

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مثال: برای تیر مقابل محل و مقدار خیز ماکزیمم را به دست آورید. (نکته محاسباتی)

$y(0)=0$
 $M(0)=0$
 $y(L)=0$
 $M(L)=0$

برای قطعه AD $0 < x < a$
 $M_1 - \frac{Pb}{L}x = 0 \rightarrow M_1 = \frac{Pb}{L}x$
 $\frac{d^2y_1}{dx^2} = \frac{M_1}{EI} = \frac{Pb}{EIL}x$
 $\frac{dy_1}{dx} = \frac{Pb}{EIL} \frac{x^2}{2} + A_1$
 $y_1 = \frac{Pb}{EIL} \frac{x^3}{6} + A_1x + A_2$

برای قطعه BD $a < x < L$
 $M_2 + P(x-a) - \frac{Pb}{L}x = 0 \rightarrow M_2 = \frac{Pa}{L}(L-x)$
 $\frac{d^2y_2}{dx^2} = \frac{M_2}{EI} = \frac{Pa}{EI} - \frac{Pa}{EIL}x$
 $\frac{dy_2}{dx} = \frac{Pa}{EI}x - \frac{Pa}{EIL} \frac{x^2}{2} + B_1$
 $y_2 = \frac{Pa}{EI} \frac{x^2}{2} - \frac{Pa}{EIL} \frac{x^3}{6} + B_1x + B_2$

© M.H. Abolbashari, Ferdowsi University of Mashhad 9 - 1 of 31

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مثال: (ادامه)

برای تعیین چهار ثابت A_1, A_2, B_1, B_2 دو شرط مرزی و دو شرط پیوستگی باید مورد استفاده قرار گیرد.

از معادلات (1)، (2) و (3) داریم:

$$A_1 = -\frac{Pb}{6EIL}(L^2 - b^2)$$

$$B_1 = -\frac{Pa}{6EIL}(2L^2 + a^2)$$

$$B_2 = \frac{Pa^3}{6EI}$$

برای قطعه AD داریم:

$$y_1 = \frac{Pb}{6EIL} [x^3 - (L^2 - b^2)x]$$

در صورتی که برای قطعه DB داریم:

$$y_2 = \frac{-Pa}{6EIL} [x^3 - 3x^2L + (2L^2 + a^2)x - La^2]$$

$y_1(0)=0 \rightarrow A_2=0$
 $y_2(L)=0 \rightarrow \frac{PaL^2}{2EI} - \frac{PaL^3}{6EIL} + B_1L + B_2 = 0$
 $\frac{PaL^3}{3EI} + B_1L + B_2 = 0$ (1)

$y_1(a) = y_2(a)$
 $\frac{Pa^3b}{6EIL} + A_1a = \frac{Pa^3}{2EI} - \frac{Pa^4}{6EIL} + B_1a + B_2$ (2)

$\left(\frac{dy_1}{dx}\right)_{x=a} = \left(\frac{dy_2}{dx}\right)_{x=a}$
 $\frac{Pa^2b}{2EIL} + A_1 = \frac{Pa^2}{EI} - \frac{Pa^3}{2EIL} + B_1$ (3)

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 9 - 2 of 31

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مثال: (ادامه)

برای یافتن x نقطه تغییر مکان حداکثر که در محدوده DB قرار می‌گیرد باید مشتق y_2 را برابر صفر قرار دهیم، ولی چون معادله y_1 ساده تر است با فرض $a > b$ مشتق y_1 را برابر صفر قرار می‌دهیم.

$$y_1 = \frac{Pb}{6EI} [x^3 - (L^2 - b^2)x]$$

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{3Pb}{6EI} x^2 - \frac{Pb}{6EI} (L^2 - b^2) = 0$$

$$x = \sqrt{\frac{L^2 - b^2}{3}}$$

$$y_{\max} = \frac{Pb}{EI} \frac{x^3}{6} - \frac{Pb}{6EI} (L^2 - b^2)x$$

$$= \frac{Pb}{EI} (L^2 - b^2)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{18\sqrt{3}} - \frac{1}{6\sqrt{3}} \right)$$

$$= \frac{Pb}{9\sqrt{3}EI} (L^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشیری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

9 - 3 of 31

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

8.4: روش توابع استثنایی

تیر مقابل را در نظر بگیرید.

