

CHAPTER

10

Third Edition

MECHANICS OF MATERIALS

Ferdinand P. Beer
E. Russell Johnston, Jr.
John T. DeWolf

Lecture Notes:
J. Walt Oler
Texas Tech University

پایداری سازه‌ها:
کمانش ستون‌ها

© M.H. Abolbashari, Ferdowsi University of Mashhad

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

Third Edition

MECHANICS OF MATERIALS

Beer • Johnston • DeWolf

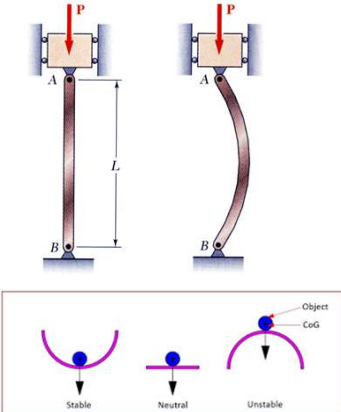


Figure 2. Equilibrium conditions of an object

پایداری سازه‌ها

- در طراحی ستون‌ها، مساحت و یا هندسه سطح مقطع چنان انتخاب می‌شود که (3S رعایت شود):
 - تنش از تنش مجاز بیشتر نشود.
- معیار مقاومت (Strength)

$$\sigma = \frac{P}{A} \leq \sigma_{all}$$
- تغییر شکل محدود باشد.
 - معیار سختی (Stiffness)

$$\delta = \frac{PL}{AE} \leq \delta_{spec}$$
- با برآورده شدن دو معیار فوق، ممکن است ستون در بارگذاری ناپایدار باشد و بطور ناگهانی کاملاً خم شده و یا اصطلاحاً کمانش نماید.
- معیار پایداری (Stability)

$$P < P_{cr}$$

پایداری یک سازه را به صورت توانایی تحمل یک بار مشخص بدون تغییر ناگهانی در وضعیتش تعریف می‌کنیم. پدیده ناپایداری سازه‌ها تنها هنگامی که تنش‌های فشاری وجود دارند ممکن است اتفاق بیفتد مانند ستون‌ها مخازن خلأ، زیردریایی‌ها، لوله‌های جدارنازک و موشک‌ها.

انواع تعادل پایدار و خنثی و ناپایدار

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

10 - 2/34

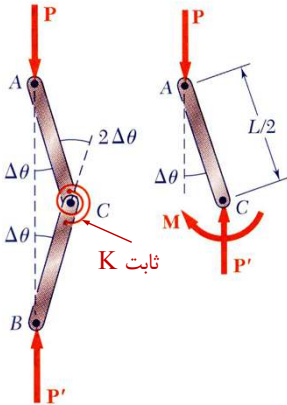
Third Edition

MECHANICS OF MATERIALS

Beer • Johnston • DeWolf

McGraw Hill

پایداری سازه‌ها (ادامه)



- مدلی با دوميله و يك فنر پيچشي با ثابت K در نظر بگيريد. بعد از يك اختلال $\Delta\theta$ (تغيير شكل كوچكي نسبت به حالت تعادل) داريم:
- گشتاور ذخيره شده: $K(2\Delta\theta) = \text{restoring moment}$
- گشتاور ناپايدار كننده: $P \frac{L}{2} \sin \Delta\theta \cong P \frac{L}{2} \Delta\theta = \text{destabilizing moment}$
- ستون در صورتي **پايدار** است (تمايل به برگشت به حالت مستقيم خود دارد) كه:

$$P \frac{L}{2} \Delta\theta < K(2\Delta\theta)$$

$$P < P_{cr} = \frac{4K}{L}$$

McGraw Hill

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

10 - 3/34

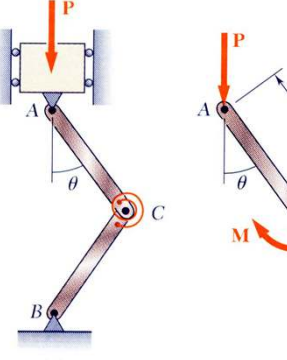
Third Edition

MECHANICS OF MATERIALS

Beer • Johnston • DeWolf

McGraw Hill

پایداری سازه‌ها (ادامه)



- فرض كنيد بار P وارد می‌شود. بعد از يك اختلال، سیستم به يك موقعیت جدیدی از تعادل می‌رسد كه تغییر شكل زاویه‌ای مشخصی دارد.
- $P \frac{L}{2} \sin \theta = K(2\theta)$
- $\frac{PL}{4K} = \frac{P}{P_{cr}} = \frac{\theta}{\sin \theta}$
- با توجه به اینکه $\sin \theta < \theta$ موقعیت جدید وقتی امکان پذیر است (**ناپايدار** می‌شود) كه: $P > P_{cr}$

McGraw Hill

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

10 - 4/34

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مسئله 10.2 از Beer & Johnston, P536

دو میله صلب AC و BC مطابق شکل به فنری به سختی K متصل شده‌اند. اگر فنر هم در کشش و هم در فشار عمل کند، بار بحرانی P_{cr} سیستم را به دست آورید.

$\Delta_c = \frac{L}{2} \sin(\Delta\theta) \approx \frac{L}{2} \Delta\theta$

$\sum M_C = 0 \rightarrow P_{cr} \Delta_c - R_A \frac{L}{2} = 0$

$\sum M_B = 0 \rightarrow -R_A L + k \Delta_c \frac{L}{2} = 0$

$R_A = \frac{k \Delta_c}{2} = \frac{k}{2} \frac{L}{2} \Delta\theta = \frac{kL \Delta\theta}{4}$

$P_{cr} = \frac{R_A L}{2 \Delta_c} = \frac{\frac{kL \Delta\theta}{4} L}{2 \left(\frac{L}{2} \right) \Delta\theta} = \frac{kL}{4}$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

10 - 5/34

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مسئله 10.5 از Beer & Johnston, P536

اگر در شکل مقابل $m=100$ kg و $h=600$ mm و ثابت هر یک از فنرها $k=3$ kN/m باشد، محدوده مقدار فاصله d که در آن میله AB در موقعیت نشان داده شده پایدار است را به دست آورید. (فنرها هم در کشش و هم در فشار کار می‌کنند).

توجه: در اختلال کم از تفاوت h و d در شکل تغییر یافته چشمپوشی می‌شود.

