

## 3.6- تنش صفحه‌ای (Plane State of Stress)

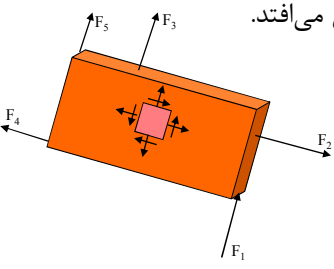
© M.H. Abolbashari, Ferdowsi University of Mashhad

حالتی از تنش که در آن:

$$\tau_{33} = \tau_{31} = \tau_{32} = 0$$

(1) است را **حالت تنش صفحه‌ای** در صفحه  $X_1X_2$  می‌نامند.

در یک صفحه نازک که در صفحه میانی‌اش تحت نیروهای صفحه‌ای قرار گرفته **حالت تنش صفحه‌ای** اتفاق می‌افتد.



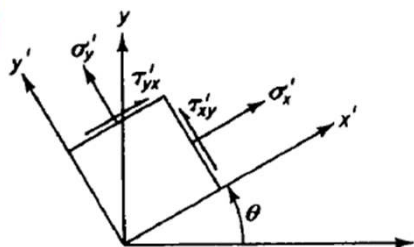


Fig. 3.6:1. Change of coordinates in plane state of stress.

در این حالت، کسینوس دایرکتوری‌های بین دو سیستم مختصات کارتزین متعامد می‌تواند با یک زاویه  $\theta$  بیان شود همچنانکه در شکل 3.6:1 نشان داده شده است. داریم:

$$(\beta_{ij}) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2/26

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

با نوشتن  $x, y$  و  $x', y'$  به جای  $x_1, x_2$  و  $x'_1, x'_2$  و همچنین  $\sigma_x$  برای  $\tau_{11}$  و  $\tau_{xy}$  برای  $\tau_{12}$  داریم:

$$\tau'_{km} = \tau_{ji} \beta_{kj} \beta_{mi}$$

$$\tau'_{11} = \sigma'_x = \tau_{ji} \beta_{1j} \beta_{1i} = \tau_{11} \beta_{11} \beta_{11} + \tau_{12} \beta_{11} \beta_{12} + \tau_{21} \beta_{12} \beta_{11} + \tau_{22} \beta_{12} \beta_{12}$$

$$\sigma'_x = \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta$$

$$\sigma'_y = \sigma_x \sin^2 \theta + \sigma_y \cos^2 \theta - 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta$$

به طور مشابه:

$$\tau'_{xy} = (-\sigma_x + \sigma_y) \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

از آنجا که

$$\sin^2 \theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta), \quad \cos^2 \theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$$

می توان نوشت:

$$\sigma'_x = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\sigma'_y = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\tau'_{xy} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

3/26

توجه شود که:

