

Eighth Edition

CHAPTER
5

VECTOR MECHANICS FOR ENGINEERS: STATICS

Ferdinand P. Beer
E. Russell Johnston, Jr.

Lecture Notes:
J. Walt Oler
Texas Tech University

نیروهای گسترده:
مرکزوار (centroids) و
مرکز ثقل

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری
© 2007 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

MF2

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مقدمه

- زمین به هر ذره‌ای از جسم یک نیروی جاذبه وارد می‌کند. این نیروها را می‌توان با یک نیروی معادل که برابر با وزن جسم است و در نقطه **مرکز ثقل** جسم اثر می‌کند جایگزین کرد.
- **مرکزوار یک سطح** مانند مرکز ثقل یک جسم است. از مفهوم **ممان اول یک سطح** برای به دست آوردن مرکزوار یک سطح استفاده می‌شود.
- به دست آوردن مساحت یک سطح دوار و حجم یک جسم دوار از قضایای پاپوس-گلدینوس امکان پذیر است.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری
© 2007 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

5 - ۲/32

Slide 2

MF2 چرخش:revolution
My Friend ؛ ۱۰/۰۴/۲۰۰۹

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مرکز ثقل یک جسم دوبعدی

• مرکز ثقل یک صفحه

• مرکز ثقل یک سیم

$$\sum M_y \quad \bar{x}W = \sum x \Delta W = \int x dW$$

$$\sum M_x \quad \bar{y}W = \sum y \Delta W = \int y dW$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالشیری
© 2007 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

5 - ۳/32

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مرکزوار و ممان اول سطح و خط

• مرکزوار یک سطح

• مرکزوار یک سیم

وزن مخصوص γ
ضخامت t

$$\bar{x}W = \int x dW$$

$$\bar{x}(\gamma A t) = \int x(\gamma t) dA$$

$$\bar{x}A = \int x dA = Q_y$$

ممان اول نسبت به y

$$\bar{y}A = \int y dA = Q_x$$

ممان اول نسبت به x

مساحت سطح مقطع سیم a

$$\bar{x}W = \int x dW$$

$$\bar{x}(\gamma L a) = \int x(\gamma a) dL$$

$$\bar{x}L = \int x dL$$

$$\bar{y}L = \int y dL$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالشیری
© 2007 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

5 - ۴/32

Vector Mechanics for Engineers: Statics

ممان اول سطح و خط

- یک سطح را نسبت به محور BB' متقارن گویند اگر برای هر نقطه P یک نقطه P' وجود داشته باشد به طوری که PP' بر BB' عمود باشد و آن را به دو قسمت مساوی تقسیم کند.
- ممان اول یک سطح نسبت به خط تقارن صفر است.
- اگر سطحی یک خط تقارن داشته باشد، مرکزوار آن روی آن محور قرار دارد.
- اگر سطحی دو خط تقارن داشته باشد، مرکزوار آن در محل تقاطع آن دو محور است.
- یک سطح نسبت به یک نقطه O متقارن است، اگر هر المان dA در (x, y) یک سطح dA' داشته باشد که مساحت آن برابر آن سطح باشد و در $(-x, -y)$ قرار داشته باشد.
- مرکزوار سطح بر مرکز تقارن منطبق است.

© 2007 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 5 - 32

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مرکزوار سطح‌های با شکل معمولی

Shape	$\bar{x}$	$\bar{y}$	Area
Triangular area		$\frac{h}{3}$	$\frac{bh}{2}$
Quarter-circular area		$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{4}$
Semicircular area		$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{2}$
Quarter-elliptical area		$\frac{4b}{3\pi}$	$\frac{\pi ab}{4}$
Semielliptical area		$\frac{4b}{3\pi}$	$\frac{\pi ab}{2}$
Semiparabolic area		$\frac{3h}{5}$	$\frac{2ah}{3}$
Parabolic area		$\frac{3h}{5}$	$\frac{4ah}{3}$
Parabolic spandrel		$\frac{3h}{10}$	$\frac{ah}{3}$
General spandrel		$\frac{n+1}{4n+2} h$	$\frac{ah}{n+1}$
Circular sector		0	αr^2

