

میدان‌های سرعت (Velocity fields) (Ch. 6 of the Fung's 2nd book)

6.1 میدان‌های سرعت

ما برای مطالعه جریان سیال باید از میدان سرعت یعنی سرعت هر ذره از سیال اطلاع داشته باشیم.

موقعیت هر ذره سیال با استفاده از مختصات $O-xyz$ بیان می‌شود؛ آنگاه میدان جریان با میدان بردار سرعت $\vec{V}(x, y, z)$ تشریح می‌شود که سرعت در هر نقطه (x, y, z) است.

میدان سرعت بر حسب مؤلفه‌هایش عبارت است از:

$$\vec{u}(x, y, z), \quad \vec{v}(x, y, z), \quad \vec{w}(x, y, z)$$



یا با استفاده از نماد اندیسی به شکل $v_i(x_1, x_2, x_3)$ نمایش داده می‌شود.

© M.H. Abolbashari, Ferdowsi University of Mashhad

برای یک جریان پیوسته، توابع $v_i(x_1, x_2, x_3)$ را پیوسته و مشتق‌پذیر در نظر می‌گیریم.

در بعضی مواقع باید رابطه بین سرعت‌ها در نقاط همسایه را بدانیم.

اگر ذرات P و P' به طور لحظه‌ای به ترتیب در نقاط x_i و $x_i + dx_i$ باشند، تفاوت بین سرعت‌ها در این دو نقطه عبارت است از:

$$dv_i = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx_j \quad \text{مانند (4.4-5)} \quad du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j \quad (6.1-1)$$

در حالی که مشتقات جزئی $\partial v_i / \partial x_j$ در محل ذره P ارزیابی می‌شوند. اکنون

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \quad (6.1-2)$$

اگر تانسور نرخ تغییر شکل (rate-of-deformation) یا تانسور نرخ کرنش (strain rate) را به شکل

$$e_{ij} \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad \text{مانند (4.2-6)} \quad V_{ij} \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (6.1-3)$$

و تانسور چرخش (spin) را به شکل زیر تعریف کنیم: Omega (uppercase Ω , lowercase ω)

$$\omega_{ij} \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad \text{مانند (4.4-1)} \quad \Omega_{ij} \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \quad (6.1-4)$$



آنگاه

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = V_{ij} - \Omega_{ij} \quad (6.1-5)$$

واضح است که V_{ij} متقارن و Ω_{ij} پادمتقارن (antisymmetric) است؛ یعنی:

$$V_{ij} = V_{ji}, \quad \Omega_{ij} = -\Omega_{ji} \quad (6.1-6)$$

بنابراین، تانسور Ω_{ij} تنها سه مؤلفه‌ی مستقل دارد و یک بردار $\vec{\Omega}$ وجود دارد که دوگان (dual) Ω_{ij} است.

بردار گردابه (vorticity)

$$\Omega_k \equiv \frac{1}{2} e_{kij} \Omega_{ij} \quad \text{i.e.,} \quad \vec{\Omega} \equiv \frac{1}{2} \text{curl } \vec{V}^* \quad (6.1-7)$$

مانند (4.4-3) $\omega_k = \frac{1}{2} e_{kij} \omega_{ij}$

پرموتیشن سیمبل (permutation symbol) *

* لطفاً در کتاب تصحیح نمایید.

3/27

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

شبهات تحلیل و تفسیر هندسی v_i و u_i			
v_i		$u_i = v_i dt$	
تانسور نرخ تغییرشکل / کرنش (Rate of deformation/strain rate tensor)	$V_{ij} \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$	$e_{ij} \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$	تانسور کرنش کوچک (Infinitesimal strain tensor)
تانسور چرخش (Spin tensor)	$\Omega_{ij} \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)$	$\omega_{ij} \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)$	تانسور چرخش (Rotation tensor)
بردار گردابه (Vorticity vector)	$\Omega_k = \frac{1}{2} e_{kij} \Omega_{ij}$	$\omega_k = \frac{1}{2} e_{kij} \omega_{ij}$	بردار چرخش (Rotation vector)

بنابراین با جایگزینی کلمه سرعت به جای تغییر مکان، هر چه راجع به میدان کرنش کوچک مطرح شد می‌تواند به تناسب به نرخ تغییر شکل / کرنش هم تعمیم داده شود.

4/27

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

4.6- سازگاری مؤلفه‌های کرنش
Compatibility of Strain Components
(Ch. 6 of the Fung's 2nd book)

می‌دانیم دستگاه معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی تحت شرایطی قابل حل‌اند. این شرایط را شرایط انتگرال‌پذیری یا **سازگاری** می‌گویند.