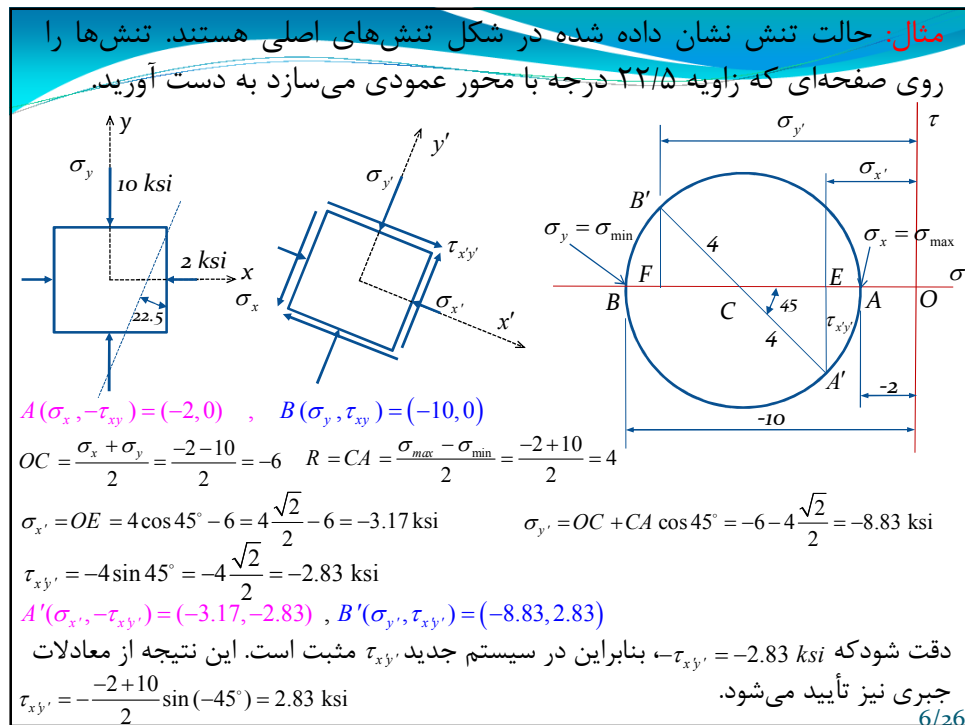
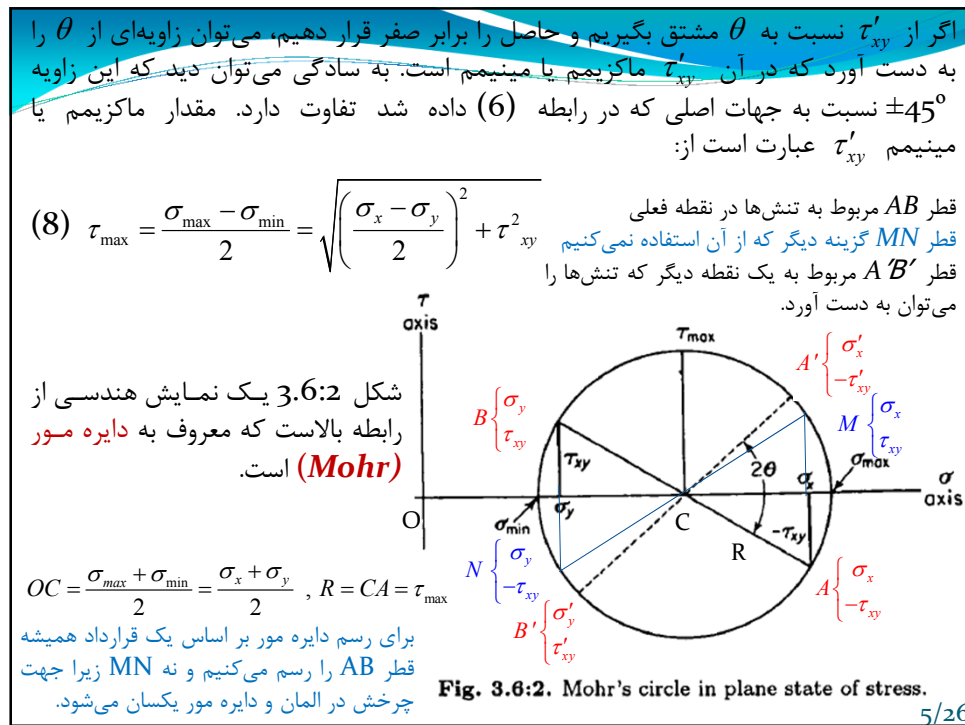
(4)  $\sigma'_x + \sigma'_y = \sigma_x + \sigma_y$

(5)  $\frac{\partial \sigma'_x}{\partial \theta} = -2\sigma_x \sin \theta \cos \theta + 2\sigma_y \sin \theta \cos \theta + 2\tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = 2\tau'_{xy}$

(6)  $\tau'_{xy} = 0$  when  $\tan 2\theta = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$

جهتی که با مقدار مشخص  $\theta$  در (6) داده می شود **جهات اصلی** و تنش های قائم مربوط **تنش های اصلی** نامیده می شود (بخش بعدی). از (5) و (6) نتیجه می شود که تنش های اصلی مقادیر تنش های قائم ماکزیمم و مینیمم اند.

(7) 
$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{\max} \\ \sigma_{\min} \end{array} \right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}$$



مسائل زیر را حل کرده و تا دو هفته دیگر تحویل فرمایید:

3) 1,2,3

مسائل از کتاب اصلی

تمرین‌های قبلی:

2) 1,2,5,6,10, and A1-A12, 2) 12-23, 25-32

3) 8,11,13,14

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

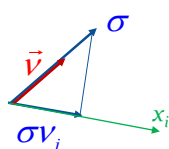
7/26

### 3.7- تنش‌های اصلی (Principal Stresses)

در حالت کلی، بردار تنشی که روی یک سطح، که بردار عمود به طرف خارج سطح آن  $\vec{v}$  است، اثر می‌کند، به جهت  $\vec{v}$  بستگی دارد.

سؤال این است که در چه جهتی از  $\vec{v}$ ، بردار تنش عمود بر سطح می‌شود و تنش‌های برشی صفرند.

چنین صفحه‌ای **صفحه اصلی** و بردار عمود بر آن **محور اصلی** و مقدار تنش قائم روی صفحه اصلی **تنش اصلی** نامیده می‌شود.



|                         |                                                                   |
|-------------------------|-------------------------------------------------------------------|
| $\vec{v}$               | بردار یکه در جهت محورهای اصلی                                     |
| $\sigma$                | تنش‌های اصلی                                                      |
| $\sigma v_i$            | مؤلفه‌های بردار تنش روی صفحه‌ای عمود بر $\vec{v}$ و در امتداد $i$ |
| $T_i^v = \tau_{ji} v_j$ | مؤلفه‌های بردار تنش روی صفحه‌ای عمود بر $\vec{v}$ و در امتداد $i$ |

$$\tau_{ij} v_j = \sigma v_i = \sigma \delta_{ji} v_j$$

$$(1) \quad (\tau_{ij} - \sigma \delta_{ji}) v_j = 0, \quad (i = 1, 2, 3)$$

یا

8/26

این سه معادله ( $i=1,2,3$ ) باید برای سه مجهول  $v_1, v_2, v_3$  حل شوند. از آنجا که  $\vec{v}$  یک بردار یکه است باید یک جواب غیر صفری پیدا کنیم که رابطه  $v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 1$  را نیز برآورده سازد.