© 2007 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 5 - 32

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مرکزوار خطوط با شکل معمولی

Shape		$\bar{x}$	$\bar{y}$	Length
Quarter-circular arc قوس ربع دایره‌ای		$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{\pi r}{2}$
Semicircular arc قوس نیم‌دایره‌ای		0	$\frac{2r}{\pi}$	πr
Arc of circle قوس دایره‌ای		$\frac{r \sin \alpha}{\alpha}$	0	$2\alpha r$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالشیری
© 2007 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 5 - ۷/32

Vector Mechanics for Engineers: Statics

ورق‌ها و سطوح مرکب

• ورق‌های مرکب

$$\bar{X} \sum W = \sum \bar{x} W$$

$$\bar{Y} \sum W = \sum \bar{y} W$$

• سطوح مرکب

$$\bar{X} \sum A = \sum \bar{x} A$$

$$\bar{Y} \sum A = \sum \bar{y} A$$

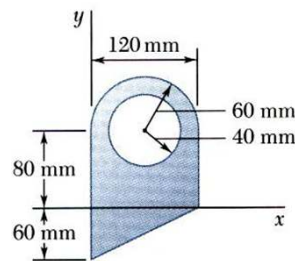
گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالشیری
© 2007 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 5 - ۸/32

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مسئله نمونه 5.1

حل:

- سطح را با فرض توپر بودن به مثلث، مستطیل و نیم دایره تقسیم می‌کنیم و یک دایره از آن کم می‌کنیم.
- ممان اول هر سطح را نسبت به محور محاسبه می‌کنیم.
- جمع تمامی سطوح و ممان‌های اول مثلث و مستطیل و نیم دایره را به دست می‌آوریم و سطح و ممان اول دایره‌ای را از آن کم می‌کنیم.
- مختصات مرکزوار سطح را از تقسیم حاصل جمع ممان اول‌ها بر حاصل جمع مساحت‌ها به دست می‌آوریم.



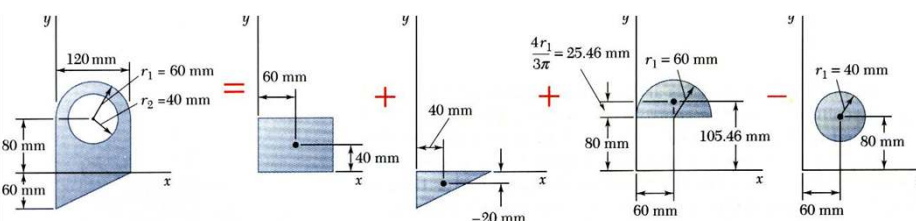
برای ورق مسطح نشان داده شده، ممان اول نسبت به محورهای X و Y و محل مرکزوار را به دست آورید.

© 2007 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

5 - 1/32

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مسئله نمونه 5.1 (ادامه)



Component	A, mm^2	$\bar{x}, \text{mm}$	$\bar{y}, \text{mm}$	$\bar{x}A, \text{mm}^3$	$\bar{y}A, \text{mm}^3$
Rectangle	$(120)(80) = 9.6 \times 10^3$	60	40	$+576 \times 10^3$	$+384 \times 10^3$
Triangle	$\frac{1}{2}(120)(60) = 3.6 \times 10^3$	40	-20	$+144 \times 10^3$	-72×10^3
Semicircle	$\frac{1}{2}\pi(60)^2 = 5.655 \times 10^3$	60	105.46	$+339.3 \times 10^3$	$+596.4 \times 10^3$
Circle	$-\pi(40)^2 = -5.027 \times 10^3$	60	80	-301.6×10^3	-402.2×10^3
	$\Sigma A = 13.828 \times 10^3$			$\Sigma \bar{x}A = +757.7 \times 10^3$	$\Sigma \bar{y}A = +506.2 \times 10^3$

- جمع تمامی سطوح و ممان‌های اول مثلث و مستطیل و نیم دایره را به دست می‌آوریم و سطح و ممان اول دایره‌ای که در آورده شده را از آن کم می‌کنیم.

$$Q_x = +506.2 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

$$Q_y = +757.7 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

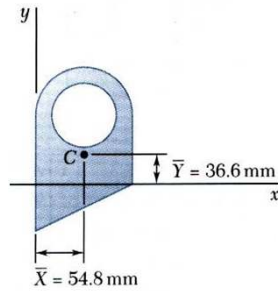
© 2007 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