شرایط سازگاری

فرض کنید دو معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی داریم و یک تابع مجهول $u(x,y)$ مانند:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = x + 3y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^2 \quad (6.2-1)$$

می‌دانیم که این معادلات قابل حل نیستند. معادلات بیش از اندازه و در نهایت **ناهماهنگ‌اند**. این **ناهماهنگی** می‌تواند با محاسبه مشتقات دوم دو معادله آشکار شود.

آن‌ها برابر نیستند!

$$\partial^2 u / \partial x \partial y = 3, \quad \partial^2 u / \partial x \partial y = 2x$$

بنابراین، هنگامی که معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی داده می‌شوند، سؤال انتگرال‌پذیری مطرح می‌شود. معادلات دیفرانسیل

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = g(x, y) \quad (6.2-2)$$

5/27

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

نمی‌توانند انتگرال گرفته شوند مگر اینکه:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x} \quad (6.2-3)$$

برآورده شود.

این شرط، شرط انتگرال‌پذیری، را **معادله سازگاری** نیز می‌نامند.

اکنون یک حالت **کرنش صفحه‌ای** در نظر می‌گیریم. فرض کنید یک مهندس یک مدل آزمایشگاهی ساخته و با وسایل مختلفی مانند کرنش سنج‌ها (**strain gauges**)، تجهیزات فتوالاستیک، هولوگرافی لیزری (**laser holography**) که با تحلیل شبکه مویر (**Moire**) ترکیب شده و غیره، مجموعه‌ای از داده‌های کرنش به دست آورده است مانند:

$$e_{xx} = f(x,y), \quad e_{yy} = g(x,y), \quad e_{xy} = h(x,y), \quad e_{zz} = e_{zx} = e_{zy} = 0 \quad (6.2-4)$$

اکنون این سؤال مطرح می‌شود که آیا این داده‌ها هماهنگ‌اند؟

آیا هماهنگی را می‌توان بررسی کرد؟

و اگر هماهنگ‌اند، آیا تغییر مکان‌های $u(x,y)$ و $v(x,y)$ را از این می‌توان داده‌ها به دست آورد؟

6/27

اگر کرنش کوچک باشد، سؤال آخر می‌تواند به شکل یک سؤال ریاضی انتگرال‌پذیری معادلات دیفرانسیل زیر رابطه سازی شود.

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= f(x, y), & (=e_{xx}) \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= g(x, y), & (=e_{yy}) \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= 2h(x, y), & (=2e_{xy})\end{aligned}\quad (6.2-5)$$

اکنون، اگر از معادله اول دو بار نسبت به y و از معادله دوم دو بار نسبت به x مشتق بگیریم، داریم:

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \quad (6.2-6)$$

اگر از معادله سوم نیز یک بار نسبت به x و یک بار نسبت به y مشتق بگیریم، داریم:

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} = 2 \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} \quad (6.2-7)$$



گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

7/27

با جایگذاری معادلات (6.2-6) در معادله (6.2-7) داریم:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} \quad (6.2-8)$$

داده‌های تجربی باید این معادله را برآورده سازند. اگر برآورده نسازند، داده‌ها هماهنگ نیستند و باید در برداشت داده‌ها خطایی وجود داشته باشد. با نوشتن نتایج قبلی بر حسب مؤلفه‌های کرنش، داریم:

$$\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (6.2-9)$$

که معادله سازگاری برای حالت کرنش صفحه‌ای و با فرض کرنش‌های کوچک است.



گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

8/27

4.6- سازگاری مؤلفه‌های کرنش (Compatibility of Strain Components)

به طور طبیعی این سؤال مطرح است که: “چگونه می‌توان تغییرمکان u_i را از مؤلفه‌های تانسور کرنش به دست آورد؟”
به عبارت دیگر، چگونه می‌توان از معادلات دیفرانسیل زیر (در سیستم مختصات کارتزین متعامد)

$$(1) \quad e_{ji} = e_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_j} \right], \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

انتگرال گرفت تا سه مجهول u_1, u_2, u_3 به دست آیند.

از آنجا که شش معادله و سه تابع مجهول u_i داریم؛ اگر توابع e_{ij} اختیاری باشند، دستگاه معادلات (1) در حالت کلی یک جواب تک مقداری ندارند.
در صورتی یک جواب وجود خواهد داشت که توابع e_{ij} شرایط خاصی را برآورده نمایند.



گرددآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

9/27

تفسیر هندسی چرایی الزام معادله سازگاری

از آنجا که مؤلفه‌های کرنش تنها موقعیت‌های نسبی نقاط جسم را به دست می‌دهند، و چون در حرکت جسم صلب کرنش صفر است، انتظار داریم که جواب u_i بتواند تا حرکت دلخواه جسم صلب را بدهد. اما اگر e_{ij} ها هیچ شرطی نداشته باشند، ممکن است در تغییر شکل چیزی شبیه به شکل 4.6:1 را نشان دهد که غیر ممکن است.