$\sum M_A = 0$

$(2kd \Delta\theta)d - mg(h \Delta\theta) = 0$

$d^2 = \frac{mgh}{2k}$

برای پایداری:

$m < \frac{2kd^2}{gh}$

$d > \sqrt{\frac{mgh}{2k}} = \sqrt{\frac{100\text{kg}(9.8\text{m/s}^2) \times 600\text{mm}}{2 \times (3000\text{N/m})(\text{m} / 1000\text{mm})}}$

$d > 313.2 \text{ mm}$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

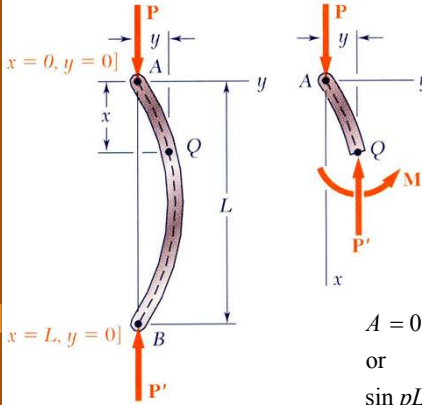
© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

10 - 6/34

MECHANICS OF MATERIALS

Beer • Johnston • DeWolf

رابطه اویلر برای ستون‌های دو سر مفصل



• یک تیر تحت بارگذاری محوری فشاری (ستون) را در نظر بگیرید. بعد از یک اختلال، سیستم به یک موقعیتی از تعادل می‌رسد که داریم:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{EI_z} = -\frac{P}{EI_z} y$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{P}{EI_z} y = 0, \quad \frac{P}{EI_z} = p^2$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + p^2 y = 0, y = A \sin px + B \cos px$$

$$y|_{x=0} = 0 \rightarrow B = 0, y|_{x=L} = 0 \rightarrow A \sin pL = 0$$

• در این حالت $y=0$ و ستون به شکل مستقیم می‌ماند. $A = 0 \rightarrow$

or

• کمترین مقدار p با $n=1$ است. $\sin pL = 0 \rightarrow pL = n\pi$

• توجه کنید که $y_{\max} = A$ نامعین است و A را نمی‌توان از شرایط مرزی به دست آورد و این به سبب استفاده از معادله تقریب خطی $\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{P}{EI_z} y = 0$ (که در آن از $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{EI_z}$ استفاده و از dy/dx صرف نظر شده بود) به جای معادله دیفرانسیل واقعی بود.

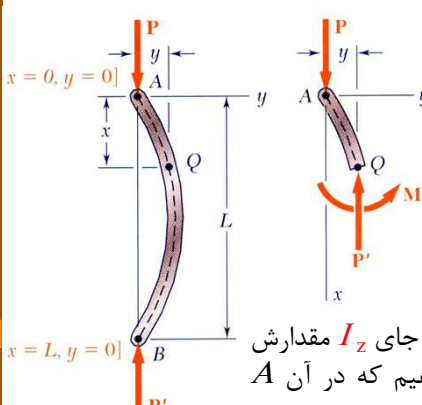
گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 10 - 7/34

MECHANICS OF MATERIALS

Beer • Johnston • DeWolf

رابطه اویلر برای ستون‌های دو سر مفصل (ادامه)



• در این موقعیت (ناپایدار) حل در صورتی به دست می‌آید که:

$$\frac{P}{EI} = p^2 = \frac{\pi^2}{L^2} \rightarrow P > P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_z}{L^2}$$

(برای سیستم پایدار $P < P_{cr}$)

• این رابطه برای کمانش در صفحه xy است.

• برای کمانش در صفحه yz : $P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_x}{L^2}$

• اگر در رابطه اویلر برای کمانش در صفحه xy ، به جای I_z مقدارش را بر حسب شعاع ژیراسیون قرار دهیم که در آن $r_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}}$ مساحت سطح مقطع است:

$$\sigma = \frac{P}{A} > \sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E (Ar_z^2)}{L^2 A} = \frac{\pi^2 E}{(L/r_z)^2}$$

نسبت لاغری (slenderness ratio)

شعاع ژیراسیون در مقاطع دایره‌ای شکل ضریبی از شعاع مقطع (c) است:

$$r_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = \sqrt{\frac{\frac{\pi c^4}{4}}{\pi c^2}} = \frac{c}{2}$$

و در مقاطع مربع مستطیل ضریبی از عمق (d)

$$r_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = \sqrt{\frac{bd^3/12}{bd}} = \frac{d}{\sqrt{12}}$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 10 - 8/34

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

رابطه اویلر برای ستون‌های دو سر مفصل (ادامه)

• مقدار تنش برای بار بحرانی که کمانش اتفاق می‌افتد:

$\sigma_Y = 250 \text{ MPa}$
 $E = 200 \text{ GPa}$
 $\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(L/r)^2}$

ناحیه بحرانی و ناپایدار
ناحیه ایمن و پایدار الاستیک

$P > P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$
 $\sigma = \frac{P}{A} > \sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A}$
 $\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E (Ar^2)}{L^2 A} = \frac{\pi^2 E}{(L/r)^2} = \text{critical stress}$
 $\frac{L}{r} = \text{slenderness ratio}$

نسبت لاغری: r_{min}

تحلیل انجام شده برای بارهای وارد به مرکز مقطع صادق است.

مهم: از آنجا که برای یک طراحی ایمن، تنش باید از تنش بحرانی کمتر باشد، باید تنش بحرانی کوچکتر محاسبه گردد. یعنی در یک طول مشخص شعاع زیراسیون کوچکتر (r_{min}) در رابطه منظور گردد و یا نسبت لاغری بزرگتر

نمودار تنش بر حسب نسبت لاغری برای فولاد سازه‌ای با فرض $\sigma_Y = 250 \text{ MPa}$ و $E = 200 \text{ GPa}$

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 10 - 9/34

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

توسعه رابطه اویلر

• یک ستون که از یک طرف گیردار و از یک طرف آزاد است رفتاری مانند نیمه بالایی یک ستون دو سر مفصل خواهد داشت.

• بارگذاری بحرانی از رابطه اویلر محاسبه می‌شود.

$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2}$
 $\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(L_e/r)^2}$, $L_e = 2L = \text{equivalent length}$
طول معادل

• اگر مقدار L_e/r در صفحه‌ای بزرگتر باشد تنش بحرانی کمتر و کمانش اول در آن صفحه اتفاق می‌افتد.