5 - 1/32

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مسئله نمونه 5.1 (ادامه)

- مختصات مرکزوار سطح را از تقسیم حاصل جمع ممان اولها بر حاصل جمع مساحتها به دست می آوریم.



$$\bar{X} = \frac{\sum \bar{x}A}{\sum A} = \frac{+757.7 \times 10^3 \text{ mm}^3}{13.828 \times 10^3 \text{ mm}^2}$$

$$\bar{X} = 54.8 \text{ mm}$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum \bar{y}A}{\sum A} = \frac{+506.2 \times 10^3 \text{ mm}^3}{13.828 \times 10^3 \text{ mm}^2}$$

$$\bar{Y} = 36.6 \text{ mm}$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالشیری

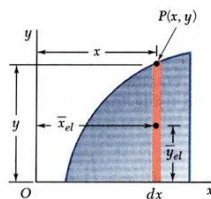
© 2007 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

5 - 11/32

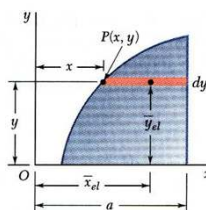
Vector Mechanics for Engineers: Statics

به دست آوردن مرکزوار با انتگرال گیری

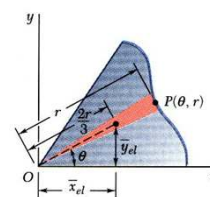
- اگر dA را به عنوان یک مستطیل نازک یا یک نوار بگیریم، نیازی به انتگرال گیری دوگانه نیست.



$$\begin{aligned}\bar{x}A &= \int \bar{x}_{el} dA \\ &= \int x(y dx) \\ \bar{y}A &= \int \bar{y}_{el} dA \\ &= \int \frac{y}{2}(y dx)\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\bar{x}A &= \int \bar{x}_{el} dA \\ &= \int \frac{a+x}{2}[(a-x)dy] \\ \bar{y}A &= \int \bar{y}_{el} dA \\ &= \int y[(a-x)dy]\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\bar{x}A &= \int \bar{x}_{el} dA \\ &= \int \frac{2r}{3} \cos \theta \left(\frac{1}{2} r^2 d\theta \right) \\ \bar{y}A &= \int \bar{y}_{el} dA \\ &= \int \frac{2r}{3} \sin \theta \left(\frac{1}{2} r^2 d\theta \right)\end{aligned}$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالشیری

© 2007 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

5 - 11/32

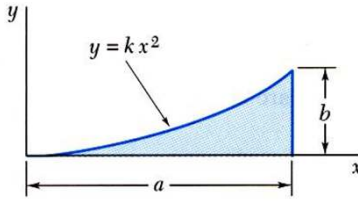
Vector Mechanics for Engineers: Statics

مسئله نمونه 5.4

حل:

- ثابت k را به دست می آوریم.
- مساحت کل را محاسبه می کنیم.
- با استفاده از یک نوار افقی یا عمودی یک انتگرال گیری انجام می دهیم تا ممان اول به دست آید.
- مختصات مرکزوار را به دست می آوریم.

محل مرکزوار یک سهمی درجه دوم کلی (parabolic spandrel) را با انتگرال دوگانه به دست آورید.



گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالشیری

© 2007 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

5 - ۱۳/32

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مسئله نمونه 5.4 (ادامه)

حل:

- ثابت k را به دست می آوریم.

$$y = kx^2$$

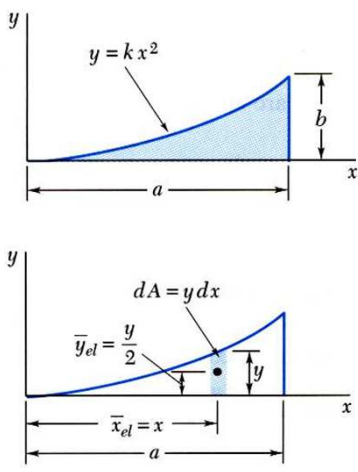
$$b = ka^2 \Rightarrow k = \frac{b}{a^2}$$

$$y = \frac{b}{a^2}x^2 \quad \text{or} \quad x = \frac{a}{b^{1/2}}y^{1/2}$$

- مساحت کل را محاسبه می کنیم.