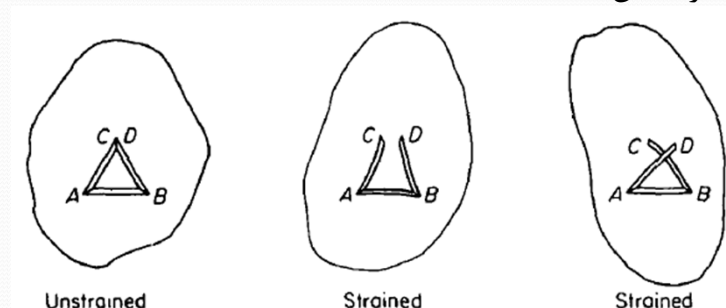


Fig. 4.6:1. Illustrations for the requirement of compatibility.

گرددآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

10/27

شرایط انتگرال پذیری معادلات (1) **شرایط سازگاری** نامیده می شوند. آن ها شرایطی هستند که باید توسط مؤلفه های کرنش e_{ij} برآورده شوند و می توانند با حذف u_i از معادلات (1) به دست آیند. معادلات دیفرانسیل غیرخطی (1) برای استفاده بسیار مشکل هستند، بنابراین ابتدا حالت **کرنش های خطی کوچک** را در نظر می گیریم.

$$(2) \quad e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right), \text{ i.e., } e_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})$$

با مشتق گیری از معادله (2) داریم:

$$e_{ij,kl} = \frac{1}{2} (\underline{u_{i,jkl}} + \underline{u_{j,ikl}})$$

با تغییر اندیس ها داریم:

$$e_{kl,ij} = \frac{1}{2} (\underline{u_{k,lij}} + u_{l,kij})$$

$$e_{jl,ik} = \frac{1}{2} (\underline{u_{j,lik}} + u_{l,jik})$$

$$e_{ik,jl} = \frac{1}{2} (\underline{u_{i,kjl}} + \underline{u_{k,ijl}})$$

$$= 0$$

از این معادلات داریم:

11/27

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

$$(3) \quad e_{ij,kl} + e_{kl,ij} - e_{ik,jl} - e_{jl,ik} = 0$$

این معادلات در سال 1860 توسط سنت ونان (St. Venant) به دست آمد و آن ها را معادلات سازگاری سنت ونان می نامند.

از ۸۱ معادله ای که در رابطه (3) وجود دارد تنها شش معادله ضروری اند. بقیه با توجه به تقارن e_{ij} و e_{kl} یا با یکدیگر برابرند یا تکراری. آن شش معادله به شکل گسترش یافته عبارتند از:

$$(4) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial e_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial e_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial e_{xy}}{\partial z} \right), & 2 \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial e_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial e_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial e_{yz}}{\partial x} \right), & 2 \frac{\partial^2 e_{yz}}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial e_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial e_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial e_{zx}}{\partial y} \right), & 2 \frac{\partial^2 e_{zx}}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial z^2} \end{aligned}$$

این شرایط از **کرنش های کوچک** به دست آمده اند و مربوط به **سیستم مختصات کارتزین متعامدند**.

12/27

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

اگر **مختصات منحنی الخط عمومی** استفاده شود، کرنش کوچک به شکل زیر تعریف می شود.

$$(5) \quad e_{ij} = \frac{1}{2}(u_i|_j + u_j|_i)$$

آنگاه شرایط سازگاری به شکل زیر خواهد بود: $(e_{ij,kl} + e_{kl,ij} - e_{ik,jl} - e_{jl,ik} = 0)$

$$(6) \quad e_{ij}|_{kl} + e_{kl}|_{ij} - e_{ik}|_{jl} - e_{jl}|_{ik} = 0$$

اما اگر کرنش محدود (**finite**) باشد، که e_{ij} در سیستم مختصات کارتزین متعامد از رابطه (1) و در سیستم مختصات عمومی از

$$(7) \quad e_{ij} = \frac{1}{2} \left[u_i|_j + u_j|_i - u_\alpha|_i u^\alpha|_j \right]$$

به دست می آید، برای به دست آوردن شرایط سازگاری لازم است که از روش دیگری استفاده شود (مسائل 2.31 و 4.9 را ببینید).

این روش به طور مشروح در کتاب زیر آمده است:

Green and Zerna, Theoretical Elasticity, 1968, Oxford University Press, p. 62.



گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

13/27

4.9- خواص تانسور کرنش

تانسور متقارن کرنش e_{ij} خواص مشترک زیادی با تانسور تنش دارد. بنابراین، وجود کرنش‌های اصلی حقیقی و صفحات اصلی، دایره مور کرنش، کرنش هشت وجهی، کرنش انحرافی و نامتغیرهای کرنش نیاز به بحث بیشتری ندارند. اولین نامتغیر کرنش

(1) $e = e_{11} + e_{22} + e_{33}$ مجموع کرنش‌های اصلی
برای حالت کرنش‌های کوچک یک معنی هندسی ساده دارد.