• تأثیر شکل سطح مقطع:

بار بحرانی باید با قرار دادن $I = I_{min}$ در معادله اویلر محاسبه گردد. اگر کمانش اتفاق بیفتد در صفحه‌ای عمود بر آن محور ماند اتفاق می‌افتد. یعنی اگر در رابطه I_x داشته باشیم که مینیمم باشد، کمانش در صفحه عمود بر آن یعنی yz اتفاق می‌افتد.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالشیری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 10 - 10/34

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

توسعه رابطه اویلر (طول مؤثر در شرایط انتهایی مختلف)

(a) One fixed end, one free end

$L_e = 2L$

(b) Both ends pinned

$L_e = L$

(c) One fixed end, one pinned end

$L_e = 0.7L$

(d) Both ends fixed

$L_e = 0.5L$

می توان گفت L_e در واقع فاصله بین نقاط عطف در منحنی ارتجاعی است.

یک مقایسه: اگر طول همه حالت ها برابر L باشد داریم:

$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2}$

$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$

$P_{cr} = \frac{2.05\pi^2 EI}{L^2}$

$P_{cr} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2}$

بار بحرانی با افزایش گیرداری بیشتر می شود. ← بار بحرانی به شدت کاهش می یابد.

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 10 - 11/34

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مسئله نمونه 10.1

$L = 20 \text{ in.}$

$E = 10.1 \times 10^6 \text{ psi}$

$P = 5 \text{ kips}$

$FS = 2.5$

یک ستون آلومینیومی به طول L و سطح مقطع مستطیلی در انتهای B گیردار و در سر آزاد A بار مرکزی را تحمل می کند. دو صفحه صاف و گردبری شده اجازه حرکت انتهای A را در صفحه تقارن عمودی می دهد و از حرکت آن در صفحات دیگر جلوگیری می کند.

الف) نسبت a/b دو ضلع مقطع را چنان تعیین کنید که ستون کمانش نکند.

ب) سطح مقطع مناسب را برای ستون طراحی کنید.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 10 - 12/34

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مسئله نمونه 10.1 (ادامه)

حل:

- کاراترین طرح وقتی است که مقاومت در مقابل کمانش در هر دو صفحه تقارن برابر باشد. این وقتی اتفاق می افتد که نسبت های لاغری برابر باشند.
- کمانش در صفحه XY : (که ستون یکسر گیردار-یکسر مفصل است و $L_e = 0.7L$)

$$r_z^2 = \frac{I_z}{A} = \frac{\frac{1}{12}ba^3}{ab} = \frac{a^2}{12}, \quad r_z = \frac{a}{\sqrt{12}}$$

$$\frac{L_{e,z}}{r_z} = \frac{0.7L}{a/\sqrt{12}}$$
- کمانش در صفحه XZ : (که ستون یکسر گیردار-یکسر آزاد است و $L_e = 2L$)

$$r_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{\frac{1}{12}ab^3}{ab} = \frac{b^2}{12}, \quad r_y = \frac{b}{\sqrt{12}}$$

$$\frac{L_{e,y}}{r_y} = \frac{2L}{b/\sqrt{12}}$$

کاراترین طراحی:

$$\frac{L_{e,z}}{r_z} = \frac{L_{e,y}}{r_y}$$

$$\frac{0.7L}{a/\sqrt{12}} = \frac{2L}{b/\sqrt{12}}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{0.7}{2} \quad \boxed{\frac{a}{b} = 0.35}$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 10 - 13/34

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مسئله نمونه 10.1 (ادامه)

طراحی: یکی از صفحات کمانش مثلاً صفحه XZ را در نظر می گیریم:

$$\frac{L_{e,y}}{r_y} = \frac{2L}{b/\sqrt{12}} = \frac{2(20 \text{ in})}{b/\sqrt{12}} = \frac{138.6}{b}$$

$$P_{cr} = (FS)P = (2.5)(5 \text{ kips}) = 12.5 \text{ kips}$$

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{12500 \text{ lbs}}{(0.35b)b}$$

از رابطه اوایلر:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(L_{e,y}/r_y)^2} = \frac{\pi^2 (10.1 \times 10^6 \text{ psi})}{(138.6/b)^2}$$

$$\frac{12500 \text{ lbs}}{(0.35b)b} = \frac{\pi^2 (10.1 \times 10^6 \text{ psi})}{(138.6/b)^2}$$

از حل قسمت اول مسئله: $a/b = 0.35$

$L = 20 \text{ in.}$
 $E = 10.1 \times 10^6 \text{ Psi}$
 $P = 5 \text{ kips}$
 $FS = 2.5$

$b = 1.620 \text{ in.}$
 $a = 0.35b = 0.567 \text{ in.}$

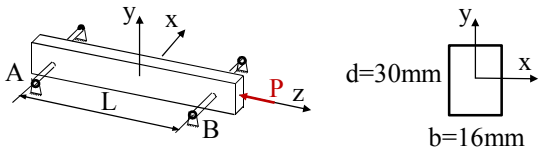
© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 10 - 14/34

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مسئله 11.27 شبیه مسئله ۲۷.۱۰ ویرایش سوم بیر جانسون 2002 ترجمه بهرام پوستی-۱۳۸۲

میله آلومینیومی AB با سطح مقطع مستطیلی 16×30 mm دارای تکیه‌گاه‌های مفصلی مطابق شکل است، آنچنان که تنها چرخش میله حول محور افقی را امکان پذیر می‌نماید. با در نظر گرفتن $E = 70$ GPa، طول L میله را برای بار بحرانی $P_{cr} = 10$ kN به دست آورید.

حل: کمانش‌های احتمالی ممکن است در صفحات XZ و یا YZ اتفاق بیفتد.



کمانش در صفحه XZ

در این صفحه تیر اجازه چرخش ندارد بنابراین دوسر گیردار است و $L_e = 0.5L$

$$r_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{30 \times 16^3}{12 \times 30 \times 16}} = 4.619 \text{ mm}$$

$$\frac{L_e}{r_y} = \frac{(0.5)L}{4.619} = 0.1082L$$

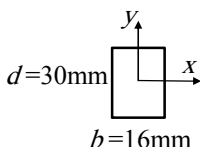
گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 10 - 15/34

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مسئله 11.27 شبیه مسئله ۲۷.۱۰ ویرایش سوم بیر جانسون 2002 ترجمه بهرام پوستی-۱۳۸۲ (ادامه)