$$A = \int dA$$

$$= \int y dx = \int_0^a \frac{b}{a^2} x^2 dx = \left[\frac{b}{a^2} \frac{x^3}{3} \right]_0^a$$

$$= \frac{ab}{3}$$


گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالشیری

© 2007 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

5 - ۱۴/32

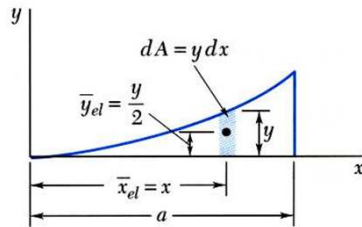
Slide 13

MF1 spandrel: بخش سه گوش هر یک از طرفین تاق قوسی
My Friend ۱۰/۰۶/۲۰۰۹ ؛

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مسئله نمونه 5.4 (ادامه)

- با استفاده از یک نوار عمودی یک انتگرال گیری انجام می دهیم تا ممان اول به دست آید.



$$Q_y = \int \bar{x}_{el} dA = \int xy dx = \int_0^a x \left(\frac{b}{a^2} x^2 \right) dx$$

$$= \left[\frac{b}{a^2} \frac{x^4}{4} \right]_0^a = \frac{a^2 b}{4}$$

$$Q_x = \int \bar{y}_{el} dA = \int \frac{y}{2} y dx = \int_0^a \frac{1}{2} \left(\frac{b}{a^2} x^2 \right)^2 dx$$

$$= \left[\frac{b^2}{2a^4} \frac{x^5}{5} \right]_0^a = \frac{ab^2}{10}$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

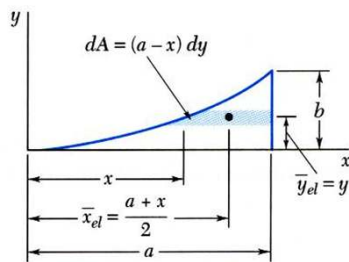
© 2007 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

5 - ۱۰/32

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مسئله نمونه 5.4 (ادامه)

- یا با استفاده از یک نوار افقی یک انتگرال گیری انجام می دهیم تا ممان اول به دست آید.



$$Q_y = \int \bar{x}_{el} dA = \int \frac{a+x}{2} (a-x) dy = \int_0^b \frac{a^2 - x^2}{2} dy$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^b \left(a^2 - \frac{a^2}{b} y \right) dy = \frac{a^2 b}{4}$$

$$Q_x = \int \bar{y}_{el} dA = \int y(a-x) dy = \int y \left(a - \frac{a}{b^{1/2}} y^{1/2} \right) dy$$

$$= \int_0^b \left(ay - \frac{a}{b^{1/2}} y^{3/2} \right) dy = \frac{ab^2}{10}$$

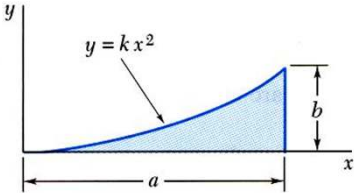
گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2007 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

5 - ۱۱/32

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مسئله نمونه 5.4 (ادامه)



$y = kx^2$

a b

• مختصات مرکزوار را به دست می‌آوریم.

$$\bar{x}A = Q_y$$

$$\bar{x} \frac{ab}{3} = \frac{a^2b}{4} \quad \boxed{\bar{x} = \frac{3}{4}a}$$

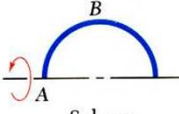
$$\bar{y}A = Q_x$$

$$\bar{y} \frac{ab}{3} = \frac{ab^2}{10} \quad \boxed{\bar{y} = \frac{3}{10}b}$$

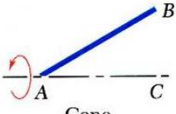
گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالشیری
© 2007 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 5 - 17/32

Vector Mechanics for Engineers: Statics

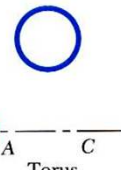
قضایای پاپوس-گلدینوس



Sphere
کره

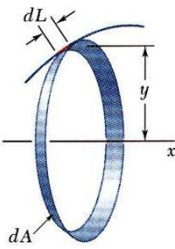


Cone
مخروط

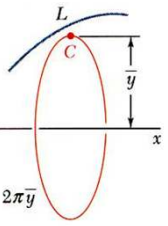


Torus
چنبره

• سطح دوار از دوران یک منحنی صفحه‌ای حول یک محور ثابت به وجود می‌آید.