یک المان حجم مکعب مستطیل در نظر بگیرید که وجوه آن موازی صفحات اصلی کرنش است. طول اضلاع در حالت بدون کرنش عبارت است از l_1, l_2, l_3 .

کرنش‌های اصلی عبارتند از e_{11}, e_{22}, e_{33} .
در حالت کرنش یافته، اضلاع بر هم عمود می‌مانند و طول آن‌ها برابر است با $l_1(1+e_{11}), l_2(1+e_{22}), l_3(1+e_{33})$

بنابراین، برای کرنش‌های کوچک تغییر حجم عبارت است از:



گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

14/27

$$\Delta V = l_1 l_2 l_3 (1 + e_{11})(1 + e_{22})(1 + e_{33}) - l_1 l_2 l_3$$

$$\cong l_1 l_2 l_3 (e_{11} + e_{22} + e_{33})$$

(از آنجا که فرض کردیم کرنش‌ها کوچک‌اند، از حاصل ضرب کرنش‌ها صرف‌نظر می‌کنیم).
بنابراین،

$$(2) \quad e = e_{ii} = \Delta V / V$$

این رابطه نشان می‌دهد که: برای حالت کرنش‌های کوچک، نامتغیر اول کرنش به معنی افزایش حجم به واحد حجم است. به این دلیل، e را اتساع (*dilation*) می‌نامند.

(*Dilate*: to expand or cause to expand;

Dilation versus Dilatation: *Dilation* describes the passive enlargements whereas *dilatation* describes active enlargements. *Dilation* is the act of dilating or stretching out. *Dilatation* refers to a region of dilation, surgical enlargement of a region or an area of abnormal enlargement.)

اگر حالت کرنش دو بعدی (کرنش صفحه‌ای) در نظر بگیریم، $u_3=0$ (و یا $w=0$) است. نامتغیر اول کرنش برابر با $e_{11}+e_{22}$ است که نشان دهنده تغییر مساحت به واحد سطح صفحه تحت کرنش است.

برای **کرنش محدود**، مجموع کرنش‌های اصلی چنین تفسیر ساده‌ای ندارند.



15/27

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

مسائل زیر را حل کرده و تا دو هفته دیگر تحویل فرمایید:

6) 2,3,4,6

مسائل از کتاب دوم Fung که از سایت آموزش مجازی قابل دسترسی است.

تمرین‌های قبلی:

2) 1,2,5,6,10, and A_1-A_{12} , 2) 12-23, 25-32

3) 8,11,13,14, 3) 1,2,3, 4) 2,16,17,19 3) 6,7,8 3)

9 5) 3,12,13,14,15,17

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

16/27

4.10- مؤلفه‌های فیزیکی

تانسور کرنش e_{ij} که در طبیعی‌ترین حالت تعریفش کوارینت است در نظر بگیرید. اگر ds طول المان و $ds_0(d\theta^1, d\theta^2, d\theta^3)$ طول المان قبل از تغییر شکل در همان نقطه $(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$ باشد، آنگاه:

$$(4) \quad ds^2 - ds_0^2 = 2e_{ij} d\theta^i d\theta^j$$

کوارینت بودن e_{ij} را می‌توان از قاعده کوشنت و رابطه فوق نیز استنباط کرد. ولی مانند تنش می‌توان مؤلفه‌های کنتراورینت e^{ij} و مخلوط e^i_j را نیز برای کرنش تعریف و به e_{ij} مربوط کرد که در مسئله 4.7 خواسته شده است.

المان دیفرانسیل $(d\theta^i)$ یک بردار است که مؤلفه‌های فیزیکی آن عبارت است از: $\sqrt{g_{ii}} d\theta^i$ (i not summed)

معادله (4) را می‌توان به شکل زیر نوشت.

$$(5) \quad ds^2 - ds_0^2 = 2 \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 e_{ij} \frac{1}{\sqrt{g_{ii}} \sqrt{g_{jj}}} (\sqrt{g_{ii}} d\theta^i) (\sqrt{g_{jj}} d\theta^j)$$

* در کتاب تصحیح فرمایید.

17/27

از آنجا که همه مؤلفه‌های $\sqrt{g_{ii}} d\theta^i, \sqrt{g_{jj}} d\theta^j$ دیمانسیون طول دارند، مؤلفه‌های زیر را می‌توان مؤلفه‌های فیزیکی کرنش تعریف کرد که بی بعد است.

$$(6) \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{\sqrt{g_{ii}} \sqrt{g_{jj}}} e_{ij}, \quad i, j \text{ not summed}$$

در سیستم‌های متعامد:

اگر از رابطه (2.14:9) استفاده کنیم، یعنی:

$$(7) \quad \vec{g}^i \cdot \vec{g}_j = g^i_j = \delta^i_j$$

که دلالت دارد بر

$$(8) \quad g^{ii} = (g_{ii})^{-1}, \quad i \text{ not summed}$$

در مسئله 2.12 صفحه 61 ثابت کردیم.