می‌توان توابع $M_1(x)$ و $M_2(x)$ را با یک عبارت بیان کرد.

$$M(x) = \frac{3P}{4}x - P \left\langle x - \frac{L}{4} \right\rangle$$

براکت (Bracket) وقتی $x < L/4$ باشد حذف و وقتی $x \geq L/4$ باشد با پرانتز معمولی جایگزین می‌شود.

شرایط مرزی را اعمال می‌کنیم:

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3P}{4}x - P \left\langle x - \frac{L}{4} \right\rangle$$

$$EI \theta = EI \frac{dy}{dx} = \frac{3P}{8}x^2 - \frac{1}{2}P \left\langle x - \frac{L}{4} \right\rangle^2 + C_1$$

$$EIy = \frac{P}{8}x^3 - \frac{1}{6}P \left\langle x - \frac{L}{4} \right\rangle^3 + C_1x + C_2$$

در اینجا دقت شود که تنها دو ثابت انتگرال داشتیم و دو شرط مرزی را نوشتیم و نیازی به اعمال شرایط پیوستگی در نقطه D نیست.

$$x = 0 \rightarrow \left\langle x - \frac{L}{4} \right\rangle = 0 \rightarrow C_2 = 0 \quad y|_{x=L} = 0 \rightarrow 0 = \frac{1}{8}PL^3 - \frac{1}{6}P \left(\frac{3L}{4} \right)^3 + C_1L \rightarrow C_1 = -\frac{7PL^2}{128}$$

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

9 - 4 of 31

توابع استثنایی مهم

$\langle x - a \rangle_{-2}$

Unit concentrated moment
Unit doublet function

$\langle x - a \rangle_{-1}$

Unit concentrated load
Unit impulse
Dirac delta function

$\langle x - a \rangle_0$

Unit step

$\langle x - a \rangle_1$

Unit ramp

$\langle x - a \rangle_2$

$M_0 \langle x - a \rangle_{-2}$

$w_0 \langle x - a \rangle_{-1}$

$\omega_0 \langle x - a \rangle_0$

$\frac{\omega_0}{b} \langle x - a \rangle_1$

$\langle x - a \rangle_2$

دقت شود که اندیس‌ها اگر منفی بودند در پایین براکت و در غیر این صورت در بالای براکت که توان براکت است نوشته می‌شوند.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

9 - 5 of 31

مشتق و انتگرال توابع استثنایی

For $n \geq 0$, $\langle x - a \rangle^n = \begin{cases} (x - a)^n & \text{When } x \geq a \\ 0 & \text{When } x < a \end{cases}$

and $\begin{cases} \int_{-\infty}^x \langle x - a \rangle^n dx = \frac{1}{n+1} \langle x - a \rangle^{n+1}, & \text{for } n \geq 0 \\ \frac{d}{dx} \langle x - a \rangle^n = n \langle x - a \rangle^{n-1}, & \text{for } n \geq 1 \end{cases}$

در این حالت براکت مانند پرانتز معمولی است.

For $n < 0$, $\langle x - a \rangle_n = \begin{cases} \infty & \text{When } x = a \\ 0 & \text{When } x > a \\ 0 & \text{When } x < a \end{cases}$ But finite such that

$\begin{cases} \int_{-\infty}^x \langle x - a \rangle_{-2} dx = \langle x - a \rangle_{-1} \\ \int_{-\infty}^x \langle x - a \rangle_{-1} dx = \langle x - a \rangle_0 \end{cases}$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

9 - 6 of 31

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

بیان چند بارگذاری و معادله گشتاور آنها

انتگرال

$q(x) = -M_0 \langle x - a \rangle_{-2}$
 $V(x) = -M_0 \langle x - a \rangle_{-1}$
 $M(x) = -M_0 \langle x - a \rangle^0$

$q(x) = -P \langle x - a \rangle_{-1}$
 $V(x) = -P \langle x - a \rangle^0$
 $M(x) = -P \langle x - a \rangle^1$

گرادآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

9 - 7 of 31

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

بیان چند بارگذاری و معادله گشتاور آنها (ادامه)

انتگرال

$q(x) = -\omega_0 \langle x - a \rangle^0$
 $V(x) = -\omega_0 \langle x - a \rangle^1$
 $M(x) = -\frac{1}{2} \omega_0 \langle x - a \rangle^2$

$q(x) = -|K| \langle x - a \rangle^1$
 $V(x) = -\frac{|K|}{2} \langle x - a \rangle^2$
 $M(x) = -\frac{|K|}{6} \langle x - a \rangle^3$

انتگرال

$q(x) = -K \langle x - a \rangle^n$
 $V(x) = -\frac{K}{n+1} \langle x - a \rangle^{n+1}$
 $M(x) = -\frac{K}{(n+1)(n+2)} \langle x - a \rangle^{n+2}$

گرادآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

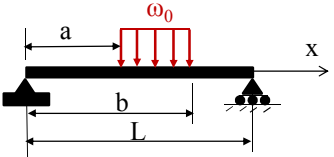
© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

9 - 8 of 31

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

بیان چند بارگذاری و معادله گشتاور آنها (ادامه)

با استفاده از اصل جمع آثار می توان انواع بارها را نوشت.



$$q(x) = -w_0 \langle x - a \rangle^0 + w_0 \langle x - b \rangle^0$$

$$V(x) = -w_0 \langle x - a \rangle^1 + w_0 \langle x - b \rangle^1 + C_1$$

$$M(x) = -\frac{w_0}{2} \langle x - a \rangle^2 + \frac{w_0}{2} \langle x - b \rangle^2 + C_1 x + C_2$$

از شرایط مرزی برای نیروی برشی و لنگر خمشی ثابت های انتگرال به دست می آیند.

شرایط صحت روابط:

۱- سطح زیر بار در تک تک بارگذاری ها و بارگذاری معادل یکی است.

۲- در هر نقطه (به جز نقاط محل اثر نیروهای متمرکز و نقاطی که یک عدم پیوستگی در بار وجود دارد) مقدار نیروی برشی یا ممان خمشی نیز در مجموعه معادل برابر با مجموع آن مقادیر در تک تک آنها است.

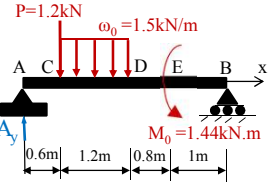
گرآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

9 - 9 of 31

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مثال: معادله بار و نیروی برشی و گشتاور خمشی را برای تیر زیر بنویسید.



$$\sum M_B = 0 \rightarrow -A_y(3.6) + (1.2)(3) + (1.5)(1.2)(2.4) + 1.44 = 0$$

$$A_y = 2.6 \text{ kN}$$

$0 \leq x < 3.6$

بار

$$q(x) = -1.2 \langle x - 0.6 \rangle^{-1} - w_0 \langle x - 0.6 \rangle^0 + w_0 \langle x - 1.8 \rangle^0 - M_0 \langle x - 2.6 \rangle^{-2}$$

$0 \leq x \leq 3.6$

نیروی برشی تیر

$$V(x) = -1.2 \langle x - 0.6 \rangle^0 - w_0 \langle x - 0.6 \rangle^1 + w_0 \langle x - 1.8 \rangle^1 - M_0 \langle x - 2.6 \rangle^{-1} + C_1$$

$$V(x)|_{x=0} = 2.6 \rightarrow C_1 = 2.6$$

گشتاور خمشی تیر

$$M(x) = -1.2 \langle x - 0.6 \rangle^1 - \frac{w_0}{2} \langle x - 0.6 \rangle^2 + \frac{w_0}{2} \langle x - 1.8 \rangle^2 - M_0 \langle x - 2.6 \rangle^0 + 2.6x + C_2$$

$$M(x)|_{x=0} = 0 \rightarrow C_2 = 0$$

گرآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

9 - 10 of 31

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مثال: معادله بار را برای تیر زیر بنویسید.