dA



$2\pi\bar{y}$

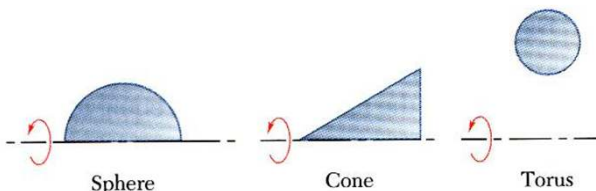
• مساحت یک سطح دوار برابر است با طول منحنی مولد، ضربدر فاصله‌ای که مرکزوار منحنی ضمن ایجاد این سطح طی می‌کند.

$$A = 2\pi\bar{y}L$$

© 2007 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 5 - 18/32

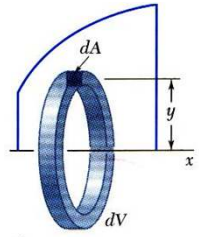
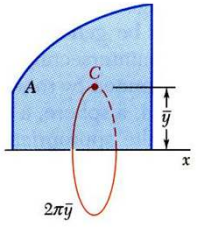
Vector Mechanics for Engineers: Statics

قضایای پاپوس-گلدینوس



Sphere Cone Torus

- جسم دوار جسمی است که از دوران یک سطح مستوی حول یک محور ثابت به وجود می‌آید.
- حجم یک جسم دوار برابر است با مساحت مولد، ضربدر فاصله‌ای که مرکزوار سطح در ضمن ایجاد جسم طی می‌کند.

$V = 2\pi \bar{y} A$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالشیری
© 2007 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

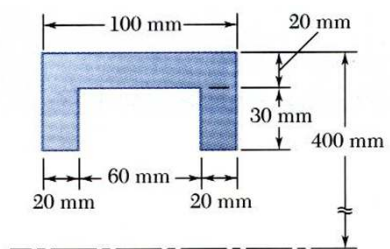
5 - ۱۹/32

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مسئله نمونه 5.7

حل:

- برای محاسبه حجم جسمی که سطح مقطع طوقه دوار بوجود می‌آورد از قضایای پاپوس-گلدینوس استفاده می‌کنیم.
- با ضرب کردن حجم در چگالی و شتاب ثقل، جرم و وزن را به دست می‌آوریم.



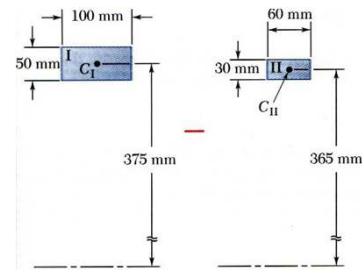
قطر خارجی یک پولی 0.8 m و سطح مقطع طوقه آن مانند شکل است. پولی از فولاد ساخته شده و چگالی آن $\rho = 7.85 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ است. جرم و وزن طوقه را به دست آورید.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالشیری
© 2007 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

5 - ۲۰/32

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مسئله نمونه 5.7 (ادامه)



	Area, mm ²	$\bar{y}$, mm	Distance Traveled by C , mm	Volume, mm ³
I	+5000	375	$2\pi(375) = 2356$	$(5000)(2356) = 11.78 \times 10^6$
II	-1800	365	$2\pi(365) = 2293$	$(-1800)(2293) = -4.13 \times 10^6$
				Volume of rim = 7.65×10^6

$$m = \rho V = (7.85 \times 10^3 \text{ kg/m}^3) (7.65 \times 10^6 \text{ mm}^3) (10^{-9} \text{ m}^3/\text{mm}^3) \quad m = 60.0 \text{ kg}$$

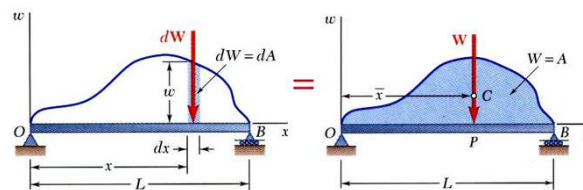
$$W = mg = (60.0 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) \quad W = 589 \text{ N}$$