برای تنش داریم:

$$(9) \quad \sigma^{ij} = \sqrt{g_{ii}} \sqrt{g_{jj}} \tau^{ij}, \quad i, j \text{ not summed} \quad \sigma^{ij} = \sqrt{\frac{g_{jj}}{g_{ii}}} \tau^{ij}$$

در حالت کلی
(و نه لزوماً متعامد)

$$(10) \quad \sigma^i_j = \sqrt{g^{jj}} \sqrt{g_{ii}} \tau^i_j, \quad i, j \text{ not summed} \quad \sigma^i_j = \sqrt{\frac{g_{jj}}{g_{ii}}} \tau^i_j$$

و معادله (6) را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$(11) \quad \varepsilon_{ij} = \sqrt{g^{ii}} \sqrt{g^{jj}} e_{ij}, \quad i, j \text{ not summed}$$



18/27

4.11- مثال: مؤلفه‌های فیزیکی کرنش کوچک

در مختصات کروی

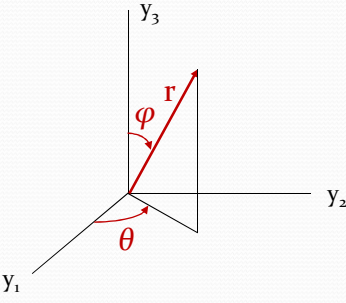
اگر $x^1 = r, x^2 = \phi, x^3 = \theta$ آنگاه:

$$g_{11} = 1, g_{22} = r^2, g_{33} = r^2 \sin^2 \phi, g_{ij} = 0 \text{ if } i \neq j$$

بنابراین سیستم مختصات متعامد است.
از تعریف $g^{\alpha\beta}$ داریم:

$$g^{11} = 1 \quad g^{22} = \frac{1}{r^2} \quad g^{33} = \frac{1}{r^2 \sin^2 \phi}$$

$$g^{ij} = 0 \text{ if } i \neq j$$

$$ds^2 = g_{ij} d\theta^i d\theta^j = dr^2 + r^2 d\phi^2 + r^2 \sin^2 \phi d\theta^2$$


Spherical polar coordinates

گرددآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

19/27

کریستوفل سیمبل‌های اقلیدسی عبارتند از:

$$\Gamma_{22}^1 = -r, \Gamma_{33}^1 = -r \sin^2 \phi, \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r}, \Gamma_{33}^2 = -\sin \phi \cos \phi$$

$$\Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r} \quad \Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 = \cot \phi$$

$$\Gamma_{jk}^i = 0$$

بقیه
فرض کنید u_i مؤلفه‌های کوارینت بردار تغییر مکان باشد.
مؤلفه‌های تانسوری کرنش کوچک عبارتند از:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (u_i|_j + u_j|_i) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x^j} - \Gamma_{ij}^\sigma u_\sigma + \frac{\partial u_j}{\partial x^i} - \Gamma_{ji}^\sigma u_\sigma \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x^j} + \frac{\partial u_j}{\partial x^i} \right) - \Gamma_{ij}^\sigma u_\sigma$$

$$\Gamma_{ij}^\sigma u_\sigma = \Gamma_{ji}^\sigma u_\sigma$$

بنابراین:

$$e_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial r}, \quad e_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \phi} + \frac{\partial u_2}{\partial r} \right) - \frac{1}{r} u_2,$$

$$e_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial \phi} + r u_1, \quad e_{23} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial \theta} + \frac{\partial u_3}{\partial \phi} \right) - \cot \phi u_3,$$

$$e_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial \theta} + r \sin^2 \phi u_1 + \sin \phi \cos \phi u_2, \quad e_{31} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial r} + \frac{\partial u_1}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{r} u_3$$

20/27

فرض کنید u_i و e_{ij} مؤلفه‌های تانسوری باشند. اگر مؤلفه‌های فیزیکی بردارهای تغییر مکان به شکل $\zeta_r, \zeta_\phi, \zeta_\theta$ و مؤلفه‌های فیزیکی تانسور کرنش به شکل ε_{ij} نوشته شوند، آنگاه از آنجا که مختصات کروی متعامد است، داریم:

$$\zeta_r = \sqrt{g^{11}} u_1 = u_1, \quad \zeta_\phi = \sqrt{g^{22}} u_2 = \frac{u_2}{r},$$

$$\zeta_\theta = \sqrt{g^{33}} u_3 = \frac{u_3}{r \sin \phi}, \quad \varepsilon_{ij} = \sqrt{g^{ii} g^{jj}} e_{ij}$$