بنابراین معادله (1) یک معادله مقدار ویژه است.

از آنجا که  $\tau_{ij}$  یک ماتریس حقیقی و متقارن است، یک نتیجه از نظریه ماتریس‌ها را یادآور می‌شویم که می‌گوید سه تنش اصلی حقیقی و سه محور اصلی متعامد (**orthonormal- (orthogonal and of length 1)**) وجود خواهد داشت.

به سبب اهمیت این نتایج، جزئیات دلیل آن را در ادامه شرح می‌دهیم.

معادله (1) در صورتی جواب‌های غیر صفر  $v_1, v_2, v_3$  دارد که اگر و تنها اگر دترمینان ضرایب صفر باشد. یعنی:

$$(2) \quad |\tau_{ij} - \sigma \delta_{ij}| = 0$$

معادله (2) یک معادله درجه سه بر حسب  $\sigma$  است و ریشه‌های آن تنش‌های اصلی‌اند. برای هر تنش اصلی یک بردار یکه  $\vec{v}$  می‌توان به دست آورد. با بسط معادله (2) داریم:

$$(3) \quad |\tau_{ij} - \sigma \delta_{ij}| = \begin{vmatrix} \tau_{11} - \sigma & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} - \sigma & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} - \sigma \end{vmatrix} = -\sigma^3 + I_1 \sigma^2 - I_2 \sigma + I_3 = 0$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

9/26

که در آن

$$I_1 = \tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33}$$

$$(4) \quad I_2 = \begin{vmatrix} \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{32} & \tau_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \tau_{11} & \tau_{13} \\ \tau_{31} & \tau_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} \\ \tau_{21} & \tau_{22} \end{vmatrix}$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{vmatrix}$$

از طرف دیگر، اگر  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  ریشه‌های معادله (3) باشند، می‌توان نوشت:

$$(\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3) = 0$$

می‌توان دید که بین ریشه‌های معادله و ضرایب باید روابط زیر برقرار باشد.

$$(5) \quad \begin{aligned} I_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ I_2 &= \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1 \\ I_3 &= \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \end{aligned}$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

10/26

از آنجا که تنش‌های اصلی حالت فیزیکی تنش در یک نقطه را مشخص می‌کنند، از سیستم محورهای مختصات مستقلند.  
بنابراین، معادله (3) و ضرایب  $I_1, I_2, I_3$  نسبت به انتقال مختصات نامتغیرند (ثابت می‌مانند).  $I_1, I_2, I_3$  نامتغیرهای تانسور تنش‌اند.  
افزون بر این، از آنجا که تنش‌ها حقیقی‌اند، ضرایب  $I_1, I_2, I_3$  و هر ترکیب از آن‌ها نیز حقیقی‌است.

اکنون نشان می‌دهیم که:

برای هر تانسور تنش متقارن

سه تنش اصلی حقیقی و سه صفحه اصلی متعامد وجود خواهد داشت.

این ویژگی مهم وقتی وجود دارد که تانسور تنش متقارن باشد:

$$(6) \quad \tau_{ij} = \tau_{ji}$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

11/26

**اثبات:** اگر  $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$  بردارهای یک‌در امتداد محورهای اصلی با مؤلفه‌های  $v_1, v_2, v_3$  باشند، آن‌ها به ترتیب جواب‌های معادله (1) مربوط به

ریشه‌های  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  هستند.

$$(7) \quad \begin{aligned} (\tau_{ij} - \sigma_1 \delta_{ij}) v_j &= 0 & v_1, v_2, v_3 &\rightarrow \text{related to } \sigma_1 \\ (\tau_{ij} - \sigma_2 \delta_{ij}) v_j &= 0 & v_1, v_2, v_3 &\rightarrow \text{related to } \sigma_2 \\ (\tau_{ij} - \sigma_3 \delta_{ij}) v_j &= 0 & v_1, v_2, v_3 &\rightarrow \text{related to } \sigma_3 \end{aligned}$$

اگر معادله اول را در  $v_i$  و معادله دوم را در  $v_i$  ضرب کنیم داریم:

$$\begin{aligned} (\tau_{ij} - \sigma_1 \delta_{ij}) v_j v_i &= 0 \\ (\tau_{ij} - \sigma_2 \delta_{ij}) v_j v_i &= 0 \end{aligned}$$

از تفاضل دو معادله داریم:

$$\tau_{ij} v_j v_i - \sigma_1 \delta_{ij} v_j v_i - \tau_{ij} v_j v_i + \sigma_2 \delta_{ij} v_j v_i = 0$$

