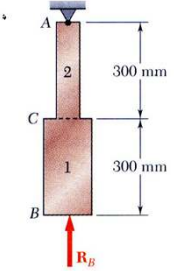
$$P_1 = 0 \quad P_2 = P_3 = 600 \times 10^3 \text{ N} \quad P_4 = 900 \times 10^3 \text{ N}$$

$$A_1 = A_2 = 400 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \quad A_3 = A_4 = 250 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

$$L_1 = L_2 = L_3 = L_4 = 0.150 \text{ m}$$

$$\delta_L = \sum_i \frac{P_i L_i}{A_i E_i} = \frac{0.15}{E} \left(\frac{600 \times 10^3}{400 \times 10^{-6}} + \frac{600 \times 10^3}{250 \times 10^{-6}} + \frac{900 \times 10^3}{250 \times 10^{-6}} \right) = \frac{1.125 \times 10^9}{E}$$

- تغییر مکان در نقطه B را در اثر قید اضافی به دست می آوریم.



$$P_1 = P_2 = -R_B$$

$$A_1 = 400 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \quad A_2 = 250 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

$$L_1 = L_2 = 0.300 \text{ m}$$

$$\delta_R = \sum_i \frac{P_i L_i}{A_i E_i} = \frac{P_1 L_1}{A_1 E_1} + \frac{P_2 L_2}{A_2 E_2}$$

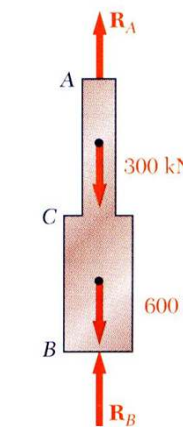
$$= -\frac{R_B (0.3)}{E \times 10^{-6}} \left(\frac{1}{400} + \frac{1}{250} \right) = -\frac{(1.95 \times 10^3) R_B}{E}$$

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 2 – 21/38

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مثال 2.04

- تغییر مکان در اثر بارگذاری و در اثر عکس العمل های اضافی باید سازگار باشند.



$$\delta = \delta_L + \delta_R = 0$$

$$\delta = \frac{1.125 \times 10^9}{E} - \frac{(1.95 \times 10^3) R_B}{E} = 0$$

$$R_B = 577 \times 10^3 \text{ N} = 577 \text{ kN}$$

- عکس العمل در A در اثر بارگذاری را به دست می آوریم.

$$\sum F_y = 0 = R_A - 300 \text{ kN} - 600 \text{ kN} + 577 \text{ kN}$$

$$R_A = 323 \text{ kN}$$

$R_A = 323 \text{ kN}$
 $R_B = 577 \text{ kN}$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 2 – 22/38

MECHANICS OF MATERIALS

Beer • Johnston • DeWolf

تنش‌های حرارتی

- تغییر درجه حرارت منجر به تغییر طول یا کرنش حرارتی می‌شود.

کرنش بدون تنش

$\delta_T = \alpha (\Delta T) L$

- α را ضریب انبساط حرارتی می‌گویند.
- کرنش حرارتی** باعث بوجود آمدن **تنش حرارتی** نمی‌شود مگر اینکه اضافه شدن طول به وسیله تکیه‌گاه مقید شده باشد.
- اینجا هم تکیه‌گاهی اضافی که باعث مقید شدن بیش از حد می‌گردد (و نقشی در تعادل ندارد) را در نظر بگیرید و اصل روی هم گذاری آثار را به کار ببندید.

$\delta_T = \alpha (\Delta T) L, \quad \delta_P = \frac{PL}{AE}$

- تغییر شکل حرارتی و تغییر شکل در اثر تکیه‌گاه اضافی (که آن را برداشته و به جای آن نیروی عکس‌العمل گذاشتیم) باید سازگار باشند.

