

فصل ۴ - تحلیل کرنش (Analysis of Strain)

نیروهایی که به اجسام جامد اثر می‌کنند باعث **تغییر شکل** و نیروهایی که به مایعات اثر می‌کنند باعث **جاری شدن** آن‌ها می‌شوند.

هدف اصلی یک تحلیل اغلب به دست آوردن **تغییر شکل** یا **چگونگی جریان** است.

در این فصل هدف ما تحلیل تغییر شکل اجسام جامد است به شکلی که آن را به حالت تنش در آن‌ها مربوط کنیم.



© M.H. Abolbashari, Ferdowsi University of Mashhad

1/29

اگر یک میله را تحت ممان خمشی قرار دهیم، خم می‌شود.

اگر یک نوار لاستیکی را تحت کشش قرار دهیم، طول آن افزایش پیدا می‌کند؛ و یا اگر یک استوانه را تحت نیروی محوری فشاری قرار دهیم، کوتاه می‌شود.

اگر به محوری گشتاور وارد کنیم، می‌پیچد.

(a) Stretching. (b) Bending. (c) Twisting. (d) Simple shear.

تنش کششی باعث کرنش کششی و تنش برشی باعث کرنش برشی می‌شود.

Figure 5.1 Patterns of deformation. (a) Stretching. (b) Bending. (c) Twisting. (d) Simple shear.

برای اینکه این پدیده‌ها را به طور کیفی بیان کنیم، لازم است **سنجه کرنش** را تعریف کنیم.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

2/29

4.1- تغییر شکل (Deformation)

فرض می‌شود تغییر وضعیت جسم پیوسته است. همچنین فرض می‌شود انتقال (نگاشت) نقطه P به Q یک به یک است.

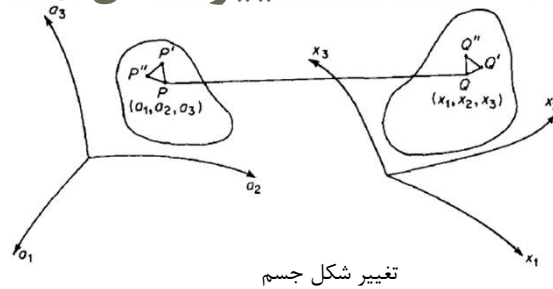


Fig. 4.1:1. Deformation of a body.

معادله انتقال را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$(1) \quad x_i = \hat{x}_i(a_1, a_2, a_3)$$

که یک معکوس یگانه به شکل زیر دارد.

$$(2) \quad a_i = \hat{a}_i(x_1, x_2, x_3)$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

3/29

یک المان خط کوچک که نقطه $P(a_1, a_2, a_3)$ را به نقطه همسایه $P'(a_1+da^1, a_2+da^2, a_3+da^3)$ متصل می‌کند در نظر بگیرید.

مجدور طول ds_0 المان خط PP' در وضعیت اولیه از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$(3) \quad ds_0^2 = (da^1)^2 + (da^2)^2 + (da^3)^2 = a_{ij} da^i da^j$$

در اینجا a_{ij} در نقطه P ارزیابی می‌شود و **تانسور متریک اقلیدسی** سیستم مختصات a_i است. وقتی P و P' به ترتیب به نقاط $Q(x_1, x_2, x_3)$ و $Q'(x_1+dx^1, x_2+dx^2, x_3+dx^3)$ انتقال می‌یابند، مجدور طول ds المان جدید QQ' عبارت است از:

$$(4) \quad ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j \rightarrow \text{دیفرانسیل هستند و مانند تانسور کنتراورینت منتقل می‌شوند.}$$

که g_{ij} **تانسور متریک اقلیدسی** سیستم مختصات x_i است. با استفاده از معادلات (1) $x_i = \hat{x}_i(a_1, a_2, a_3)$ و (2) $a_i = \hat{a}_i(x_1, x_2, x_3)$ می‌توان نوشت:

$$(5) \quad ds_0^2 = a_{ij} da^i da^j = a_{ij} \frac{\partial a_i}{\partial x_l} \frac{\partial a_j}{\partial x_m} dx^l dx^m$$

$$(6) \quad ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j = g_{ij} \frac{\partial x_i}{\partial a_l} \frac{\partial x_j}{\partial a_m} da^l da^m$$

تفاوت بین مجدورات طول المان‌ها را پس از چندین تغییر در اندیس‌های دامی می‌توان به شکل دیگری نیز نوشت.