جمله اول و سوم با هم برابر و مختلف‌العلامه هستند و حذف می‌شوند، و داریم:

$$(8) \quad (\sigma_2 - \sigma_1) v_i v_i = 0$$

$$(9) \quad \tau_{ij} v_j v_i = \tau_{ji} v_j v_i = \tau_{ij} v_i v_j$$

12/26

اکنون اگر به طور آزمایشی فرض کنیم معادله (3)  $-\sigma^3 + I_1\sigma^2 - I_2\sigma + I_3 = 0$  دارای ریشه‌های موهومی است، از آنجا که ضرایب معادله (3) یعنی  $I_1, I_2, I_3$  مقدار حقیقی دارند، هر سه  $\sigma$  نمی‌توانند موهومی باشند زیرا با توجه به حقیقی بودن  $I_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3$  امکان پذیر نیست. از طرفی با توجه به حقیقی بودن  $I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$ ، حداکثر دو تا از آن‌ها می‌توانند موهومی باشد ولی باید آن‌دو مزدوج باشند. اگر  $\sigma_1$  و  $\sigma_2$  موهومی و مزدوج باشند:

$$\sigma_1 = \alpha + i\beta, \quad \sigma_2 = \alpha - i\beta, \quad \sigma_3$$

که در آن  $\alpha, \beta \neq 0, \sigma_3$  اعداد حقیقی اند و  $i$  نشان دهنده عدد موهومی  $\sqrt{-1}$  است.

در این حالت معادلات (7) نشان می‌دهند که  $\nu_j^1$  و  $\nu_j^2$  موهومی و مزدوجند و می‌توان آن‌ها را به شکل زیر نوشت:

$$\nu_j^1 \equiv a_j + ib_j, \quad \nu_j^2 \equiv a_j - ib_j$$

که در آن  $a_j$  و  $b_j \neq 0$  اعداد حقیقی اند.

**اثبات:** اگر  $(\tau_{ij} - \sigma_1\delta_{ji})\nu_j^1 = 0$  باشد، مزدوج آن نیز صفر است.  $(\tau_{ij} - \sigma_1\delta_{ji})\nu_j^1 = 0$

$$\overline{\tau_{ij}} = \tau_{ij}, \quad \overline{\delta_{ij}} = \delta_{ij}$$

از آنجا که  $\tau$  و  $\delta$  مقادیر حقیقی دارند، بنابراین:

$$(\tau_{ij} - \overline{\sigma_1}\delta_{ji})\overline{\nu_j^1} = 0$$

13/26

اما فرض کرده بودیم  $\sigma_1 = \sigma_2$  بنابراین:

اگر این معادله را با معادله دوم از (7) یعنی  $(\tau_{ij} - \sigma_2\delta_{ji})\nu_j^2 = 0$  مقایسه کنیم داریم:

(زیرا هر دو بردارهای ویژه  $\sigma_2$  می‌باشند و بردارهای ویژه بردارهای یک‌عمود بر صفحه اصلی هستند و صفحه و بردار یک‌عمود منحصراً به فردند)

\*\*\*\*\*

بنابراین حاصلضرب دو مقدار مزدوج عبارت است از:

$$\begin{aligned} \nu_j^1 \nu_j^2 &= (a_j + ib_j)(a_j - ib_j) \\ &= a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 \neq 0 \end{aligned}$$

با توجه به رابطه (8) یعنی  $(\sigma_2 - \sigma_1)\nu_j^1 \nu_j^2 = 0$ ، نتیجه می‌شود:

$$\sigma_2 - \sigma_1 = 0 \rightarrow (\alpha - i\beta) - (\alpha + i\beta) = -2i\beta = 0 \rightarrow \beta = 0$$

14/26

این با فرض اولیه که ریشه‌ها موهومی‌اند در تناقض است. بنابراین، فرض وجود ریشه‌های موهومی نامعتبر است و ریشه‌ها نمی‌توانند موهومی فرض شوند و ریشه‌های  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  همه حقیقی‌اند.

وقتی  $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$  معادله (8)  $(\sigma_2 - \sigma_1) v_i^1 v_i^2 = 0$  و معادلات شبیه آن دلالت دارد بر اینکه:

$$(10) \quad v_i^1 v_i^2 = 0, \quad v_i^2 v_i^3 = 0, \quad v_i^3 v_i^1 = 0,$$

یعنی بردارهای اصلی بر هم عمودند.

حالت خاص ۱: اگر  $\sigma_1 = \sigma_2 \neq \sigma_3$  می‌توان بینهایت جفت از بردارهای عمود بر هم  $v_i^1$  و  $v_i^2$  به دست آورد و ثابت کرد که یک  $v_i^3$  وجود دارد که بر  $v_i^1$  و  $v_i^2$  عمود است.

حالت خاص ۲: اگر  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$  (مانند فشار هیدرواستاتیکی) آنگاه، هر مجموعه محورهای متعامد را می‌توان به عنوان محورهای اصلی در نظر گرفت.