$\delta = \delta_T + \delta_P = 0 \rightarrow \alpha (\Delta T) L + \frac{PL}{AE} = 0 \rightarrow$

$P = -AE\alpha (\Delta T)$

$\sigma = \frac{P}{A} = -E\alpha (\Delta T)$

2 - 23/38

MECHANICS OF MATERIALS

Beer • Johnston • DeWolf

نسبت پواسان

- برای یک میله باریک که تحت بارگذاری محوری است داریم:

$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad \sigma_y = \sigma_z = 0$

- مفهوم روابط این است که نیرویی در جهات دیگر وجود ندارد ولی تنش‌های بسیار کمی در جهات دیگر بوجود می‌آیند که بعداً خواهیم دید.
- کشیدگی در جهت x با انقباض یا کاهش طول در جهات دیگر همراه خواهد بود. اگر فرض کنیم که مصالح همسانگردند (Isotropic) (یعنی خواصشان به جهت وابسته نیست) داریم:

$\epsilon_y = \epsilon_z \neq 0$

- نسبت پواسان به شکل زیر تعریف می‌شود.

$\nu = \left| \frac{\text{کرنش جانبی}}{\text{کرنش محوری}} \right| = -\frac{\epsilon_y}{\epsilon_x} = -\frac{\epsilon_z}{\epsilon_x}$

که در اکثر مواد مهندسی (به جز اکستیک‌ها: کامپوزیت‌های لایه‌ای، فوم‌های پلیمری و فلزی) عددی مثبت است.

اگر بارگذاری در جهت y یا z باشد داریم:

$\nu = -\frac{\epsilon_x}{\epsilon_y} = -\frac{\epsilon_z}{\epsilon_y} \quad \nu = -\frac{\epsilon_x}{\epsilon_z} = -\frac{\epsilon_y}{\epsilon_z}$

2 - 24/38

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

قانون هوک عمومیت یافته (برای حالت سه بعدی)

- برای یک المان که تحت بارگذاری چند محوره است، مؤلفه‌های کرنش قائم که در اثر مؤلفه‌های تنش بوجود می‌آیند را می‌توان از اصل روی هم گذاری آثار به دست آورد. این اصل با فرضیات زیر همراه است:

(۱) رابطه تنش-کرنش خطی است

(۲) تغییر شکل‌ها کوچکند

- با این محدودیت‌ها داریم:

$$\epsilon_x = +\frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E}$$

$$\epsilon_y = -\frac{\nu \sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu \sigma_z}{E}$$

$$\epsilon_z = -\frac{\nu \sigma_x}{E} - \frac{\nu \sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E}$$

از این روابط مشخص است که هرگاه فقط تنش σ_x داشته باشیم، تنشی به اندازه $\sigma'_y = E \epsilon_y = -E \nu \epsilon_x = -\nu \sigma_x$ و $\sigma'_z = E \epsilon_z = -\nu \sigma_x$ به ترتیب در جهت y و z خواهیم داشت که وقتی به عنوان مثال در رابطه اول قرار بگیرند ضریب ν^2 خواهند داشت و بسیار کوچکند و از آن‌ها صرف‌نظر می‌شود.

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 2 - 25/38

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

روابط تنش-کرنش سه بعدی

$$\epsilon_x = +\frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu \sigma_y}{E} - \frac{\nu \sigma_z}{E}$$

$$\epsilon_y = -\frac{\nu \sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu \sigma_z}{E}$$

$$\epsilon_z = -\frac{\nu \sigma_x}{E} - \frac{\nu \sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E}$$

روابط معکوس یعنی تنش‌ها بر حسب کرنش‌ها عبارت است از:

$$\sigma_x = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\epsilon_x + \nu(\epsilon_y + \epsilon_z)]$$

$$\sigma_y = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\epsilon_y + \nu(\epsilon_x + \epsilon_z)]$$

$$\sigma_z = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\epsilon_z + \nu(\epsilon_x + \epsilon_y)]$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالشیری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 2 - 26/38

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

تنش صفحه‌ای مسطح (Plane Stress)

مسئله تنش مسطح، یک مسئله خاص تئوری ارتجاعی با طبیعت دو بعدی می‌باشد که می‌تواند به عنوان مثال در سه نوع رفتار سازه‌ای خاص پیش آید:

- * رفتار یک صفحه تحت اثر نیروهای درون صفحه‌ای (In-plane Forces).
- * تیر تحت اثر کنش‌های درون صفحه‌ای، دیوارهای برشی.