کمانش در صفحه YZ : (در رابطه باید از I_x استفاده شود).
در این صفحه تیر دو سر مفصلی است. بنابراین: $L_e = L$



$$r_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{16 \times 30^3}{12 \times 30 \times 16}} = 8.66 \text{ mm}$$

$$\frac{L_e}{r_x} = \frac{L}{8.66} = 0.1155L$$

نسبت لاغری $\frac{L_e}{r}$ بزرگتر که تنش بحرانی کمتر دارد را انتخاب می‌کنیم ($0.1155L$)، یعنی کمانش ابتدا در صفحه YZ اتفاق می‌افتد. برای کمانش در صفحه YZ داریم:

$$I_x = \frac{b \times d^3}{12} = \frac{16 \times 30^3}{12} = 36000 \text{ mm}^4$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_x}{L_e^2}, \quad 10 \times 10^3 = \frac{\pi^2 (70 \times 10^3 \text{ MPa})(36000 \text{ mm}^4)}{L^2}$$

$$L = 1577.07 \text{ mm} = 1.577 \text{ m}$$

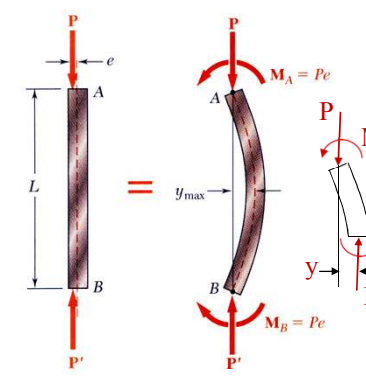
گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 10 - 16/34

MECHANICS OF MATERIALS

Beer • Johnston • DeWolf

بارگذاری خارج از محور؛ رابطه سکانت



- بارگذاری خارج از محور معادل است با یک بار محوری و یک کوپل
- هر بار نامحوری غیر صفر باعث خمش می‌شود. کماتش یعنی آیا تغییر شکل‌ها از حد مجاز بیشترند؟
- تغییر شکل در صورتی محدود است که $P = P_{cr}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-Py - Pe}{EI}$$

$$y_{max} = e \left[\sec \left(\frac{L}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}} \right) - 1 \right]$$

$\sec = \frac{1}{\cos}$

- می‌دانیم که $\sec \left(\frac{\pi}{2} \right) = \infty$ ، بنابراین اگر $\frac{L}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}} = \frac{\pi}{2}$ شود، $y_{max} = \infty$. بنابراین بار بحرانی برابر است با:

$$\frac{L}{2} \sqrt{\frac{P_{cr}}{EI}} = \frac{\pi}{2} \rightarrow P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

که همان رابطه اوایلر است.

- اگر به جای EI از رابطه $P_{cr} = \pi^2 EI / L_e^2$ جایگزین کنیم داریم:

$$y_{max} = e \left[\sec \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{cr}}} \right) - 1 \right]$$

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 10 - 17/34

MECHANICS OF MATERIALS

Beer • Johnston • DeWolf

تنش ماکزیمم

• تنش ماکزیمم

$$\sigma_{max} = \frac{P}{A} + \frac{M_{max}c}{I}, \quad M_{max} = Py_{max} + M_A = P(y_{max} + e)$$

c فاصله دورترین تار تا تار خنثی در مقطع عرضی در وسط تیر است. با جایگذاری مقدار M_{max} در رابطه تنش و استفاده از $I = Ar^2$ داریم:

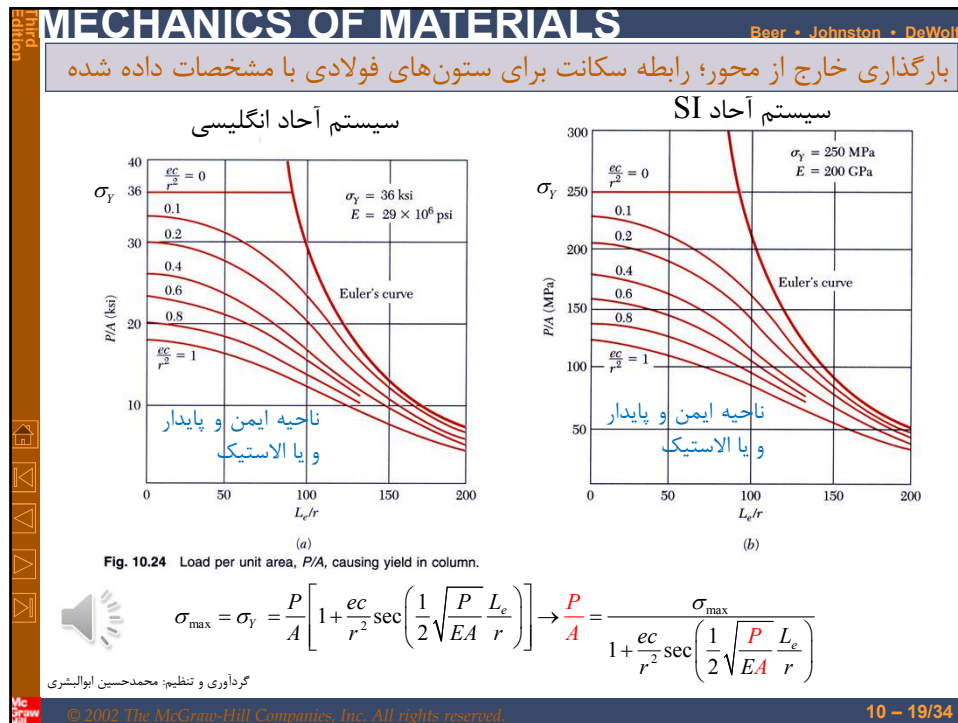
$$\sigma_{max} = \frac{P}{A} \left[1 + \frac{(y_{max} + e)c}{r^2} \right] = \frac{P}{A} \left[1 + \frac{ec}{r^2} \sec \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{P}{EA}} \frac{L_e}{r} \right) \right] \text{ or } \frac{P}{A} \left[1 + \frac{ec}{r^2} \sec \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{cr}}} \right) \right]$$

نکات:

۱. دو معادله فوق را می‌توان برای هر شرایط مرزی به کار برد مشروط به اینکه بار بحرانی و طول معادل مربوطه را استفاده کنیم.
۲. توجه کنید که σ_{max} با بار P به طور خطی تغییر نمی‌کند. بنابراین اصل برهم‌نهی (Superposition) برای محاسبه تنش چندین بار که به طور همزمان اثر کنند را نمی‌توان به کار برد و باید ابتدا نیروی برآیند را محاسبه کرد و سپس تنش را از یکی از دو معادله فوق به دست آورد.
۳. به همان دلیل که در بند ۲ بیان شد، ضریب اطمینان (Factor of safety) را باید برای بارها به کار برد و نه برای تنش‌ها.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 10 - 18/34



$$\sigma_{\max} = \sigma_y = \frac{P}{A} \left[1 + \frac{ec}{r^2} \sec \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{P}{EA}} \frac{L_e}{r} \right) \right] \rightarrow \frac{P}{A} = \frac{\sigma_{\max}}{1 + \frac{ec}{r^2} \sec \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{P}{EA}} \frac{L_e}{r} \right)}$$