© 2007 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

5 - 21/32

Vector Mechanics for Engineers: Statics

نیروهای گسترده روی تیرها



• یک بار گسترده با رسم بار بر واحد طول نمایش داده می‌شود (w (N/m)). بار کلی برابر است با سطح زیر منحنی بار.

$$W = \int_0^L w dx = \int dA = A$$

$$(OP)W = \int x dW$$

$$(OP)A = \int_0^L x dA = \bar{x}A$$

• یک بار گسترده را می‌توان با یک بار متمرکز که مقدار آن برابر با مساحت زیر منحنی بار و خط اثرش از مرکزوار آن سطح می‌گذرد جایگزین کرد.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

© 2007 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

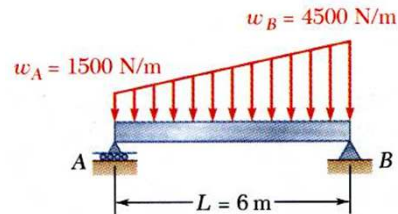
5 - 22/32

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مسئله نمونه 5.9

حل:

- مقدار نیروی متمرکز برابر است با بار کلی یا مساحت زیر منحنی بار.
- راستای نیروی متمرکز از مرکزوار سطح زیر منحنی می‌گذرد.
- با جمع ممان‌ها در دو انتهای تیر می‌کند. بار متمرکز معادل را به دست آورید.



گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالشیری

© 2007 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

5 - ۲۳/32

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مسئله نمونه 5.9 (ادامه)

حل:

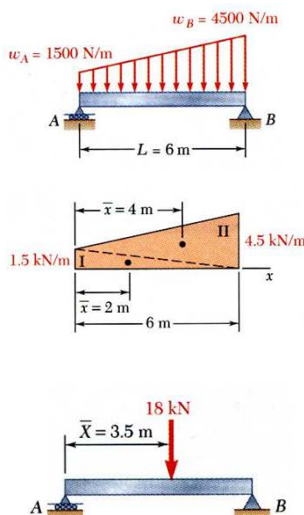
- مقدار نیروی متمرکز برابر است با بار کلی یا مساحت زیر منحنی بار.

$$F = 18.0 \text{ kN}$$

- راستای نیروی متمرکز از مرکزوار سطح زیر منحنی می‌گذرد.

$$\bar{X} = \frac{63 \text{ kN} \cdot \text{m}}{18 \text{ kN}}$$

$$\bar{X} = 3.5 \text{ m}$$



Component	A, kN	$\bar{x}$, m	$\bar{x}A$, kN · m
Triangle I	4.5	2	9
Triangle II	13.5	4	54
$\Sigma A = 18.0$			$\Sigma \bar{x}A = 63$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالشیری

© 2007 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

5 - ۲۴/32

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مسئله نمونه 5.9 (ادامه)

$w_A = 1500 \text{ N/m}$
 $w_B = 4500 \text{ N/m}$
 $L = 6 \text{ m}$
 18 kN
 $\bar{x} = 3.5 \text{ m}$

• با جمع ممان‌ها در دو انتهای تیر عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی به دست می‌آید.

$\sum M_A = 0: B_y(6 \text{ m}) - (18 \text{ kN})(3.5 \text{ m}) = 0$

$B_y = 10.5 \text{ kN}$

$\sum M_B = 0: -A_y(6 \text{ m}) + (18 \text{ kN})(6 \text{ m} - 3.5 \text{ m}) = 0$

$A_y = 7.5 \text{ kN}$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالشیری
© 2007 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

5 - ۲۰/32

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مرکز ثقل یک جسم سه بعدی: مرکزوار یک حجم

G مرکز ثقل
 $\vec{W} = -W\vec{j}$

$\Delta W = -\Delta W\vec{j}$

• نتیجه از وضعیت جسم مستقل است.