مؤلفه‌های فیزیکی کرنش کوچک
بر حسب مؤلفه‌های فیزیکی تغییر مکان

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial \zeta_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \zeta_r}{\partial \phi} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r \zeta_\phi)}{\partial r} \right) - \frac{\zeta_\phi}{r} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \zeta_r}{\partial \phi} + \frac{\partial \zeta_\phi}{\partial r} - \frac{\zeta_\phi}{r} \right),$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\partial \zeta_\phi}{r \partial \phi} + \frac{\zeta_r}{r}, \quad \varepsilon_{23} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial \zeta_\phi}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial \zeta_\theta}{\partial \phi} - \frac{\cot \phi}{r} \zeta_\theta \right),$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial \zeta_\theta}{\partial \theta} + \frac{\zeta_r}{r} + \frac{\cot \phi}{r} \zeta_\phi, \quad \varepsilon_{31} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial \zeta_r}{\partial \theta} + \frac{\partial \zeta_\theta}{\partial r} - \frac{\zeta_\theta}{r} \right)$$

Skip to 25

21/27

معادلات تعادل

$$-F^r = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sigma^r) + \frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (\sin \phi \sigma^{r\phi}) + \frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial}{\partial \theta} \sigma^{r\theta} - \frac{1}{r} (\sigma^{\theta\theta} + \sigma^{\phi\phi})$$

$$-F^\phi = \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} (r^3 \sigma^{r\phi}) + \frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (\sin \phi \sigma^{\phi\phi}) + \frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial}{\partial \theta} \sigma^{\theta\phi} - \frac{\cot \phi}{r} \sigma^{\theta\theta}$$

$$-F^\theta = \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} (r^3 \sigma^{r\theta}) + \frac{1}{r \sin^2 \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (\sin^2 \phi \sigma^{\theta\phi}) + \frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial}{\partial \theta} \sigma^{\theta\theta}$$

در این معادلات تنش‌ها و نیروها، مؤلفه‌های فیزیکی‌اند.

دقت شود که در این رابطه اندیس‌ها دامی نیستند و به جای 1، r و به جای 2، ϕ و به جای 3، θ گذاشته شده است.

در کتاب این روابط با اندیس‌های کوارینت نوشته شده که باید تصحیح شوند. در شکل صحیح اندیس‌ها کنتراورینت‌اند. ولی از آنجا که در سیستم‌های متعامد مؤلفه‌های فیزیکی تنش یکسان هستند ($\sigma^i = \sigma'_i$)، آن روابط را می‌توان صحیح ارزیابی کرد.

$$\sigma^{11} = \sqrt{g_{11}} \sqrt{g_{11}} \tau^{11} = g_{11} \tau^{11} = g_{11} g^{1\alpha} \tau_\alpha^1 = g_{11} g^{11} \tau_1^1 = \tau_1^1$$

$$\sigma_1^1 = \sqrt{g_{11}} \sqrt{g^{11}} \tau_1^1 = \tau_1^1$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

22/27

4.12- مثال - مؤلفه‌های فیزیکی کرنش کوچک در سیستم مختصات استوانه‌ای

فرض کنید $\zeta_r, \zeta_\theta, \zeta_z$ مؤلفه‌های فیزیکی تغییر مکان

و

$\epsilon_{rr}, \epsilon_{r\theta}, \dots, \sigma_{rr}, \sigma_{r\theta}, \dots, \text{etc.}$ مؤلفه‌های فیزیکی کرنش و تنش باشند.

داریم:

$$x^1 = r, \quad x^2 = \theta, \quad x^3 = z$$

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2$$

$$g_{11} = 1, \quad g_{22} = r^2, \quad g_{33} = 1, \quad \text{all other } g_{ij} = 0$$

$$g^{11} = 1, \quad g^{22} = \frac{1}{r^2}, \quad g^{33} = 1, \quad \text{all other } g^{ij} = 0$$

$$\Gamma_{22}^1 = -r, \quad \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{12}^{2*} = \frac{1}{r}, \quad \text{all other } \Gamma_{jk}^i = 0$$

* Do the correction in the book

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

23/27

مؤلفه‌های فیزیکی کرنش کوچک بر حسب مؤلفه‌های فیزیکی تغییر مکان

$$\epsilon_{rr} = \frac{\partial \zeta_r}{\partial r}, \quad \epsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial \zeta_\theta}{\partial \theta} + \frac{\zeta_r}{r}, \quad \epsilon_{zz} = \frac{\partial \zeta_z}{\partial z},$$

$$\epsilon_{\theta z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \zeta_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \zeta_z}{\partial \theta} \right), \quad \epsilon_{zr} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \zeta_z}{\partial r} + \frac{\partial \zeta_r}{\partial z} \right),$$

$$\epsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \zeta_r}{\partial \theta} + \frac{\partial \zeta_\theta}{\partial r} - \frac{\zeta_\theta}{r} \right),$$