(b) Plane stress conditions: membrane and beam under in-plane actions

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 2 - 27/38

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

تنش صفحه‌ای (ادامه)

Plane stress: $\sigma_x \neq 0, \sigma_y \neq 0, \sigma_z = 0$

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= +\frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu \sigma_y}{E} - \frac{\nu \sigma_z}{E} \\ \epsilon_y &= -\frac{\nu \sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu \sigma_z}{E} \\ \epsilon_z &= -\frac{\nu \sigma_x}{E} - \frac{\nu \sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E} \end{aligned} \quad \xrightarrow{\sigma_z=0}$$

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= +\frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu \sigma_y}{E} \quad * \\ \epsilon_y &= -\frac{\nu \sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} \quad ** \\ \epsilon_z &= -\frac{\nu \sigma_x}{E} - \frac{\nu \sigma_y}{E} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{(1-\nu^2)} (\epsilon_x + \nu \epsilon_y) \\ \sigma_y &= \frac{E}{(1-\nu^2)} (\epsilon_y + \nu \epsilon_x) \end{aligned}$$

روابط معکوس یعنی تنش‌ها بر حسب کرنش‌ها عبارت است از:
رابطه دوم را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} * \quad \nu \epsilon_x = \frac{\nu \sigma_x}{E} - \frac{\nu^2 \sigma_y}{E} \\ ** \quad \epsilon_y = -\frac{\nu \sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} \end{cases} \rightarrow \epsilon_y + \nu \epsilon_x = \frac{\sigma_y}{E} (1-\nu^2) \rightarrow \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_y + \nu \epsilon_x)$$

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 2 - 28/38

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مسائل تئوری ارتجاعی دو بعدی: کرنش صفحه‌ای (مسطح) (Plane Strain)

مسئله کرنش مسطح، یک مسئله خاص تئوری ارتجاعی با طبیعت دو بعدی می‌باشد که می‌تواند به عنوان مثال در دو نوع رفتار سازه‌ای خاص پیش آید:

رفتار یک جسم استوانه‌ای شکل طویل که محور مولد آن موازی محور X_3 (یا Z) در نظر گرفته می‌شود. سیستم بار توزیعی بر روی این استوانه به گونه‌ای است که مؤلفه سوم بردار جابجایی حذف و در عین حال دو مؤلفه دیگر جابجایی در راستای X_3 ثابت بوده یعنی مستقل از X_3 می‌باشند.

رفتار یک سد طویل، نمونه دیگری از مسئله کرنش مسطح می‌باشد.

(c) Plane strain condition: long dam subjected to water pressure

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 2 – 29/38

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

کرنش صفحه‌ای (مسطح) (Plane Strain) (ادامه)

$\epsilon_x \neq 0, \epsilon_y \neq 0, \epsilon_z = 0$

$$\sigma_x = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}[(1-\nu)\epsilon_x + \nu(\epsilon_y + \epsilon_z)]$$

$$\sigma_y = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}[(1-\nu)\epsilon_y + \nu(\epsilon_x + \epsilon_z)]$$

$$\sigma_z = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}[(1-\nu)\epsilon_z + \nu(\epsilon_x + \epsilon_y)]$$

$$\epsilon_x = \frac{1+\nu}{E}[(1-\nu)\sigma_x - \nu\sigma_y]$$

$$\epsilon_y = \frac{1+\nu}{E}[(1-\nu)\sigma_y - \nu\sigma_x]$$

روابط معکوس یعنی کرنش‌ها بر حسب تنش‌ها عبارت است از:

معادله اول را به دست می‌آوریم:

$$\epsilon_z = -\frac{\nu\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E} = 0 \rightarrow \sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$$

$$\epsilon_x = -\frac{\nu\sigma_z}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_x}{E} = -\frac{\nu[\nu(\sigma_x + \sigma_y)]}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_x}{E}$$

$$= \frac{1}{E}[(-\nu - \nu^2)\sigma_y + (-\nu^2 + 1)\sigma_x] = \frac{1+\nu}{E}[-\nu\sigma_y + (1-\nu)\sigma_x]$$

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 2 – 30/38

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

اتساع (انبساط) Dilatation و مدول حجمی (کپهای) (Bulk)

- مکعبی به اضلاع واحد در نظر بگیرید. نسبت به حالت بدون تنش، تغییر حجم عبارت است از:

$$\Delta V = [(1 + \epsilon_x)(1 + \epsilon_y)(1 + \epsilon_z)] - 1$$

- اگر از حاصل ضرب کرنش‌ها که خیلی کوچکند صرف‌نظر کنیم داریم:

$$\cong [1 + \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z] - 1$$

$$= \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E} + \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_x}{E}$$

$$= \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

- از آنجا که حجم اولیه ۱ است، **اتساع** را به شکل زیر یعنی تغییر حجم بر واحد حجم تعریف می‌کنیم.