$\bar{x}W = \int x dW \quad \bar{y}W = \int y dW \quad \bar{z}W = \int z dW$

• اگر جسم از ماده همگنی با وزن مخصوص γ باشد:

$W = \gamma V \quad \text{and} \quad dW = \gamma dV$

$\bar{x}V = \int x dV \quad \bar{y}V = \int y dV \quad \bar{z}V = \int z dV$

• مرکز ثقل G

$-\vec{W}\vec{j} = \sum (-\Delta W\vec{j})$

$\vec{r}_G \times (-W\vec{j}) = \sum [\vec{r} \times (-\Delta W\vec{j})]$

$\vec{r}_G W \times (-\vec{j}) = (\sum \vec{r} \Delta W) \times (-\vec{j})$

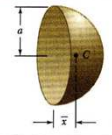
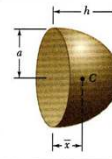
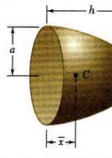
$W = \int dW \quad \vec{r}_G W = \int \vec{r} dW$

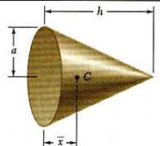
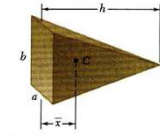
© 2007 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

5 - ۲۱/32

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مرکزوار چند شکل و حجم معمولی

Shape		$\bar{x}$	Volume
Hemisphere نیمکره		$\frac{3a}{8}$	$\frac{2}{3}\pi a^3$
Semiellipsoid of revolution نیم بیضیگون		$\frac{3h}{8}$	$\frac{2}{3}\pi a^2 h$
Paraboloid of revolution سهمیگون		$\frac{h}{3}$	$\frac{1}{2}\pi a^2 h$

Cone مخروط		$\frac{h}{4}$	$\frac{1}{3}\pi a^2 h$
Pyramid هرم		$\frac{h}{4}$	$\frac{1}{3}ab h$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

© 2007 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

5 – ۲۷/32

Vector Mechanics for Engineers: Statics

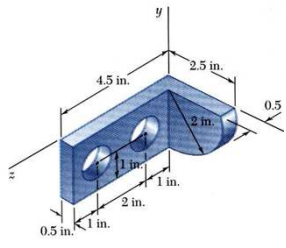
اجسام سه بعدی مرکب

• ممان وزن کلی متمرکز در مرکز ثقل G برابر است با جمع ممان‌های وزن‌های قسمت‌ها

$$\bar{X}\sum W = \sum \bar{x}W \quad \bar{Y}\sum W = \sum \bar{y}W \quad \bar{Z}\sum W = \sum \bar{z}W$$

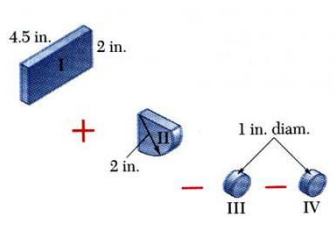
• برای اجسام همگن:

$$\bar{X}\sum V = \sum \bar{x}V \quad \bar{Y}\sum V = \sum \bar{y}V \quad \bar{Z}\sum V = \sum \bar{z}V$$



• ممان وزن کلی متمرکز در مرکز ثقل G برابر است با جمع ممان‌های وزن‌های قسمت‌ها

• برای اجسام همگن:



گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

© 2007 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

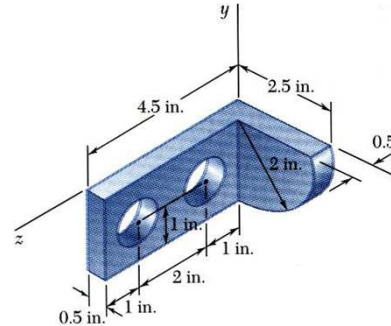
5 – ۲۸/32

Vector Mechanics for Engineers: Statics

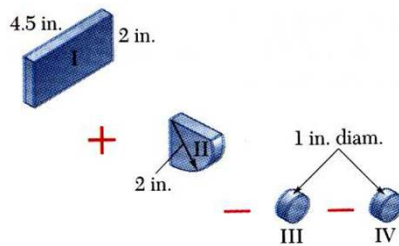
مسئله نمونه 5.12

حل:

- قطعه ماشین را به صورت ترکیبی از یک مکعب مستطیل و یک ربع استوانه در نظر می‌گیریم و دو سوراخ استوانه‌ای به قطر 1-in از آن کم می‌کنیم.



مرکز ثقل قطعه فولادی نشان داده شده را بیابید. قطر هر سوراخ 1 in. است.