توجه: در این حالات خاص تعامد را نمی‌توان نتیجه گرفت. در حالت خاص اول تنها تعامد دو محور اثبات می‌شود.

$$(11) \quad (\tau_{ij}) = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

اگر محورهای مختصات  $x_1, x_2, x_3$  همان محورهای اصلی باشند، آنگاه ماتریس مؤلفه‌های تنش عبارت است از:

15/26

### 3.8- تنش‌های برشی (Shearing Stresses)

دیدیم که روی هر المان سطح با بردار یک عمود خارج از سطح  $v_i$ ، ترکشن  $T_i^v$  ( $T_i^v = \tau_{ji} v_j$ ) اثر می‌کند. مؤلفه‌های  $T_i^v$  در جهت  $\vec{T}$ ، تنش قائم روی المان سطح است. این تنش قائم را با  $\sigma(n)$  نشان می‌دهیم. از آنجا که مؤلفه‌های یک بردار در امتداد یک بردار دیگر از ضرب اسکالر دو بردار به دست می‌آید، داریم:

$$(1) \quad \sigma(n) = \tau_{ji} v_j^i v_i$$

مقدار برآیند تنش برشی روی یک المان سطح که بردار عمود خارج از سطح آن  $v_i$  است از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$(2) \quad \tau^2 = |T_i^v|^2 - \sigma(n)^2,$$

اگر محورهای اصلی به عنوان محورهای مختصات انتخاب شوند، و  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  تنش‌های اصلی باشند، آنگاه:

$$|T_i^v|^2 = (\sigma_1 v_1^i)^2 + (\sigma_2 v_2^i)^2 + (\sigma_3 v_3^i)^2$$

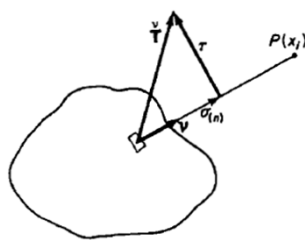


Fig. 3.8:1. Notations.

16/26



و از معادله (1)  $(\sigma_n = \tau_{ji} v_j v_i)$  داریم:

$$\sigma^2_{(n)} = [\sigma_1(v_1)^2 + \sigma_2(v_2)^2 + \sigma_3(v_3)^2]^2$$

با جایگزینی در معادله (2) داریم:

$$\tau^2 = (\sigma_1 v_1)^2 + (\sigma_2 v_2)^2 + (\sigma_3 v_3)^2 - \left[ (\sigma_1 v_1^2)^2 + (\sigma_2 v_2^2)^2 + (\sigma_3 v_3^2)^2 + 2\sigma_1 \sigma_2 v_2^2 v_1^2 + 2\sigma_1 \sigma_3 v_3^2 v_1^2 + 2\sigma_3 \sigma_2 v_2^2 v_3^2 \right]$$

$$= (\sigma_1 v_1)^2 (1 - v_1^2) + (\sigma_2 v_2)^2 (1 - v_2^2) + (\sigma_3 v_3)^2 (1 - v_3^2) - 2\sigma_1 \sigma_2 v_2^2 v_1^2 - 2\sigma_1 \sigma_3 v_3^2 v_1^2 - 2\sigma_3 \sigma_2 v_2^2 v_3^2$$

ولی  $v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 1$

$$= (\sigma_1 v_1)^2 (v_2^2 + v_3^2) + (\sigma_2 v_2)^2 (v_1^2 + v_3^2) + (\sigma_3 v_3)^2 (v_1^2 + v_2^2) - 2\sigma_1 \sigma_2 v_2^2 v_1^2 - 2\sigma_1 \sigma_3 v_3^2 v_1^2 - 2\sigma_3 \sigma_2 v_2^2 v_3^2$$

$$= v_1^2 v_2^2 (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + v_3^2 \left[ (\sigma_1 v_1)^2 + (\sigma_2 v_2)^2 \right] + v_3^2 v_2^2 (\sigma_2 - \sigma_3)^2 - \sigma_2^2 v_2^2 v_3^2 + \sigma_3^2 v_1^2 v_3^2 + v_3^2 v_1^2 (\sigma_3 - \sigma_1)^2 - \sigma_1^2 v_3^2 v_1^2 - \sigma_2^2 v_1^2 v_3^2$$

$$= v_1^2 v_2^2 (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + v_3^2 v_2^2 (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + v_3^2 v_1^2 (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \quad (3)$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

17/26

اکنون اگر به طور آزمایشی فرض کنیم:  $v_1 = v_2 = 1/\sqrt{2}$  و  $v_3 = 0$ ، از معادله (3)

$$\tau^2 = v_1^2 v_2^2 (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + v_3^2 v_2^2 (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + v_3^2 v_1^2 (\sigma_3 - \sigma_1)^2$$

داریم:

$$\tau = \pm \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)}{2}$$

از طرفی از رابطه تنش قائم

$$\sigma^2_{(n)} = [\sigma_1(v_1)^2 + \sigma_2(v_2)^2 + \sigma_3(v_3)^2]^2$$

داریم:

$$\sigma_n = \pm \frac{(\sigma_1 + \sigma_2)}{2}$$

و اینها جوابهای مسئله زیرند که به دست می‌آوریم.

**مسئله 3.4.** نشان دهید  $\tau_{max} = (\sigma_{max} - \sigma_{min})/2$  و صفحه‌ای که  $\tau_{max}$  روی آن اثر می‌کند نسبت به جهت‌های تنش‌های اصلی ماکزیمم و مینیمم زاویه  $45^\circ$  دارد.