4/29

(7) $ds^2 - ds_0^2 = (g_{\alpha\beta} \frac{\partial x_\alpha}{\partial a_i} \frac{\partial x_\beta}{\partial a_j} - a_{ij}) da^i da^j$

(8) $ds^2 - ds_0^2 = (g_{ij} - a_{\alpha\beta} \frac{\partial a_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial a_\beta}{\partial x_j}) dx^i dx^j$

(9) **Green's strain tensor** $E_{ij} = \frac{1}{2} (g_{\alpha\beta} \frac{\partial x_\alpha}{\partial a_i} \frac{\partial x_\beta}{\partial a_j} - a_{ij})$

(10) **Almansi's strain tensor** $e_{ij} = \frac{1}{2} (g_{ij} - a_{\alpha\beta} \frac{\partial a_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial a_\beta}{\partial x_j})$

یا
تانسورهای کرنش را به شکل زیر تعریف می کنیم:

توسط Green و St. Venant معرفی شد.
برای کرنش های کوچک توسط Cauchy و Almansi و Hamel برای کرنش های محدود معرفی شد.

بنابراین:

(11) $ds^2 - ds_0^2 = 2E_{ij} da^i da^j$

(12) $ds^2 - ds_0^2 = 2e_{ij} dx^i dx^j$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

5/29

با استفاده از اصطلاحات هیدرودینامیک:

E_{ij} : تانسور کرنش گرین (Green) یا تانسور کرنش در مختصات لاگرانژی
 e_{ij} : تانسور کرنش آلمانسی (Almansi) یا تانسور کرنش در مختصات اولری
 ویژگی های E_{ij} و e_{ij}

۱. تانسور بودن
 اثبات: از معادله (11) و با استفاده از قاعده کوشنت، داریم:

(11) $ds^2 - ds_0^2 = 2E_{ij} da^i da^j \rightarrow E_{ij} da^i da^j$: $\left\{ \begin{array}{l} \text{is a covariant} \\ \text{vector like } K_j \end{array} \right\}$

$K_j = E_{ij} da^i \rightarrow E_{ij}$: $\left\{ \begin{array}{l} \text{is covariant} \\ \text{tensor of rank 2} \end{array} \right\}$

۲. متقارن بودن: با توجه به تعریف تانسورهای E_{ij} و e_{ij} می توان نتیجه گرفت که آنها متقارنند.

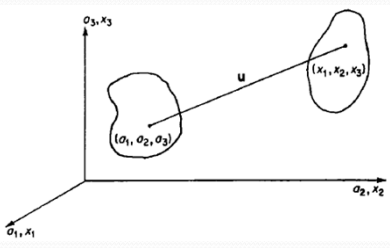
$E_{ji} = \frac{1}{2} (g_{\alpha\beta} \frac{\partial x_\alpha}{\partial a_j} \frac{\partial x_\beta}{\partial a_i} - a_{ji}) = \frac{1}{2} (g_{\beta\alpha} \frac{\partial x_\beta}{\partial a_j} \frac{\partial x_\alpha}{\partial a_i} - a_{ji}) \xrightarrow{\substack{g_{ij}=g_{ji} \\ a_{ij}=a_{ji}}} = \frac{1}{2} (g_{\alpha\beta} \frac{\partial x_\beta}{\partial a_j} \frac{\partial x_\alpha}{\partial a_i} - a_{ij}) = E_{ij}$

(13) $E_{ij} = E_{ji}, \quad e_{ij} = e_{ji}$

نتیجه مهم معادلات (11) و (12) اصل اساسی زیر است:
 شرط لازم و کافی برای این که تغییر شکل یک جسم، حرکت جسم صلب باشد (انتقال و چرخش بدون تغییر فاصله بین ذرات) این است که مؤلفه های تانسور کرنش E_{ij} یا e_{ij} در تمام نقاط جسم صفر باشد. 6/29

برای بیان موقعیت هر ذره از سیستم مختصات منحنی الخط استفاده می‌کنیم:

1. a_1, a_2, a_3 برای موقعیت اولیه
2. X_1, X_2, X_3 برای موقعیت تغییر شکل یافته



دو سیستم مختصات خاص است که کاربرد زیادی دارد:

I. برای هر دو حالت وضعیت اولیه و تغییر شکل یافته از مختصات کارتزین متعامد یکسانی استفاده شود. در این صورت، تانسورهای متریک اقلیدسی بسیار ساده‌اند.

$$(14) \quad g_{ij} = a_{ij} = \delta_{ij}$$

II. مختصات در حالت تغییر شکل یافته را چنان اعوجاج دهیم که مختصات X_1, X_2, X_3 یک ذره از نظر عددی مقداری برابر با a_1, a_2, a_3 در سیستم مختصات اولیه داشته باشد. در این حالت

$$E_{ij} = \frac{1}{2} (g_{\alpha\beta} \frac{\partial x_\alpha}{\partial a_i} \frac{\partial x_\beta}{\partial a_j} - a_{ij}) \quad (9) \quad \text{و معادله } x_i = a_i, \quad \partial x_\alpha / \partial a_i = \delta_{\alpha i}, \quad \partial a_\alpha / \partial x_i = \delta_{\alpha i}$$