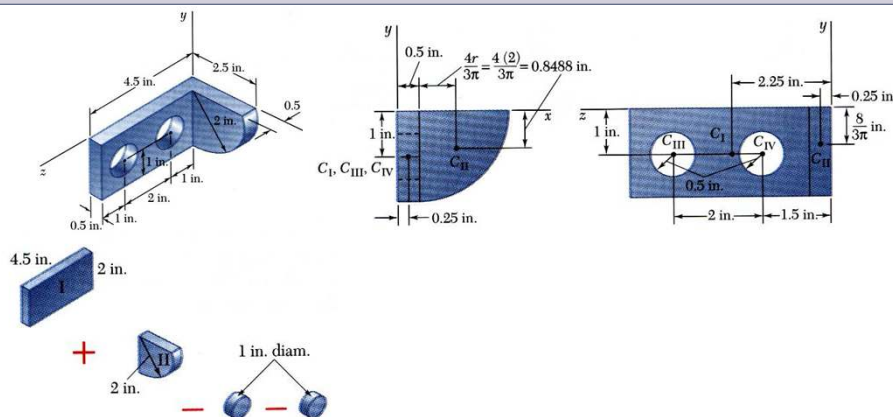
گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالشیری

© 2007 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

5 - ۲۹/32

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مسئله نمونه 5.12 (ادامه)



	V, in^3	$\bar{x}, \text{in.}$	$\bar{y}, \text{in.}$	$\bar{z}, \text{in.}$	$\bar{x}V, \text{in}^4$	$\bar{y}V, \text{in}^4$	$\bar{z}V, \text{in}^4$
I	$(4.5)(2)(0.5) = 4.5$	0.25	-1	2.25	1.125	-4.5	10.125
II	$\frac{1}{4}\pi(2)^2(0.5) = 1.571$	1.3488	-0.8488	0.25	2.119	-1.333	0.393
III	$-\pi(0.5)^2(0.5) = -0.3927$	0.25	-1	3.5	-0.098	0.393	-1.374
IV	$-\pi(0.5)^2(0.5) = -0.3927$	0.25	-1	1.5	-0.098	0.393	-0.589
	$\Sigma V = 5.286$				$\Sigma \bar{x}V = 3.048$	$\Sigma \bar{y}V = -5.047$	$\Sigma \bar{z}V = 8.555$

© 2007 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

5 - ۳۰/32

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مسئله نمونه 5.12 (ادامه)

	V, in^3	$\bar{x}, \text{in.}$	$\bar{y}, \text{in.}$	$\bar{z}, \text{in.}$	$\bar{x}V, \text{in}^4$	$\bar{y}V, \text{in}^4$	$\bar{z}V, \text{in}^4$
I	$(4.5)(2)(0.5) = 4.5$	0.25	-1	2.25	1.125	-4.5	10.125
II	$\frac{1}{2}\pi(2)^2(0.5) = 1.571$	1.3488	-0.8488	0.25	2.119	-1.333	0.393
III	$-\pi(0.5)^2(0.5) = -0.3927$	0.25	-1	3.5	-0.098	0.393	-1.374
IV	$-\pi(0.5)^2(0.5) = -0.3927$	0.25	-1	1.5	-0.098	0.393	-0.589
	$\Sigma V = 5.286$				$\Sigma \bar{x}V = 3.048$	$\Sigma \bar{y}V = -5.047$	$\Sigma \bar{z}V = 8.555$

$$\bar{X} = \Sigma \bar{x}V / \Sigma V = (3.048 \text{ in}^4) / (5.286 \text{ in}^3)$$

$$\bar{X} = 0.577 \text{ in.}$$

$$\bar{Y} = \Sigma \bar{y}V / \Sigma V = (-5.047 \text{ in}^4) / (5.286 \text{ in}^3)$$

$$\bar{Y} = -0.955 \text{ in.}$$

$$\bar{Z} = \Sigma \bar{z}V / \Sigma V = (8.555 \text{ in}^4) / (5.286 \text{ in}^3)$$

$$\bar{Z} = 1.618 \text{ in.}$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

© 2007 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

5 - ۳۱/32

نکات

مرکزوار

مرکزوار تنها تابعی از شکل است.
مستقل از چگالی و جاذبه است.

مرکز جرم

به شکل و چگالی وابسته است.
مستقل از جاذبه محیط است.

مرکز ثقل

به شکل، چگالی و جاذبه وابسته است.
به آن مرکز وزن هم می گویند.