برای محاسبه ماکزیمم و یا مینیمم  $\tau$  باید از رابطه (3) نسبت به  $v_1, v_2, v_3$  مشتق بگیریم. ولی این متغیرها از هم مستقل نیستند و با رابطه  $v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 1$  به هم مربوط می‌شوند. می‌توان ثابت کرد که شرط لازم و کافی برای اکستروموم بودن یک تابع مقید (با قید  $h=0$ ) مانند  $g(v)$  این است که تابع لاگرانژین  $f(v, \lambda) = g(v) + \lambda h$  نسبت به کلیه متغیرها و ضریب لاگرانژ  $\lambda$  اکستروموم باشد:

$$f \equiv v_1^2 v_2^2 (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + v_3^2 v_2^2 (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + v_3^2 v_1^2 (\sigma_3 - \sigma_1)^2 + \lambda (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 - 1)$$

18/26

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial v_1} = 0 &\rightarrow 2v_1v_2^2(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + 2v_3^2v_1(\sigma_3 - \sigma_1)^2 + 2\lambda v_1 = 0 \quad (1) \\ \frac{\partial f}{\partial v_2} = 0 &\rightarrow 2v_2v_1^2(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + 2v_3^2v_2(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + 2\lambda v_2 = 0 \quad (2) \\ \frac{\partial f}{\partial v_3} = 0 &\rightarrow 2v_3v_2^2(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + 2v_1^2v_3(\sigma_3 - \sigma_1)^2 + 2\lambda v_3 = 0 \quad (3) \\ \frac{\partial f}{\partial \lambda} = 0 &\rightarrow v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 - 1 = 0 \quad (4) \end{aligned}$$

یک جواب معادله (1)،  $v_1 = 0$  است. در این صورت معادله (2) و (3) عبارت خواهند بود از:

$$v_3^2(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + \lambda = 0 \quad \text{و} \quad v_2^2(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + \lambda = 0 \quad (5)$$

این دو معادله تنها وقتی صادق هستند که  $v_2 = v_3$  و از معادله (4) داریم:

$$0 + v_2^2 + v_3^2 = 1 \rightarrow v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} = v_3$$

با جایگزینی در هر یک از معادلات (5) داریم:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + \lambda = 0 \rightarrow \lambda = -\frac{(\sigma_2 - \sigma_3)^2}{2}$$

19/26

با جایگزینی در معادله (3) داریم:

$$\tau^2 = v_1^2v_2^2(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + v_3^2v_2^2(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + v_3^2v_1^2(\sigma_3 - \sigma_1)^2$$

$$\tau_{\max}^2 = \frac{(\sigma_2 - \sigma_3)^2}{4} \rightarrow \tau_{\max} \quad \text{or} \quad \tau_{\min} = \pm \frac{(\sigma_2 - \sigma_3)}{2}$$

به طریق مشابه وقتی  $v_2 = 0$  یا  $v_3 = 0$  جواب‌های زیر برای  $\tau$  به دست می‌آید:

$$\frac{(\sigma_2 - \sigma_3)}{2}, \frac{(\sigma_3 - \sigma_1)}{2}, \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)}{2}$$

بزرگترین مقدار از سه مقدار فوق مقدار قدر مطلق  $\tau$  خواهد بود که اثبات قسمت اول مسئله است.

جهت عمود بر صفحه‌ای که روی آن تنش برشی ماکزیمم است از مقادیر  $v$  ها به دست می‌آیند.

جواب هر چه باشد داریم:

$$v_i = v_j = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos 45^\circ, \quad i \neq j$$

که نشان دهنده زاویه  $45^\circ$  نسبت به محورهای  $x_i$  و  $x_j$  است.

20/26

مسائل زیر را حل کرده و تا دو هفته دیگر تحویل فرمایید:

4) 2,16,17,19

مسائل از کتاب دوم Fung که از سایت آموزش مجازی قابل دسترسی است.

تمرین‌های قبلی:

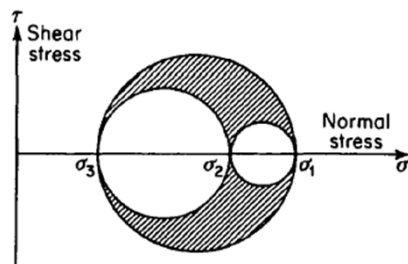
2) 1,2,5,6,10, and A1-A12, 2) 12-23, 25-32  
3) 8,11,13,14 , 3) 1,2,3

### 3.9. دایره مور (Mohr's Circles)

اگر  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  تنش‌های اصلی در یک نقطه مشخصی باشند، آنگاه تنش روی هر المان سطح دیگری از قانون انتقال تانسورها به دست می‌آید.

$$\tau'_{km} = \tau_{ji} \beta_{kj} \beta_{mi} = \tau_{ji} \frac{\partial x'_k}{\partial x_j} \frac{\partial x'_m}{\partial x_i}$$

مور در مقاله‌ای که در سال ۱۸۸۲ و ۱۹۰۰ منتشر کرد، نتایج جالبی را نشان داد که در یک نقطه، اگر تنش قائم  $\sigma(n)$  و تنش برشی  $\tau$  که روی هر المان سطحی (بینهایت صفحه از آن نقطه می‌گذرد) اثر می‌کنند روی یک صفحه مختصات  $\sigma$  و  $\tau$  نشان داده شوند،



مکان هندسی آن‌ها الزاماً روی دامنه (domain) بسته‌ای قرار دارد که در شکل هاشور خورده و با سه دایره که مراکز آن‌ها روی محور  $\sigma$  قرار دارند محصور شده است. اثبات کامل این مطلب در مراجعی که در صفحه ۸۶ کتاب معرفی شده، آمده است.