معادلات تعادل:

$$-\vec{F}^r = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma^{rr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma^{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma^{rz}}{\partial z} - \frac{\sigma^{\theta\theta}}{r}$$

اولین معادله تعادل را قبلاً به دست

آوردیم.

$$-\vec{F}^\theta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sigma^{\theta r}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma^{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma^{\theta z}}{\partial z}$$

دقت شود که در این رابطه و روابط بعدی

اندیس‌ها دامی نیستند و به جای 1، r و به

جای 2، θ و به جای 3، z گذاشته شده

است.

$$-\vec{F}^z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma^{zr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma^{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma^{zz}}{\partial z}$$

در روابط تعادل کتاب، اندیس‌ها کوارینت‌اند که باید تصحیح شوند. ولی از آنجا که در سیستم‌های متعامد مؤلفه‌های فیزیکی تنش یکسان هستند ($\sigma^{ij} = \sigma_j^i$)، آن روابط را می‌توان صحیح ارزیابی کرد.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

24/27

به دست آوردن یک معادله سازگاری نمونه برای کرنش‌های کوچک در مختصات عمومی - مثال: مختصات استوانه‌ای

برای حالت کرنش کوچک داشتیم:

$$(6) \quad e_{ij}|_{kl} + e_{kl}|_{ij} - e_{ik}|_{jl} - e_{jl}|_{ik} = 0$$

$$x^1 = r \quad x^2 = \theta \quad x^3 = z$$

$$g_{11} = 1, \quad g_{22} = r^2, \quad g_{33} = 1, \quad \text{all other } g_{ij} = 0$$

$$g^{11} = 1, \quad g^{22} = \frac{1}{r^2}, \quad g^{33} = 1, \quad \text{all other } g^{ij} = 0$$

$$\Gamma_{22}^1 = -r, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r}, \quad \text{all other } \Gamma_{jk}^i = 0$$

$$A_{ij}|_{kl} = \frac{\partial A_{ij}}{\partial x^l} - \Gamma_{il}^\alpha A_{\alpha j} - \Gamma_{jl}^\alpha A_{i\alpha} - \Gamma_{kl}^\alpha A_{ij}|_\alpha$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^l} \left(\frac{\partial A_{ij}}{\partial x^k} - \Gamma_{ik}^\alpha A_{\alpha j} - \Gamma_{jk}^\alpha A_{i\alpha} \right) - \Gamma_{il}^\alpha \left(\frac{\partial A_{\alpha j}}{\partial x^k} - \Gamma_{\alpha k}^\beta A_{\beta j} - \Gamma_{jk}^\beta A_{\alpha\beta} \right)$$

$$- \Gamma_{jl}^\alpha \left(\frac{\partial A_{i\alpha}}{\partial x^k} - \Gamma_{ik}^\beta A_{\beta\alpha} - \Gamma_{\alpha k}^\beta A_{i\beta} \right) - \Gamma_{kl}^\alpha \left(\frac{\partial A_{ij}}{\partial x^\alpha} - \Gamma_{i\alpha}^\beta A_{\beta j} - \Gamma_{j\alpha}^\beta A_{i\beta} \right)$$

$$= \frac{\partial^2 A_{ij}}{\partial x^l \partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^\alpha}{\partial x^l} A_{\alpha j} - \frac{\partial A_{\alpha j}}{\partial x^l} \Gamma_{ik}^\alpha - \frac{\partial \Gamma_{jk}^\alpha}{\partial x^l} A_{i\alpha} - \frac{\partial A_{i\alpha}}{\partial x^l} \Gamma_{jk}^\alpha - \Gamma_{il}^\alpha \frac{\partial A_{\alpha j}}{\partial x^k} + \Gamma_{il}^\alpha \Gamma_{\alpha k}^\beta A_{\beta j} + \Gamma_{il}^\alpha \Gamma_{jk}^\beta A_{\alpha\beta}$$

$$- \Gamma_{jl}^\alpha \frac{\partial A_{i\alpha}}{\partial x^k} + \Gamma_{jl}^\alpha \Gamma_{ik}^\beta A_{\beta\alpha} + \Gamma_{jl}^\alpha \Gamma_{\alpha k}^\beta A_{i\beta} - \Gamma_{kl}^\alpha \frac{\partial A_{ij}}{\partial x^\alpha} + \Gamma_{kl}^\alpha \Gamma_{i\alpha}^\beta A_{\beta j} + \Gamma_{kl}^\alpha \Gamma_{j\alpha}^\beta A_{i\beta}$$