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

نکاتی در ارتباط با رابطه سکانت

رابطه سکانت $\frac{P}{A} = \frac{\sigma_{\max}}{1 + \frac{ec}{r^2} \sec \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{P}{EA}} \frac{L_e}{r} \right)}$ برای مقادیر متوسط $\frac{L_e}{r}$ مناسب است. زیرا:

برای مقادیر کوچک $\frac{L_e}{r}$ (که مقدار r نیز بزرگ است) مقدار $\sec(0) = 1$ و در نتیجه:

$\frac{P}{A} = \frac{\sigma_{\max}}{1 + \frac{ec}{r^2}}$ و چون r نیز بزرگ است داریم: $\frac{P}{A} \approx \sigma_{\max}$ یعنی اثرات خیزهای جانبی حذف شده است.

برای مقادیر بزرگ $\frac{L_e}{r}$ از شکل نمودار دیده می‌شود که $\frac{ec}{r^2}$ به طرف منحنی اوپلر نزدیک می‌شود که به معنی کم شدن اثر خارج از مرکزی است.

گرآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

10 – 20/34



MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مسئله نمونه 10.2

(الف) (ب)

ستون یکنواخت به طول 8 ft از یک قوطی ساخته شده است که سطح مقطع آن مطابق شکل می باشد.

(الف) با استفاده از رابطه اویلر و ضریب ایمنی دو، بار مرکزی مجاز ستون و تنش قائم مربوط به آن را به دست آورید.

(ب) فرض کنید باری (بار مجاز) که در بخش (الف) به دست آوردید در نقطه 0.75 in محوره های هندسی ستون اثر کند. تغییر شکل افقی سر بالای ستون و تنش قائم ماکزیمم ستون را به دست آورید.

$E = 29 \times 10^6 \text{ Psi}$.

بیشترین فاصله تا تار خنثی:

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 10 - 21/34

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مسئله نمونه 10.2 (ادامه)

حل: الف)

- ماکزیمم بار محوری مجاز:
- طول مؤثر برای ستون یکسرگیردار و یکسر آزاد:

$$L_e = 2L = 2(8 \text{ ft}) = 16 \text{ ft} = 192 \text{ in.}$$

- بار بحرانی:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2} = \frac{\pi^2 (29 \times 10^6 \text{ Psi})(8.0 \text{ in}^4)}{(192 \text{ in})^2} = 62.1 \text{ kips}$$

- بار مجاز:

$$P_{all} = \frac{P_{cr}}{FS} = \frac{62.1 \text{ kips}}{2} \quad P_{all} = 31.1 \text{ kips}$$

$$\sigma = \frac{P_{all}}{A} = \frac{31.1 \text{ kips}}{3.54 \text{ in}^2} \quad \sigma = 8.79 \text{ ksi}$$

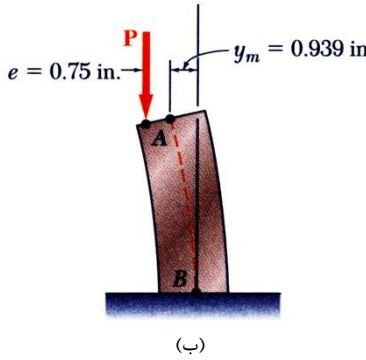
گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 10 - 22/34

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مسئله نمونه 10.2 (ادامه)

• (ب) بار خارج از مرکز
• تغییر شکل سر ستون



$e = 0.75 \text{ in.}$ $y_m = 0.939 \text{ in.}$

(ب)

• تنش قائم ماکزیمم:

$$\sigma_m = \frac{P}{A} \left[1 + \frac{ec}{r^2} \sec \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{cr}}} \right) \right]$$

$$= \frac{31.1 \text{ kips}}{3.54 \text{ in}^2} \left[1 + \frac{(0.75 \text{ in})(2 \text{ in})}{(1.50 \text{ in})^2} \sec \left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}} \right) \right]$$

$\sigma_m = 22.0 \text{ ksi}$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 10 - 23/34

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مسئله 11.34- Beer & Johnston, 1981

خط اثر نیروی محوری 75kips به موازات محور ستون AB است که محور x را در $x = 0.6 \text{ in}$ قطع می کند. با در نظر گرفتن $E = 30 \times 10^6 \text{ Psi}$ ، الف) خیز وسط ستون ب) تنش ماکزیمم در ستون را به دست آورید.

برای خواص W8×35 از جدول پیوست C داریم:

الف: از آنجا که تیر دوسر مفصل محسوب می شود:

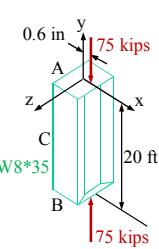
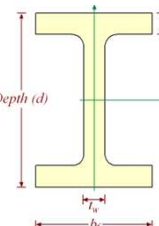
$L = L_e = 20 \text{ ft} = 240 \text{ in}$

- بار بحرانی: با توجه به بار خارج از مرکز، کمانش در صفحه XY اتفاق می افتد.

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_z}{L_e^2} = \frac{\pi^2 (30 \times 10^3 \text{ ksi})(42.6 \text{ in}^4)}{(240 \text{ in})^2} = 218.98 \text{ kips}$$

برای $e = 0.6 \text{ in}$ و $P = 75 \text{ kips}$:

$$y_m = e \left[\sec \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{cr}}} \right) - 1 \right]$$

$$= (0.6) \left[\sec \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{75}{218.98}} \right) - 1 \right] = 0.389 \text{ in}$$



Depth (d) b_f t_w c

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 10 - 24/34

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مسئله 11.34- Beer & Johnston, 1981 (ادامه)

ب: تنش قائم ماکزیمم:

$$\sigma_m = \frac{P}{A} \left[1 + \frac{ec}{r_z^2} \sec \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{cr}}} \right) \right]$$

$$= \frac{75}{10.3} \left[1 + \frac{(0.6)(4.01)}{(2.03)^2} \sec \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{7}{218}} \right) \right]$$

$\sigma_m = 14.29 \text{ ksi}$

یا:

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A} \left[1 + \frac{(y_{\max} + e)c}{r_z^2} \right] = \frac{0.75}{10.3} \left[1 + \frac{(0.389 + 0.6)(4.01)}{(2.03)^2} \right] = 14.29 \text{ ksi}$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 10 - 25/34

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

طراحی ستون‌های تحت بار مرکزی

• تحلیل‌های گذشته تنش‌ها را زیر حد تناسب فرض می‌کرد و ستون‌ها را نیز هموزن و مستقیم در نظر می‌گرفت.