و

$$(10) \quad e_{ij} = \frac{1}{2} (g_{ij} - a_{\alpha\beta} \frac{\partial a_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial a_\beta}{\partial x_j}) \quad \text{به شکل زیر در می‌آیند.}$$

$$(15) \quad E_{ij} = e_{ij} = \frac{1}{2} (g_{ij} - a_{ij})$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

7/29

$$(15) \quad E_{ij} = e_{ij} = \frac{1}{2} (g_{ij} - a_{ij})$$

بنابراین وقتی مختصات از حالت اولیه به حالت تغییر شکل یافته اعوجاج پیدا می‌کند، کلیه اطلاعات راجع به کرنش در تغییر تانسور متریک گنجانده شده است.

این حالت خاص به دلایل مختلفی آسان‌ترین انتخاب برای مطالعه تغییر شکل‌های بزرگ است.

مختصات اگر به این شکل انتخاب شود به آن مختصات کانوکت (convected) یا ذاتی (intrinsic) می‌گویند.



گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

8/29

4.2- تانسور کرنش در مختصات کارتزین متعامد

اگر برای هر دو حالت اولیه و تغییر شکل یافته جسم، سیستم مختصات کارتزین متعامد (مستقیم الخط و متعامد) یکسانی انتخاب شود، آنگاه:

$$(1) \quad g_{ij} = a_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{for } i = j \\ 0 & \text{for } i \neq j \end{cases}$$

افزون بر این، اگر بردار تغییر مکان $\vec{u}$ را با مؤلفه‌های

$$(2) \quad u_i = x_i - a_i, \quad i = 1, 2, 3$$

تعریف کنیم، آنگاه:

$$\frac{\partial x_\alpha}{\partial a_i} = \frac{\partial u_\alpha}{\partial a_i} + \delta_{\alpha i}, \quad \frac{\partial a_\alpha}{\partial x_i} = \delta_{\alpha i} - \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i}$$

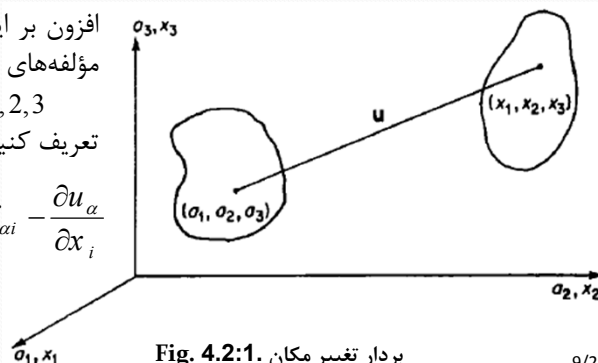


Fig. 4.2:1. بردار تغییر مکان

9/29

تانسورهای کرنش به شکل ساده زیر تبدیل می‌شوند.

$$(3) \quad E_{ij} = \frac{1}{2} \left[\delta_{\alpha\beta} \frac{\partial x_\alpha}{\partial a_i} \frac{\partial x_\beta}{\partial a_j} - \delta_{ij} \right] = \frac{1}{2} \left[\delta_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial a_i} + \delta_{\alpha i} \right) \left(\frac{\partial u_\beta}{\partial a_j} + \delta_{\beta j} \right) - \delta_{ij} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_j}{\partial a_i} + \frac{\partial u_i}{\partial a_j} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial a_i} \frac{\partial u_\alpha}{\partial a_j} \right]$$

و

$$(4) \quad e_{ij} = \frac{1}{2} \left[\delta_{ij} - \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial a_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial a_\beta}{\partial x_j} \right] = \frac{1}{2} \left[\delta_{ij} - \delta_{\alpha\beta} \left(-\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i} + \delta_{\alpha i} \right) \left(-\frac{\partial u_\beta}{\partial x_j} + \delta_{\beta j} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_j} \right]$$



گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

10/29

اگر x, y, z برای x_1, x_2, x_3 ؛ a, b, c برای a_1, a_2, a_3 و u, v, w برای u_1, u_2, u_3 انتخاب شود، شکل گسترش یافته تانسورهای کرنش عبارتند از:

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_j}{\partial a_i} + \frac{\partial u_i}{\partial a_j} + \frac{\partial u_a}{\partial a_i} \frac{\partial u_a}{\partial a_j} \right] \quad e_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_a}{\partial x_i} \frac{\partial u_a}{\partial x_j} \right]$$

$$E_{aa} = \frac{\partial u}{\partial a} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial a} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial a} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial a} \right)^2 \right]$$

$$E_{ab} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial b} + \frac{\partial v}{\partial a} + \left(\frac{\partial u}{\partial a} \frac{\partial u}{\partial b} + \frac{\partial v}{\partial a} \frac{\partial v}{\partial b} + \frac{\partial w}{\partial a} \frac{\partial w}{\partial b} \right) \right]$$

(5)

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right]$$

$$e_{xy} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right]$$

توجه کنید که وقتی که تانسور کرنش **لاگرانژی** ارزیابی می‌شود u, v, w تابعی از a, b, c موقعیت نقاط جسم در حالت بدون کرنش‌اند؛ در حالی که وقتی تانسور کرنش **اولری** ارزیابی می‌شود، آن‌ها تابعی از x, y, z موقعیت نقاط جسم در حالت کرنش یافته‌اند.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

11/29

تانسور کرنش کوچک کوچی (Cauchy)

اگر مؤلفه‌های تغییرمکان u_i آنچنان باشند که مشتقات اول آن‌ها آنقدر کوچک باشند که **مجدور** یا حاصلضرب مشتق جزئی u_i قابل چشم‌پوشی باشد، آنگاه e_{ij} تبدیل به تانسور کرنش کوچک کوچی (Cauchy) می‌شود.

(6)

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right]$$

به شکل گسترش یافته:

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad e_{xy} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right] = e_{yx}$$

(7)

$$e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad e_{xz} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right] = e_{zx}$$

$$e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad e_{yz} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right] = e_{zy}$$

در حالت تغییرمکان کوچک، تفاوت بین تانسورهای کرنش **لاگرانژی** و **اولری** از بین می‌رود، زیرا اگر مشتقات تغییرمکان را در موقعیت قبل از تغییر شکل و یا بعد از آن محاسبه کنیم فرق چندانی نمی‌کند.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

12/29

4.3- تفسیر هندسی مؤلفه‌های تانسور کرنش کوچک

آلمانی e_{ij}

فرض کنید x, y, z یک سیستم مختصات کارتزین متعامد باشد. یک المان خط به طول dx که موازی محور x است در نظر بگیرید ($dy=dz=0$). تغییرات مربع طول این المان خط به سبب تغییر شکل از رابطه (12) به دست می‌آید.

$$ds^2 - ds_0^2 = 2e_{ij} dx^i dx^j \rightarrow ds^2 - ds_0^2 = 2e_{xx} (dx)^2$$

$$\frac{ds}{dx} = ds = dx \quad \text{مختصات بعد از تغییر شکل است.}$$

بنابراین:

$$ds - ds_0 = \frac{2e_{xx}(dx)^2}{ds + ds_0} = \frac{2e_{xx}(ds)^2}{ds + ds_0}$$

اگر فرض کنیم تغییر مکان‌های u, v, w و مؤلفه‌های کرنش e_{ij} کوچک‌اند، آنگاه تفاوت ds و ds_0 تنها یک مقدار کوچک از مرتبه دو خواهد بود. بنابراین مجموع آن‌ها به طور تقریبی برابر است با:

$$ds + ds_0 \cong 2ds$$

و داریم:

$$\frac{ds - ds_0}{ds} = e_{xx}$$



گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

13/29

$$\frac{ds - ds_0}{ds} = e_{xx}$$

و می‌بینیم که e_{xx} نشان دهنده اضافه طول یا تغییر طول بر واحد طول یک بردار موازی محور x است. یک کاربرد از بحث فوق برای یک المان حجم در شکل‌های (Case 1) تشریح شده است.

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

اگر α و β کوچک باشند:

$$\tan(\alpha + \beta) \cong \tan \alpha + \tan \beta \cong \alpha + \beta = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

تغییر زاویه نسبت به ۹۰ درجه

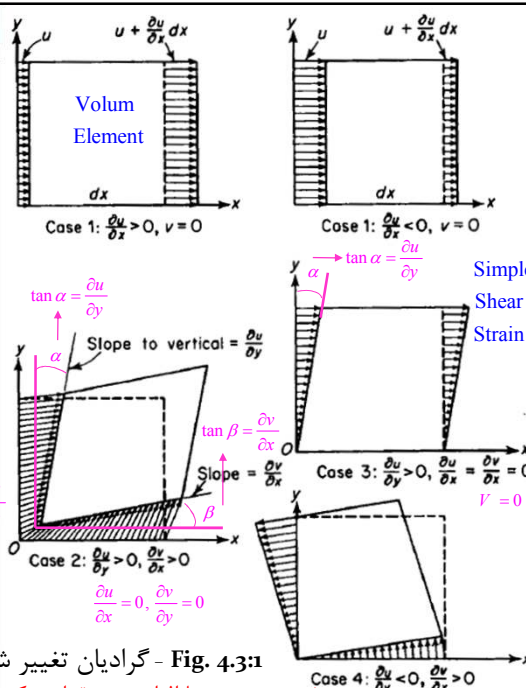


Fig. 4.3:1 - گرادیان تغییر شکل و تفسیر مؤلفه‌های کرنش کوچک

منفی بودن یعنی با افزایش y مقدار u کم می‌شود. (عدد منفی بزرگتر)