25/27

برای یک حالت خاص $i = j = 1 = r, k = 2 = \theta, l = 3 = z$ داریم:

$$e_{rr}|_{\theta z} + e_{\theta z}|_{rr} - e_{r\theta}|_{rz} - e_{rz}|_{r\theta} = 0$$

دقت شود که در این رابطه اندیس‌ها دامی نیستند و به جای 1، r و به جای 2، θ و به جای 3، z گذاشته شده است. بنابراین:

$$A_{ij}|_{kl} = \frac{\partial^2 A_{ij}}{\partial x^l \partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^\alpha}{\partial x^l} A_{\alpha j} - \frac{\partial A_{\alpha j}}{\partial x^l} \Gamma_{ik}^\alpha - \frac{\partial \Gamma_{jk}^\alpha}{\partial x^l} A_{i\alpha} - \frac{\partial A_{i\alpha}}{\partial x^l} \Gamma_{jk}^\alpha - \Gamma_{il}^\alpha \frac{\partial A_{\alpha j}}{\partial x^k} + \Gamma_{il}^\alpha \Gamma_{\alpha k}^\beta A_{\beta j} + \Gamma_{il}^\alpha \Gamma_{jk}^\beta A_{\alpha\beta}$$

$$- \Gamma_{jl}^\alpha \frac{\partial A_{i\alpha}}{\partial x^k} + \Gamma_{jl}^\alpha \Gamma_{ik}^\beta A_{\beta\alpha} + \Gamma_{jl}^\alpha \Gamma_{\alpha k}^\beta A_{i\beta} - \Gamma_{kl}^\alpha \frac{\partial A_{ij}}{\partial x^\alpha} + \Gamma_{kl}^\alpha \Gamma_{i\alpha}^\beta A_{\beta j} + \Gamma_{kl}^\alpha \Gamma_{j\alpha}^\beta A_{i\beta}$$

کریستوفل‌های غیر صفر:

$$\Gamma_{22}^1 = -r, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r}$$

$$e_{rr}|_{\theta z} = \frac{\partial^2 e_{rr}}{\partial \theta \partial z} - \frac{\partial \Gamma_{r\theta}^\alpha}{\partial z} e_{\alpha r} - \frac{\partial e_{\alpha r}}{\partial z} \Gamma_{r\theta}^\alpha - \frac{\partial \Gamma_{r\theta}^\alpha}{\partial z} e_{r\alpha} - \frac{\partial e_{r\alpha}}{\partial z} \Gamma_{r\theta}^\alpha - 0 + 0 + 0 - 0 + 0 + 0 - 0 + 0 + 0$$

از آنجا که Γ ها تابعی از z نیستند، داریم:

$$= \frac{\partial^2 e_{rr}}{\partial \theta \partial z} - \frac{\partial \Gamma_{r\theta}^\alpha}{\partial z} e_{\alpha r} - \frac{\partial e_{\alpha r}}{\partial z} \Gamma_{r\theta}^\alpha - \frac{\partial \Gamma_{r\theta}^\alpha}{\partial z} e_{r\alpha} - \frac{\partial e_{r\alpha}}{\partial z} \Gamma_{r\theta}^\alpha = \frac{\partial^2 e_{rr}}{\partial \theta \partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial e_{\theta r}}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial e_{r\theta}}{\partial z} = \frac{\partial^2 e_{rr}}{\partial \theta \partial z} - \frac{2}{r} \frac{\partial e_{\theta r}}{\partial z}$$

$$e_{\theta z}|_{11} = \frac{\partial^2 e_{\theta z}}{\partial r^2} - \frac{\partial \Gamma_{21}^\alpha}{\partial r} e_{\alpha z} - \frac{\partial e_{\alpha z}}{\partial r} \Gamma_{21}^\alpha - 0 - 0 - \Gamma_{21}^\alpha \frac{\partial e_{\alpha z}}{\partial r} + \Gamma_{21}^\alpha \Gamma_{21}^\beta e_{\beta z} + 0 - 0 + 0 + 0 - 0 + 0 + 0$$

$$= \frac{\partial^2 e_{\theta z}}{\partial r^2} - \frac{\partial \Gamma_{21}^\alpha}{\partial r} e_{\alpha z} - \frac{\partial e_{\alpha z}}{\partial r} \Gamma_{21}^\alpha - \Gamma_{21}^\alpha \frac{\partial e_{\alpha z}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} e_{\theta z} = \frac{\partial^2 e_{\theta z}}{\partial r^2} - \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) \right] e_{\theta z} - \frac{1}{r} \frac{\partial e_{\theta z}}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial e_{\theta z}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} e_{\theta z}$$

$$= \frac{\partial^2 e_{\theta z}}{\partial r^2} + \frac{2}{r^2} e_{\theta z} - \frac{2}{r} \frac{\partial e_{\theta z}}{\partial r}$$

26/27

14