• داده‌های تجربی نشان می‌دهد:

- برای L_e/r بزرگ، σ_{cr} از رابطه اویلر تبعیت می‌کند و به E بستگی دارد ولی به σ_Y بستگی ندارد.
- برای L_e/r کوچک، σ_{cr} همان تنش تسلیم σ_Y است و به E وابسته نیست.
- برای L_e/r میانی، σ_{cr} هم به σ_Y و هم به E وابسته است.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 10 - 26/34

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

طراحی ستون‌های تحت بار مرکزی (ادامه)

انجمن فولاد سازه‌ای آمریکا برای مقدار ضریب اطمینان و محاسبه تنش‌های بحرانی و مجاز پیشنهادهای زیر را ارائه داده است.

فولاد سازه‌ای

انجمن فولاد سازه‌ای آمریکا

محل تلاقی منحنی سهموی و اولر نقطه (B) است که در آن $L/r = C_c$ و $\sigma_{cr} = \sigma_Y/2$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

10 - 27/34

- For $C_c \leq \frac{L_e}{r} \leq 200$

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(L_e/r)^2} \quad \sigma_{all} = \frac{\sigma_{cr}}{FS}$$

$$FS = 1.92$$
- For $\frac{L_e}{r} < C_c < 200$

$$\sigma_{cr} = \sigma_Y \left[1 - \frac{(L_e/r)^2}{2C_c^2} \right] \quad \sigma_{all} = \frac{\sigma_{cr}}{FS}$$

$$FS = \frac{5}{3} + \frac{3}{8} \frac{L_e/r}{C_c} - \frac{1}{8} \left(\frac{L_e/r}{C_c} \right)^3$$
- At $L_e/r = C_c \rightarrow \sigma_{cr} = \frac{1}{2} \sigma_Y$
از رابطه تنش بحرانی $\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(L_e/r)^2}$ داریم:

$$C_c^2 = \frac{2\pi^2 E}{\sigma_Y}$$

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

طراحی ستون‌های تحت بار مرکزی (ادامه)

آلومینیم

انجمن آلومینیم

آلیاژ 6061-T6

$L_e/r \leq 9.5$: $\sigma_{all} = 19 \text{ ksi} = 131 \text{ MPa}$

$9.5 < L_e/r < 66$: $\sigma_{all} = [20.2 - 0.126(L_e/r)] \text{ ksi}$
 $= [139 - 0.868(L_e/r)] \text{ MPa}$

$L_e/r \geq 66$: $\sigma_{all} = \frac{51000 \text{ ksi}}{(L_e/r)^2} = \frac{351 \times 10^3 \text{ MPa}}{(L_e/r)^2}$

آلیاژ 2014-T6

$L_e/r \leq 12$: $\sigma_{all} = 28 \text{ ksi} = 193 \text{ MPa}$

$L_e/r < 55$: $\sigma_{all} = [30.7 - 0.23(L_e/r)] \text{ ksi}$
 $= [212 - 1.585(L_e/r)] \text{ MPa}$

$L_e/r \geq 55$: $\sigma_{all} = \frac{54000 \text{ ksi}}{(L_e/r)^2} = \frac{372 \times 10^3 \text{ MPa}}{(L_e/r)^2}$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

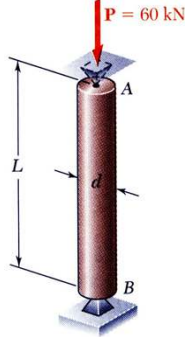
10 - 28/34

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مسئله نمونه 10.4

حل:

- وقتی قطر مجهول است نسبت لاغری را نمی‌توان به دست آورد. باید یک محدوده برای نسبت لاغری فرض کرد.
- قطر مورد نیاز را برای محدوده نسبت لاغری فرض شده محاسبه کنید.
- نسبت لاغری را محاسبه کنید و فرض اولیه را صحت‌گذاری نمایید. در صورت نیاز فرایند را تکرار کنید.



برای ستونی که از آلایژ آلومینیم 2014-T6 ساخته شده، کمترین قطری که می‌توان انتخاب کرد که بار مرکزی $P = 60 \text{ kN}$ را تحمل کند در حالت‌های زیر به دست آورید:
الف) $L = 750 \text{ mm}$ ، ب) $L = 300 \text{ mm}$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 10 – 29/34

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مسئله نمونه 10.4 (ادامه)

- برای $L = 750 \text{ mm}$ ، فرض کنید $L/r > 55$
- شعاع استوانه را به دست آورید:
- برای 2014-T6 داریم: $\sigma_{all} = \frac{P}{A} = \frac{372 \times 10^3 \text{ MPa}}{(L_e/r)^2}$

$$\frac{60 \times 10^3 \text{ N}}{\pi c^2} = \frac{372 \times 10^3 \text{ MPa}}{\left(\frac{0.750 \text{ m}}{c/2}\right)^2} \quad c = 18.44 \text{ mm}$$

- فرض اولیه نسبت لاغری را بررسی کنید:

$$\frac{L_e}{r} = \frac{L}{c/2} = \frac{750 \text{ mm}}{(18.44 \text{ mm}/2)} = 81.3 > 55$$

فرض درست بوده

$d = 2c = 36.9 \text{ mm}$

$c =$ شعاع استوانه
 $r =$ شعاع ژیراسیون
$$= \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{\pi c^4/4}{\pi c^2}} = \frac{c}{2}$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 10 – 30/34

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مسئله نمونه 10.4 (ادامه)

• برای $L = 300 \text{ mm}$ ، فرض کنید $L/r < 55$
 • شعاع استوانه را به دست آورید:
 • در این حالت برای 2014-T6 داریم:

$$\sigma_{all} = \frac{P}{A} = \left[212 - 1.585 \left(\frac{L}{r} \right) \right] \text{ MPa}$$

$$\frac{60 \times 10^3 \text{ N}}{\pi c^2} = \left[212 - 1.585 \left(\frac{0.3 \text{ m}}{c/2} \right) \right] \times 10^6 \text{ Pa}$$

$$c = 12.00 \text{ mm}$$

• فرض اولیه نسبت لاغری را بررسی کنید:

$$\frac{L}{r} = \frac{L}{c/2} = \frac{300 \text{ mm}}{(12.00 \text{ mm})} = 50 < 55$$