$$e = \frac{\Delta V}{V} = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \text{ or } e = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$$

- برای یک المان که تحت فشار هیدرواستاتیکی یکنواخت است داریم:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p$$

$$e = \frac{(1-2\nu)}{E}(-3p) = -\frac{p}{k}$$

اتساع

$$k = \frac{E}{3(1-2\nu)} = \text{bulk modulus} \quad \text{مدول حجمی یا مدول تراکم}$$

- اگر فشار یکنواخت باشد، اتساع باید منفی باشد، بنابراین ν که طبق تعریف عددی مثبت است باید از ۰.۵ نیز کمتر باشد: (برای مصالح ناهمسانگرد بیشتر از ۰.۵ گزارش شده)

$0 < \nu < \frac{1}{2}$

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 2 - 31/38

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

کرنش برشی

- یک المان مکعبی که تحت تنش برشی است به شکل متوازی‌السطوح در می‌آید. کرنش برشی مربوط بر حسب تغییر زاویه بین وجوه مشخص می‌شود:

$$\tau_{xy} = f(\gamma_{xy})$$

- نمودار تنش برشی بر حسب کرنش برشی شبیه نمودار تنش قائم بر حسب کرنش قائم است با این تفاوت که مقادیر مقاومت تقریباً نصف شده‌اند. برای کرنش‌های کوچک:

قانون هوک برای تنش و کرنش برشی $\tau_{xy} = G \gamma_{xy}$, $\tau_{yz} = G \gamma_{yz}$, $\tau_{zx} = G \gamma_{zx}$

که G **مدول صلیبیت یا مدول برشی** است.

از رابطه بین E , G , و ν که بعداً می‌گوییم داریم:

$$2G \leq E \leq 3G$$

Fig. 2.46

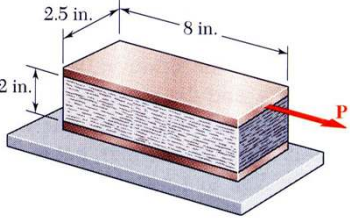
Fig. 2.47

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 2 - 32/38

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مثال 2.10



حل:

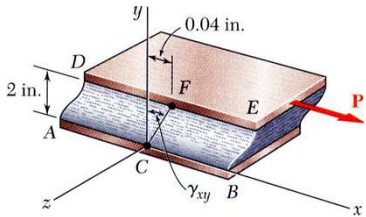
- تغییر شکل زاویه‌ای متوسط یا کرنش برشی بلوک را به دست آورید.
- قانون هوک را برای تنش برشی و کرنش به کار می‌بریم تا تنش برشی مربوطه را به دست آوریم.
- برای به دست آوردن نیروی P از تعریف تنش برشی استفاده می‌کنیم.

یک بلوک مکعب مستطیلی از مصالحی با $G = 90 \text{ ksi}$ ساخته شده و با دو صفحه صلب افقی در دو طرف بسته شده است. صفحه پایینی ثابت و صفحه بالایی با یک نیروی افقی P کشیده می‌شود. اگر صفحه بالایی تحت این نیرو 0.04 in حرکت کند، الف) کرنش برشی متوسط در مصالح، و ب) نیروی P که به صفحه وارد شده را به دست آورید.

$\text{ksi} = \frac{\text{kilopounds}}{\text{in}^2}$ or kilopounds per square inch

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 2 – 33/38

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf



- تغییر شکل زاویه‌ای میانگین یا کرنش برشی بلوک را به دست می‌آوریم.
- قانون هوک را برای تنش برشی و کرنش به کار می‌بریم تا تنش برشی مربوطه را به دست آوریم.
- برای به دست آوردن نیروی P از تعریف تنش برشی استفاده می‌کنیم.

$$\gamma_{xy} \approx \tan \gamma_{xy} = \frac{0.04 \text{ in.}}{2 \text{ in.}} \quad \gamma_{xy} = 0.020 \text{ rad}$$