Fig. 3.9:1. Mohr's circles.

### 3.10- تنش‌های انحرافی (Stress Deviations)

تانسور

$$(1) \quad \tau'_{ij} = \tau_{ij} - \sigma_0 \delta_{ij}$$

تانسور تنش انحرافی نامیده می‌شود که در آن کرانکردلتا و  $\sigma_0$  تنش میانگین است.

$$(2) \quad \sigma_0 = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{3}(\tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33}) = \frac{1}{3}I_1$$

که در آن  $I_1$  اولین نامتغیر تانسور تنش (بخش 3.7) و  $\tau'_{ij}$  انحراف تنش از تنش میانگین است. اولین نامتغیر تانسور تنش انحرافی همیشه صفر است.

$$(3) \quad I'_1 = (\tau'_{11} + \tau'_{22} + \tau'_{33}) = (\tau_{11} - \sigma_0 + \tau_{22} - \sigma_0 + \tau_{33} - \sigma_0) = 0$$

برای به دست آوردن تنش‌های انحرافی اصلی، روش بخش 3.7 را می‌توان به کار برد. معادله دترمینانی

$$(4) \quad |\tau'_{ij} - \sigma' \delta_{ij}| = 0$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

23/26

را می‌توان بسط داد.

$$(5) \quad \sigma'^3 - J_2 \sigma' - J_3 = 0$$

به سادگی می‌توان نشان داد که روابط زیر برای ارتباط  $J_2, J_3$  با نامتغیرهای  $I_2, I_3$  که در بخش 3.7 تعریف شدند وجود دارد.

$$(6) \quad J_2 = 3\sigma_0^2 - I_2$$

$$(7) \quad J_3 = I_3 - I_2 \sigma_0 + 2\sigma_0^3 = I_3 - J_2 \sigma_0 + \sigma_0^3$$

با جایگزینی مقدار  $I_2$  در معادله (6) داریم:

$$J_2 = 3\sigma_0^2 - I_2 = 3\sigma_0^2 - (\tau_{22}\tau_{33} + \tau_{11}\tau_{33} + \tau_{22}\tau_{11} - \tau_{23}^2 - \tau_{13}^2 - \tau_{12}^2)$$

با جایگزینی تنش‌ها با تنش‌های انحرافی معادله (1) داریم:

$$= 3\sigma_0^2 - [(\tau'_{22} + \sigma_0)(\tau'_{33} + \sigma_0) + (\tau'_{11} + \sigma_0)(\tau'_{33} + \sigma_0) + (\tau'_{22} + \sigma_0)(\tau'_{11} + \sigma_0) - \tau_{23}^2 - \tau_{13}^2 - \tau_{12}^2]$$

$$= 3\sigma_0^2 - [\cancel{\tau'_{22}\tau'_{33}} + \sigma_0(\tau'_{22} + \tau'_{33}) + \cancel{\sigma_0^2} + \cancel{\tau'_{11}\tau'_{33}} + \sigma_0(\tau'_{11} + \tau'_{33}) + \cancel{\sigma_0^2} +$$

$$\tau'_{22}\tau'_{11} + \sigma_0(\tau'_{22} + \tau'_{11}) + \cancel{\sigma_0^2} - \tau_{23}^2 - \tau_{13}^2 - \tau_{12}^2]$$

$$= -\tau'_{11}\tau'_{22} - \tau'_{33}\tau'_{22} - \tau'_{11}\tau'_{33} + (\tau_{12})^2 + (\tau_{23})^2 + (\tau_{31})^2 - \sigma_0(\tau'_{22} + \tau'_{33} + \tau'_{11} + \tau'_{33} + \tau'_{22} + \tau'_{11})$$

$$= -\tau'_{11}\tau'_{22} - \tau'_{33}\tau'_{22} - \tau'_{11}\tau'_{33} + (\tau_{12})^2 + (\tau_{23})^2 + (\tau_{31})^2 - \sigma_0(2I'_1)$$

در نتیجه:

$$(8) \quad J_2 = -\tau'_{11}\tau'_{22} - \tau'_{33}\tau'_{22} - \tau'_{11}\tau'_{33} + (\tau_{12})^2 + (\tau_{23})^2 + (\tau_{31})^2$$

24/26

(8)  $J_2 = -\tau'_{11}\tau'_{22} - \tau'_{33}\tau'_{22} - \tau'_{11}\tau'_{33} + (\tau_{12})^2 + (\tau_{23})^2 + (\tau_{31})^2$