• فرض درست بوده

$$d = 2c = 24.0 \text{ mm}$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشیری
 © 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 10 - 31/34

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

روش‌های طراحی ستون‌های تحت بار خارج از مرکز

• بار غیرمرکزی P می‌تواند با یک بار مرکزی P و یک کوپل $M = Pe$ جایگزین شود.
 • تنش قائم را می‌توان از اصل جمع آثار تنش‌های مربوط به بار مرکزی و کوپل به دست آورد:

$$\sigma = \sigma_{centric} + \sigma_{bending}$$

$$\sigma_{max} = \frac{P}{A} + \frac{Mc}{I}$$
 • روش تنش مجاز: یک تنش مجاز برای تنش محوری و کمانش می‌گیریم.

$$\frac{P}{A} + \frac{Mc}{I} \leq \sigma_{all}$$
 در این حالت σ_{all} تنش مجازی است که از روابط کمانش برای بزرگترین نسبت لاغری و بار مرکزی به دست می‌آید، صرفنظر از این که صفحه کمانش با صفحه خمش متناظر باشد یا نباشد. این روش طراحی گاهی خیلی محافظه کارانه است.
 • روش تعاملی: دو تنش مجاز جداگانه در نظر می‌گیریم.

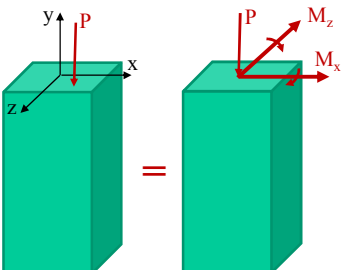
$$\frac{P/A}{(\sigma_{all})_{centric}} + \frac{Mc/I}{(\sigma_{all})_{bending}} \leq 1$$
 برای بار مرکزی و بیشترین نسبت لاغری صرفنظر از صفحه کمانش آن برای بار خمشی به تنهایی

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 10 - 32/34

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

طراحی ستون‌های تحت بار خارج از مرکزی که در صفحه تقارن ستون وارد نشود

• بار غیرمرکزی P می‌تواند با یک بار مرکزی P و دو کوپل M_x و M_z جایگزین شود.



• روش تعاملی:

$$\frac{P/A}{(\sigma_{all})_{centric}} + \frac{|M_x| z_{max}/I_x}{(\sigma_{all})_{bending}} + \frac{|M_z| x_{max}/I_z}{(\sigma_{all})_{bending}} \leq 1$$

برای بار خمشی به تنهایی

برای بار مرکزی و بیشترین نسبت لاغری صرفنظر از صفحه کمانش آن

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 10 - 34/34

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

جدول مقایسه‌ای دو روش طراحی تنش مجاز و تعاملی ستون‌های با بار خارج از مرکز با اعداد مثال 10.4 و 10.5 کتاب Beer & Johnston

روش	تنش مجاز برای کمانش تحت بار مرکزی (ksi)	تنش مجاز بار خمشی (ksi)	بار مجاز محاسبه شده (kips)
تنش مجاز	۱۹.۵۵	-----	۲۲.۳
تعاملی	۱۹.۵۵	۲۴	۲۶.۵

همان‌گونه که در جدول مشاهده می‌شود، طراحی از روش تنش مجاز، محافظه‌کارانه و حداکثر بار مجاز کمتر به دست آمده است.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 10 - 34

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

روابطی که تا کنون معرفی شده:

$$\pm \frac{\sigma_1}{r_1} \pm \frac{\sigma_2}{r_2} = \frac{P}{t}$$

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

$$\sigma_{ave} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \quad R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_{max} = \sigma_{ave} + R, \quad \sigma_{min} = \sigma_{ave} - R$$

$$\sigma_{max,min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

$$X \begin{cases} \sigma_x \\ -\tau_{xy} \end{cases}, Y \begin{cases} \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{cases}$$

$$\tau_{max,min} = R = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\tan 2\theta_s = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}$$

$$\sigma' = \sigma_{ave} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

$$\theta_p - \theta_s = 45^\circ$$

$$\tau_{max} = \pm \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

$\sigma_c < \sigma_b < \sigma_a$

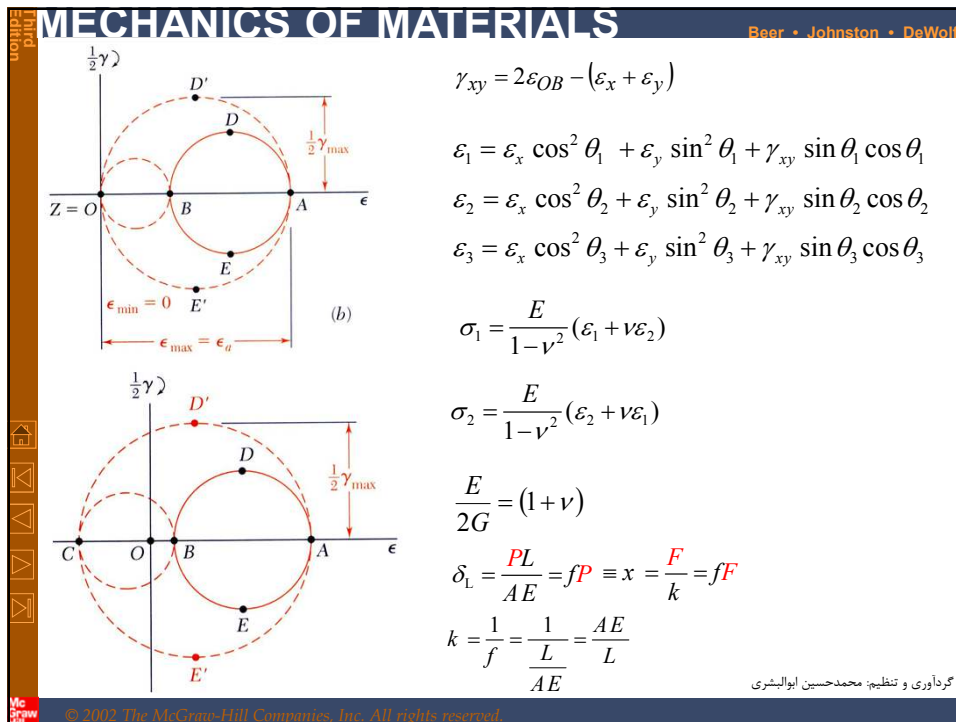
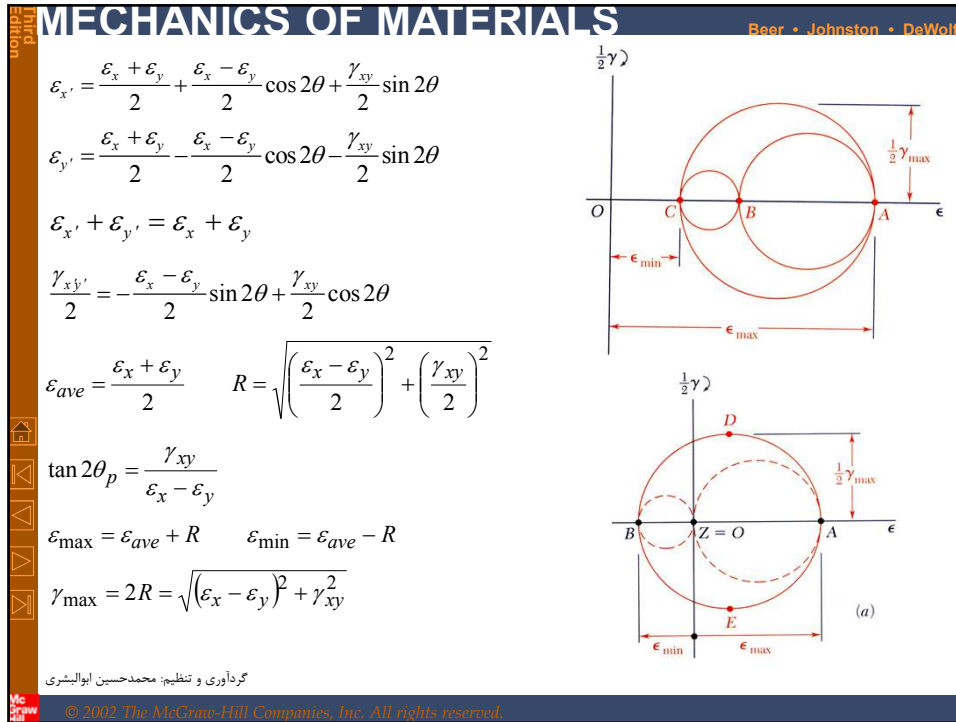
تنش های قائم