$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy} = (90 \times 10^3 \text{ Psi})(0.020 \text{ rad}) = 1800 \text{ Psi}$$

$$P = \tau_{xy} A = (1800 \text{ Psi})(8 \text{ in.})(2.5 \text{ in.}) = 36 \times 10^3 \text{ lb}$$

$P = 36.0 \text{ kips}$

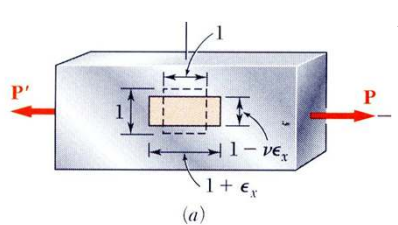
kips = kilopounds

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالشیری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 2 – 34/38

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

رابطه میان E ، G و ν



(a)

- یک میله باریک که تحت بارگذاری محوری است، در جهت محور کشیده شده و در جهات عرضی منقبض می‌شود.
- یک المان مکعبی نیز در آن شرایط مکعب مستطیل می‌شود. نیروی محوری باعث بوجود آمدن کرنش قائم می‌شود.
- اگر یک المان مکعبی در راستای ۴۵° نسبت به محور مانند شکل مقابل بارگذاری شود، به شکل متوازی‌السطوح در می‌آید. پس نیروی محوری باعث کرنش برشی نیز می‌شود.
- بنابراین مؤلفه‌های کرنش‌های قائم و برشی به هم مربوط می‌شوند. از این ارتباط می‌توان اثبات کرد که رابطه زیر برقرار است (اثبات در مقاومت ۲).

$$\frac{E}{2G} = (1 + \nu)$$

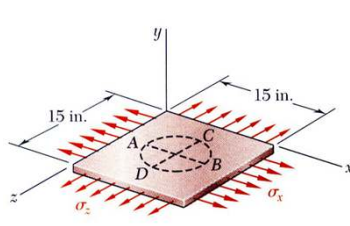
گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالشیری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

2 - 35/38

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مسئله نمونه 2.5



دایره‌ای به قطر $d = 9$ in روی صفحه‌ای آلومینیومی بدون تنش به ضخامت $t = 3/4$ in نشان داده شده است. نیروی داخل صفحه باعث تنش‌های قائم $\sigma_x = 12$ ksi و $\sigma_z = 20$ ksi می‌شود.

برای $E = 10 \times 10^6$ Psi و $\nu = 1/3$ ، تغییرات زیر را به دست آورید.

- طول قطر AB
- طول قطر CD
- ضخامت صفحه، و
- حجم صفحه

(از داده‌های مسئله متوجه می‌شویم که مسئله تنش صفحه‌ای است زیرا: $\sigma_x \neq 0$ و $\sigma_z \neq 0$ و $\sigma_y = 0$)

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالشیری

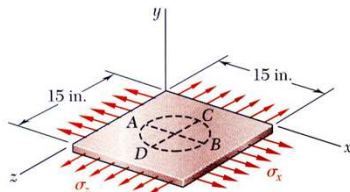
© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

2 - 36/38

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

حل:

- برای به دست آوردن مؤلفه‌های کرنش قائم، قانون عمومیت یافته هوک (سه بعدی) را به کار می‌بریم (هر چند که مسئله تنش صفحه‌ای یعنی دو بعدی است).



$$\delta_{C/D} = \varepsilon_z d = (+1.600 \times 10^{-3} \text{ in/in})(9 \text{ in})$$

$$\delta_{C/D} = +14.4 \times 10^{-3} \text{ in}$$

$$\delta_t = \varepsilon_y t = (-1.067 \times 10^{-3} \text{ in/in})(0.75 \text{ in})$$

$$\delta_t = -0.800 \times 10^{-3} \text{ in}$$

- تغییرات حجم را به دست می‌آوریم.

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 1.067 \times 10^{-3} \text{ in/in}$$

$$\Delta V = eV = 1.067 \times 10^{-3} (15 \times 15 \times 0.75) \text{ in}^3$$

$$\Delta V = +0.178 \text{ in}^3$$

$$\delta_{B/A} = \varepsilon_x d = (+0.533 \times 10^{-3} \text{ in/in})(9 \text{ in})$$

$$\delta_{B/A} = +4.8 \times 10^{-3} \text{ in}$$

- مؤلفه‌های تغییر شکل را محاسبه می‌کنیم.

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 2 - 37/38