داریم:  $I'_1 = \tau'_{11} + \tau'_{22} + \tau'_{33} = 0 \rightarrow I_1'^2 = \tau_{11}'^2 + \tau_{22}'^2 + \tau_{33}'^2 + 2\tau'_{11}\tau'_{22} + 2\tau'_{11}\tau'_{33} + 2\tau'_{22}\tau'_{33} = 0$

$\rightarrow -\tau'_{11}\tau'_{22} - \tau'_{11}\tau'_{33} - \tau'_{22}\tau'_{33} = \frac{1}{2}(\tau_{11}'^2 + \tau_{22}'^2 + \tau_{33}'^2)$

در معادله (8) جایگذاری می‌کنیم:

$$J_2 = \frac{1}{2}[(\tau_{11}')^2 + (\tau_{22}')^2 + (\tau_{33}')^2] + (\tau_{12})^2 + (\tau_{23})^2 + (\tau_{31})^2$$

$$= \frac{1}{2}[(\tau_{11} - \sigma_0)^2 + (\tau_{22} - \sigma_0)^2 + (\tau_{33} - \sigma_0)^2] + (\tau_{12})^2 + (\tau_{23})^2 + (\tau_{31})^2$$

$$= \frac{1}{2}[\tau_{11}^2 + \tau_{22}^2 + \tau_{33}^2 - 2\sigma_0(\tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33}) + 3\sigma_0^2] + (\tau_{12})^2 + (\tau_{23})^2 + (\tau_{31})^2$$

$$= \frac{1}{2}[(\tau_{11}^2 + \tau_{22}^2 + \tau_{33}^2) - 2(\frac{1}{3})(\tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33})^2 + 3(\frac{1}{9})(\tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33})^2] + (\tau_{12})^2 + (\tau_{23})^2 + (\tau_{31})^2$$

$$= \frac{1}{2}[(\tau_{11}^2 + \tau_{22}^2 + \tau_{33}^2) + (\tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33})^2(-\frac{2}{3} + \frac{1}{3})] + (\tau_{12})^2 + (\tau_{23})^2 + (\tau_{31})^2$$

$$= \frac{1}{2}[(\tau_{11}^2 + \tau_{22}^2 + \tau_{33}^2) - \frac{1}{3}(\tau_{11}^2 + \tau_{22}^2 + \tau_{33}^2 + 2\tau_{11}\tau_{22} + 2\tau_{22}\tau_{33} + 2\tau_{11}\tau_{33})] + (\tau_{12})^2 + (\tau_{23})^2 + (\tau_{31})^2$$

$$= \frac{1}{6}[3\tau_{11}^2 + 3\tau_{22}^2 + 3\tau_{33}^2 - (\tau_{11}^2 + \tau_{22}^2 + \tau_{33}^2 + 2\tau_{11}\tau_{22} + 2\tau_{22}\tau_{33} + 2\tau_{11}\tau_{33})] + (\tau_{12})^2 + (\tau_{23})^2 + (\tau_{31})^2$$

$$= \frac{1}{6}[(\tau_{11} - \tau_{22})^2 + (\tau_{22} - \tau_{33})^2 + (\tau_{33} - \tau_{11})^2] + (\tau_{12})^2 + (\tau_{23})^2 + (\tau_{31})^2 = \frac{3}{2}\tau_0^2$$

25/26

در حالی که:

$$\tau_0^2 = \frac{1}{9}[(\tau_{11} - \tau_{22})^2 + (\tau_{22} - \tau_{33})^2 + (\tau_{33} - \tau_{11})^2] + \frac{2}{3}[(\tau_{12})^2 + (\tau_{23})^2 + (\tau_{31})^2]$$

کمیت  $\tau_0$  تنش هشت وجهی (octahedral stress) است که در بخش بعدی کتاب تعریف می‌شود و ما در اینجا آن را مطرح نخواهیم کرد.

همچنین اگر بسط  $|\tau'_{ij} - \sigma'\delta_{ij}| = 0$  را به شکل  $\sigma'^3 - J_2\sigma' - J_3 = 0$  بنویسیم، مقدار  $J_2$  و  $J_3$  به شکل زیر به دست می‌آیند:

(9)  $J_2 = \frac{1}{2}\tau'_{ij}\tau'_{ij}$

(10)  $J_3 = \frac{1}{3}\tau'_{ij}\tau'_{jk}\tau'_{ki}$

به سادگی می‌توان نشان داد که تنش‌های انحرافی اصلی عبارتند از:

(11)  $\sigma'_i = \sigma_i - \sigma_0$

26/26

مسائل زیر را حل کرده و تا دو هفته دیگر تحویل فرمایید:

3) 6,7,8

مسائل از کتاب اصلی صفحات ۸۹-۹۰

تمرین‌های قبلی:

2) 1,2,5,6,10, and  $A_1-A_{12}$ , 2) 12-23, 25-32

3) 8,11,13,14 , 3) 1,2,3, 4) 2,16,17,19