$$\sigma_x = \pm \frac{P}{A} \pm \frac{M_z y}{I_z} \pm \frac{M_y z}{I_y}$$

شعاع محور $\tau_{xy} \text{ or } \tau_{xz} = \frac{Tc}{J}$, $\tau_{xy} \text{ or } \tau_{xz} = \frac{VQ}{It}$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.



MECHANICS OF MATERIALS

Beer • Johnston • DeWolf

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{Bmatrix}$$

$$P < P_{cr} = \frac{4K}{L}$$

$$P > P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_z}{L^2}$$

$$\sigma = \frac{P}{A} > \sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E (Ar_z^2)}{L^2 A} = \frac{\pi^2 E}{(L/r_z)^2}$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2}$$

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(L_e/r)^2},$$

$$L_e = 2L, L_e = L, L_e = 0.7L, L_e = L/2$$

$$y_{\max} = e \left[\sec \left(\frac{L}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}} \right) - 1 \right]$$

$$y_{\max} = e \left[\sec \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{cr}}} \right) - 1 \right]$$

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A} + \frac{M_{\max} c}{I},$$

$$M_{\max} = Py_{\max} + M_A = P(y_{\max} + e)$$

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A} \left[1 + \frac{(y_{\max} + e)c}{r^2} \right]$$

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A} \left[1 + \frac{ec}{r^2} \sec \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{P}{EA}} \frac{L_e}{r} \right) \right]$$

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A} \left[1 + \frac{ec}{r^2} \sec \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{cr}}} \right) \right]$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری
© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

MECHANICS OF MATERIALS

Beer • Johnston • DeWolf

فولاد سازه‌ای

- For $C_c \leq \frac{L_e}{r} \leq 200$

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(L_e/r)^2} \quad \sigma_{all} = \frac{\sigma_{cr}}{FS}$$

$$FS = 1.92$$
- For $\frac{L_e}{r} < C_c < 200$

$$\sigma_{cr} = \sigma_Y \left[1 - \frac{(L_e/r)^2}{2C_c^2} \right] \quad \sigma_{all} = \frac{\sigma_{cr}}{FS}$$

$$FS = \frac{5}{3} + \frac{3}{8} \frac{L_e/r}{C_c} - \frac{1}{8} \left(\frac{L_e/r}{C_c} \right)^3$$
- At $L_e/r = C_c \rightarrow \sigma_{cr} = \frac{1}{2} \sigma_Y$

$$C_c^2 = \frac{2\pi^2 E}{\sigma_Y}$$

آلومینیم

- 6061-T6 آلیاژ
 - $L_e/r \leq 9.5$: $\sigma_{all} = 19 \text{ ksi} = 131 \text{ MPa}$
 - $9.5 < L_e/r < 66$: $\sigma_{all} = [20.2 - 0.126(L_e/r)] \text{ ksi}$
 $= [139 - 0.868(L_e/r)] \text{ MPa}$
 - $L_e/r \geq 66$: $\sigma_{all} = \frac{51000 \text{ ksi}}{(L_e/r)^2} = \frac{351 \times 10^3 \text{ MPa}}{(L_e/r)^2}$
- 2014-T6 آلیاژ
 - $L_e/r \leq 12$: $\sigma_{all} = 28 \text{ ksi} = 193 \text{ MPa}$
 - $L_e/r > 12$: $\sigma_{all} = [30.7 - 0.23(L_e/r)] \text{ ksi}$
 $= [212 - 1.585(L_e/r)] \text{ MPa}$
 - $L_e/r \geq 55$: $\sigma_{all} = \frac{54000 \text{ ksi}}{(L_e/r)^2} = \frac{372 \times 10^3 \text{ MPa}}{(L_e/r)^2}$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری
© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

Third Edition

$$\sigma = \sigma_{centric} + \sigma_{bending}$$

$$\sigma_{max} = \frac{P}{A} + \frac{Mc}{I}$$

$$\frac{P}{A} + \frac{Mc}{I} \leq \sigma_{all}$$

$$\frac{P/A}{(\sigma_{all})_{centric}} + \frac{Mc/I}{(\sigma_{all})_{bending}} \leq 1$$

$$\frac{P/A}{(\sigma_{all})_{centric}} + \frac{|M_x| z_{max}/I_x}{(\sigma_{all})_{bending}} + \frac{|M_z| x_{max}/I_z}{(\sigma_{all})_{bending}} \leq 1$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