14/29

برای اینکه بینیم معنی مؤلفه‌های e_{xy} چیست، یک زاویه قائمه که اضلاع آن dx و dy در جسم فرض کنید. از حالت‌های 2، 3 و 4 شکل 4.3:1 روشن است که مجموع $(\partial u/\partial y) + (\partial v/\partial x)$ نشان‌دهنده تغییر زاویه xOy است که قبل از تغییر، قائمه بوده. بنابراین:

$$e_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \text{ (change of angle } xOy \text{)}.$$

در کاربردهای مهندسی، مؤلفه‌های کرنش e_{ij} ($i \neq j$) دو برابر شده، یعنی $2e_{ij}$ و کرنش برشی یا دتروژن (detrusions) نامیده می‌شوند. این نامگذاری شاید به خاطر حالت 3 شکل 4.3:1 باشد که برش ساده نامیده می‌شود.

e_{ij} ها در $\begin{pmatrix} e_{xx} & e_{xy} \\ e_{yx} & e_{yy} \end{pmatrix}$ تشکیل تانسور می‌دهند ولی در مهندسی که $\gamma_{xy} = 2e_{xy}$ را

کرنش برشی یا دتروژن (detrusions) می‌گویند باید دقت داشت که $\begin{pmatrix} e_{xx} & \gamma_{xy} \\ \gamma_{yx} & e_{yy} \end{pmatrix}$

مؤلفه‌های تانسور نیستند. یعنی نمی‌توان یک رابطه اندیسی نوشت که همه مؤلفه‌ها را بدهد.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

15/29

چرخش کوچک (Infinitesimal Rotation)

کمیت

(Omega) $\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$

چرخش کوچک (infinitesimal rotation) المان $dx dy$ نامیده می‌شود. این اصطلاح با توجه به حالت 4 شکل 4.3:1 نامگذاری شده است.

اگر $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \rightarrow \omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} \text{ or } -\frac{\partial u}{\partial y}$

آنگاه $e_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0$ و ω_z در حقیقت زاویه‌ای است که المان مربع مستطیل به عنوان یک جسم صلب چرخیده است.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

16/29

4.4- چرخش (Rotation)

یک میدان تغییر شکل کوچک $u_i(x_1, x_2, x_3)$ را در نظر بگیرید. از u_i تانسور کارتزین زیر را تشکیل می‌دهیم.

(1) (Omega) $\omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)$ تانسور بودن را از تشکیل تانسور توسط مشتق جزئی از یک بردار می‌توان دریافت.

که پاد متقارن (antisymmetric or skew symmetric) است، یعنی

(2) $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$ یا $\begin{pmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ -\omega_{21} & 0 & \omega_{23} \\ -\omega_{31} & -\omega_{32} & 0 \end{pmatrix}$

در سه بعدی، از یک تانسور پادمتقارن همیشه می‌توانیم یک بردار دوگان (dual) بسازیم:

(3) $\omega_k = \frac{1}{2} e_{kij} \omega_{ij}$, i.e. $\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{curl} \vec{u}$ یادآوری $\text{curl} \vec{u} = \vec{\nabla} \times \vec{u} = e_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}$

زیرا هر دو مؤلفه‌های یکسانی دارند.

e.g. $\omega_1 = \frac{1}{2} e_{1ij} \omega_{ij} = \frac{1}{2} (\omega_{23} - \omega_{32}) = \omega_{23} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right)$

$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{curl} \vec{u}$, $\omega_k = \frac{1}{2} e_{kij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$, e.g. $\omega_1 = \frac{1}{2} e_{1ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right)$



17/29

به همین ترتیب: $\omega_2 = \omega_{31}$, $\omega_3 = \omega_{12}$

طرفین معادله (3) $\omega_k = \frac{1}{2} e_{kij} \omega_{ij}$ را در e_{ijk} ضرب می‌کنیم:

$e_{ijk} \omega_k = \frac{1}{2} e_{ijk} e_{klm} \omega_{lm} = \frac{1}{2} e_{kij} e_{klm} \omega_{lm} = \frac{1}{2} (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \omega_{lm}$

$= \frac{1}{2} (\delta_{il} \omega_{lj} - \delta_{im} \omega_{jm}) = \frac{1}{2} (\omega_{ij} - \omega_{ji})$

اگر ω_{ij} پاد متقارن باشد:

$= \frac{1}{2} [\omega_{ij} - (-\omega_{ij})] = \omega_{ij}$

بنابراین:

(4) $\omega_{ij} = e_{ijk} \omega_k$

بنابراین، ω_{ij} را تانسور دوگان (پادمتقارن) بردار ω_k می‌نامیم. ω_k و ω_{ij} به ترتیب بردار چرخش و تانسور چرخش میدان تغییر شکل u_i نامیده می‌شوند.



معنی فیزیکی ω_{ij} و ω_z

در انتهای بخش 4.3 دیدیم که اگر e_{xy} صفر باشد، ω_z نشانگر چرخش کوچک المان به عنوان یک جسم صلب است. اکنون قضیه کلی زیر را داریم:

شرط لازم و کافی برای همسایگی یک ذره که حرکت یک جسم صلب باشد این است که تانسورهای کرنش متقارن E_{ij} یا e_{ij} صفر باشد.

این نتیجه به سادگی از تعریف تانسورهای کرنش معادلات (11) و (12) به دست می آید. به این شکل که اگر همسایگی یک ذره P مانند یک جسم صلب حرکت کند، طول هر المان از همسایگی تغییر نمی کند، یعنی $ds=ds_0$ و این ایجاب می کند که: $E_{ij}=e_{ij}=0$ باشد.

اثبات: برای هر تانسور متقارن مانند E_{ij} ، یک سیستم مختصات وجود دارد که **عناصر غیرقطری صفرند**. در این حالت عناصر قطر همان مقادیر ویژه هستند.

از معادله (11) داریم:

$$ds^2 - ds_0^2 = 2E_{ij}da^i da^j$$

$$ds^2 - ds_0^2 = \Lambda_1 da_1^2 + \Lambda_2 da_2^2 + \Lambda_3 da_3^2$$

که Λ_i (Capital of λ) مقادیر ویژه E_{ij} اند. اگر برای هر المان خط $ds=ds_0$ باشد یعنی ds بتواند برابر da_1 یا da_2 یا da_3 باشد، این دلالت می کند بر اینکه Λ_i ($i=1,2,3$) صفر باشند که به نوبه خود دلالت می کند بر اینکه $E_{ij}=0$. به طور مشابه اثبات می شود که $e_{ij}=0$.

19/29

بر عکس، اگر E_{ij} یا e_{ij} در نقطه P **صفر** باشند، طول المان خطی که هر دو نقطه ای را در همسایگی P به هم متصل کند تغییر نمی کند و همسایگی مانند یک جسم صلب حرکت می کند.

می توان نشان داد که یک میدان تغییر مکان کوچک در همسایگی نقطه ای مانند P می تواند به دو قسمت **تغییر شکل کششی (stretching deformation)** و یک چرخش جسم صلب تجزیه شود.

برای نشان دادن این، نقطه ای مانند P' در همسایگی P در نظر بگیرید. اگر مختصات P و P' به ترتیب x_i و x_i+dx_i باشند، تغییر مکان نسبی P' نسبت به P عبارت است از:

$$(5) \quad du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j$$

این را می توان به شکل زیر نوشت:

$$du_i = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) dx_j + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) dx_j$$

$$= e_{ij}^0 dx_j - \omega_{ij} dx_j$$

اولین جمله طرف راست نشان دهنده یک **تغییر شکل کششی** است که شامل کشش (stretching) (اضافه طول یا کاهش طول) و چرخش (تغییر زوایای قائمه) است (یعنی e_{xx} و e_{xy} که فرض کردیم صفر باشد).

20/29

جمله دوم می‌تواند به شکل زیر نوشته شود.

$$(6) \quad \begin{aligned} -\omega_{ij} dx_j &= \omega_{ji} dx_j \\ &= e_{ijk} \omega_k dx_j \\ &= (\bar{\omega} \times \overline{dx})_i \end{aligned}$$

بنابراین جمله دوم ضرب برداری $\bar{\omega}$ و $\overline{dx}$ است. این دقیقاً چرخش کوچک $|\omega|$ حول محور مار بر P در جهت $\bar{\omega}$ است.

باید یادآور شد که ما خود را محدود به **تغییر مکان‌های کوچک** کرده‌ایم. سنجه‌های زاویه‌ای (angular) و کرنش **تغییر مکان‌های محدود** با روابط پیچیده‌تری به گرادیان‌های تغییر شکل مربوط می‌شوند.



گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

21/29

4.5- مؤلفه‌های تانسور کرنش گرین محدود E_{ij}

Finite Green's Strain Tensor Components E_{ij}

تفسیر هندسی مؤلفه‌های E_{ij} ...

یک سیستم مختصات کارتزین متعامد در نظر بگیرید که نسبت به آن مؤلفه‌های کرنش مانند بخش 4.1، $E_{ij} = \frac{1}{2} (g_{\alpha\beta} \frac{\partial x_\alpha}{\partial a_i} \frac{\partial x_\beta}{\partial a_j} - a_{ij})$ ، تعریف شده باشند.

فرض کنید یک المان خط قبل از تغییر شکل به شکل $da^1=ds_0$ ، $da^2=0$ ، $da^3=0$ باشد. اگر اضافه طول بر واحد طول (extension)، E_1 ، این المان را به شکل زیر تعریف کنیم، داریم:

$$E_1 = \frac{ds - ds_0}{ds_0}$$

یا

$$(1) \quad ds = (1 + E_1) ds_0$$

از معادله (4.1:11) $ds^2 - ds_0^2 = 2E_{ij} da^i da^j$ داریم:

$$(2) \quad ds^2 - ds_0^2 = 2E_{ij} da^i da^j = 2E_{11} (da^1)^2$$

از ترکیب (1) و (2) داریم:



گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

22/29

(3) $(1+E_1)^2 - 1 = 2E_{11}$ یا $E_1 = \sqrt{1+2E_{11}} - 1 \longrightarrow E_1 \cong 1+E_{11} - 1 = E_{11}$

اگر E_{11} کوچک باشد. $(1+2E_{11})^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}(2E_{11}) - \frac{1}{2}E_{11}^2 + \dots \cong 1 + E_{11}$ بسط تیلور

بنابراین داریم:

(4) $E_1 \cong E_{11}$

اهمیت فیزیکی مؤلفه های E_{12}

در یک سیستم مختصات، دو المان خط ds_0 و $d\bar{s}_0$ فرض کنید که در حالت قبل از تغییر شکل بر هم عمودند:

(5) $ds_0 : da^1 = ds_0, da^2 = 0, da^3 = 0,$
 $d\bar{s}_0 : d\bar{a}^1 = 0, d\bar{a}^2 = d\bar{s}_0, d\bar{a}^3 = 0.$

بعد از تغییر شکل این دو المان خط عبارتند از ds و $d\bar{s}$ یا dx^i و $d\bar{x}^i$. اگر ضرب اسکالر دو المان تغییر شکل یافته را تشکیل دهیم داریم:

$$ds d\bar{s} \cos \theta = dx^k d\bar{x}^k = \frac{\partial x_k}{\partial a_i} da^i \frac{\partial x_k}{\partial \bar{a}_j} d\bar{a}^j = \frac{\partial x_k}{\partial a_1} \frac{\partial x_k}{\partial \bar{a}_2} ds_0 d\bar{s}_0$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

23/29

بر اساس رابطه Eq. (4.1:9) $E_{ij} = \frac{1}{2} (g_{\alpha\beta} \frac{\partial x_\alpha}{\partial a_i} \frac{\partial x_\beta}{\partial a_j} - a_{ij})$ طرف راست مربوط به مؤلفه های کرنش E_{12} در مختصات کارترزین متعامد است:

$$2E_{12} = \frac{\partial x_\beta}{\partial a_1} \frac{\partial x_\beta}{\partial a_2}$$

بنابراین:

(6) $ds d\bar{s} \cos \theta = 2E_{12} ds_0 d\bar{s}_0$

اما از معادلات (1) $ds = (1+E_1)ds_0$ و (3) $E_1 = \sqrt{1+2E_{11}} - 1$ داریم:

$$ds = \sqrt{1+2E_{11}} ds_0$$

به طور مشابه داریم: $d\bar{s} = \sqrt{1+2E_{22}} d\bar{s}_0$. بنابراین معادله (6) به شکل زیر در می آید.

(7) $\cos \theta = \frac{2E_{12}}{\sqrt{1+2E_{11}} \sqrt{1+2E_{22}}}$

زاویه θ زاویه بین المان خط ds و $d\bar{s}$ بعد از تغییر شکل است. تغییر زاویه بین دو المان خط که قبل از تغییر شکل عمود بودند (ds_0 بر $d\bar{s}_0$) عبارتست از: $\alpha_{12} = \pi/2 - \theta$

بنابراین از معادله (7) داریم:

(8) $\sin \alpha_{12} = \frac{2E_{12}}{\sqrt{1+2E_{11}} \sqrt{1+2E_{22}}}$

اگر از کرنش ها نسبت به یک بتوان صرف نظر کرد (کوچک باشند) داریم:

(9) $\alpha_{12} \cong 2E_{12}$

24/29

برای مؤلفه‌های کرنش اولری محدود نیز می‌توان تفسیر کاملاً مشابهی انجام داد. اگر اضافه طول (extension)، e_1 ، بر واحد طول تغییر شکل یافته را به شکل زیر تعریف کنیم،

$$(10) \quad e_1 = \frac{ds - ds_0}{ds}$$

در نهایت داریم:

$$(11) \quad e_1 = 1 - \sqrt{1 - 2e_{11}}$$

افزون بر این، اگر انحراف از زاویه قائمه دو المان خط در حالت قبل از تغییر شکل را که بعد از تغییر شکل قائمه می‌شوند با β_{12} نشان دهیم، داریم:

$$(12) \quad \sin \beta_{12} = \frac{2e_{12}}{\sqrt{1 - 2e_{11}} \sqrt{1 - 2e_{22}}}$$

اگر کرنش‌ها آنچنان کوچک باشند که بتوان از آن‌ها نسبت به یک صرفنظر کرد، این معادلات به شکل آشنای زیر در خواهند آمد.

$$e_1 \cong e_{11}, \quad \beta_{12} \cong 2e_{12}$$

گرددآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

25/29

سایر سنج‌های کرنش (Other Strain Measures)

گرادیان‌های تغییر شکل $[\vec{\nabla} \vec{u}]$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} =$$

تانسور کرنش e_{ij}

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}) \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \rightarrow e_{ij}$$

تانسور چرخش ω_{ij}

$$+ \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}) & \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}) \\ -\frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}) & 0 & \frac{1}{2}(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}) \\ -\frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}) & -\frac{1}{2}(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}) & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \omega_{ij}$$

گرددآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

26/29

تانسور کرنش در مختصات عمومی

مسئله ۴.۸ صفحه ۱۲۵ کتاب:

$$\vec{u} = u^i \vec{g}_i = u_i \vec{g}^i$$

بردار تغییر مکان: a_1, a_2, a_3 را در نظر بگیرید.

مختصات قبل از تغییر شکل a_1, a_2, a_3 را در نظر بگیرید.
تانسور کرنش گرین در کارتزین عبارت است از:
بنابراین در مختصات عمومی عبارت است از:

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_j}{\partial a_i} + \frac{\partial u_i}{\partial a_j} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial a_i} \frac{\partial u_\alpha}{\partial a_j} \right]$$

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left[u_j|_i + u_i|_j + u^k|_i u_k|_j \right]$$

که در آن $u_i|_j$ عبارت است از مشتق کوارینت u_i نسبت به a_j .
دلیل ظاهر شدن تانسور مخلوط در اسلاید بعد

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_j} \right]$$

مختصات اولری x_1, x_2, x_3 را در نظر بگیرید.
تانسور کرنش آلمانی در کارتزین عبارت است از:
بنابراین در مختصات عمومی عبارت است از:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left[u_j||_i + u_i||_j - u^k||_i u_k||_j \right]$$

که دو خط برای نشان دادن این است که u_i, u^i و مشتقات کوارینت در مختصات x_i است.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

27/29

نکته‌ای در ارتباط با ظاهر شدن تانسور مخلوط E_{ij} در $u^k|_i$

رابطه را در سیستم مختصات عمومی $\bar{x}$ نوشته و به سیستم مختصات عمومی x تبدیل می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \bar{u}(k, i) \bar{u}^k|_i &\equiv \bar{E}_{ij} = \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^j} E_{rs} = \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^j} u(\alpha, r) u_\alpha|_s \\ &= \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^j} u(\alpha, r) \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \bar{x}^\beta}{\partial x^s} \bar{u}_k|_\beta \end{aligned}$$

$$\left[\bar{u}(k, i) - \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^\alpha} u(\alpha, r) \right] \bar{u}_k|_j = 0$$

$$\bar{u}(k, i) = \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^\alpha} u(\alpha, r)$$

$$u(\alpha, r) \rightarrow u^k|_i$$

مؤلفه‌های تانسور کرنش کوچک در مختصات استوانه‌ای و کروی را
در آینده به دست می‌آوریم.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

28/29

مسائل زیر را حل کرده و تا دو هفته دیگر تحویل فرمایید:

5) 3,12,13,14,15,17

مسائل از کتاب دوم Fung که از سایت آموزش مجازی قابل دسترسی است.

تمرین‌های قبلی:

- 2) 1,2,5,6,10, and A₁-A₁₂, 2) 12-23, 25-32
 3) 8,11,13,14 , 3) 1,2,3, 4) 2,16,17,19 3) 6,7,8
 3) 9