$q(x) = -\frac{2\omega_0}{L}x + 2\omega_0 < x - \frac{L}{2} >^0$

نکته: در $L/2$ چون عدم پیوستگی وجود دارد نمی‌توان شرط دوم را استفاده کرد. ولی در یک ε قبل و بعد آن صحیح است.

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 9 - 11 of 31

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مثال 11.6 Popov:

معادله منحنی ارتجاعی تیر پیوسته دو دهانه‌ای شکل زیر که به طور یکنواخت بارگذاری شده را از روش توابع استثنایی به دست آورید.

تیر یک درجه نامعین ایستایی دارد. اگر می‌خواستیم از راه انتگرال‌گیری مستقیم معادله را به دست بیاوریم بهتر بود برای کاهش محاسبات، نصف تیر را با شرایط مرزی زیر در نظر می‌گرفتیم.

ولی در روش توابع استثنایی تمام تیر را در نظر می‌گیریم (و این از مزایای این روش است).

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 9 - 12 of 31

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = q(x) = -\omega_0 + R_B < x - L >_{-1}$$

$$EI \frac{d^3 y}{dx^3} = -\omega_0 x + R_B < x - L >^0 + c_1$$

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -\omega_0 \frac{x^2}{2} + R_B < x - L >^1 + c_1 x + c_2$$

$$EI \frac{dy}{dx} = -\omega_0 \frac{x^3}{6} + R_B \frac{< x - L >^2}{2} + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3$$

$$EI y = -\omega_0 \frac{x^4}{24} + R_B \frac{< x - L >^3}{6} + c_1 \frac{x^3}{6} + c_2 \frac{x^2}{2} + c_3 x + c_4$$

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2}(0) = 0 \rightarrow c_2 = 0 \quad EI y(0) = 0 \rightarrow c_4 = 0$$

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مثال 11.6 Popov (ادامه)

$$EIy = -\omega_0 \frac{x^4}{24} + R_B \frac{\langle x - L \rangle^3}{6} + c_1 \frac{x^3}{6} + c_2 \frac{x^2}{2} + c_3 x + c_4$$

$$EIy(L) = 0 \rightarrow -\omega_0 \frac{L^4}{24} + c_1 \frac{L^3}{6} + c_3 L = 0$$

$$EIy(2L) = 0 \rightarrow -\omega_0 \frac{2L^4}{3} + R_B \frac{L^3}{6} + c_1 \frac{4L^3}{3} + 2c_3 L = 0$$

$$EIy''(2L) = 0 \rightarrow -2\omega_0 L^2 + R_B L + 2c_1 L = 0$$

از حل سه معادله آخر داریم:

$$c_1 = \frac{3}{8}\omega_0 L, \quad c_3 = -\frac{\omega_0 L}{48}, \quad R_B = \frac{5\omega_0 L}{4}$$

بنابراین:

$$y = -\frac{\omega_0}{48EI} (2x^4 - 3Lx^3 + L^3x - 10L \langle x - L \rangle^3)$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشیری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

9 - 13 of 31

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

محاسبه خیز و شیب تیرها با استفاده از قضایای مساحت-لنگر

- روش مساحت-لنگر برای مسائلی مفید است که تغییر مکان یا شیب نقاط محدودی از تیر مورد نیاز باشد.
- برتری این روش نسبت به روش انتگرالگیری مستقیم وقتی آشکار می شود که تیر تحت بار متمرکز و یا بارهای گسترده ناپیوسته قرار داشته باشد؛ و یا سطح مقطع تیر متغیر باشد.
- در این روش برای به دست آوردن خیز و شیب از خواص هندسی منحنی الاستیک استفاده می شود.
- یک تیر که تحت یک بارگذاری اختیاری قرار دارد را در نظر بگیرید.

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} \rightarrow d\theta = \frac{M}{EI} dx$$

$$\int_{\theta_c}^{\theta_D} d\theta = \int_{x_c}^{x_D} \frac{M}{EI} dx \rightarrow \theta_D - \theta_C = \int_{x_c}^{x_D} \frac{M}{EI} dx$$

- قضیه اول مساحت-لنگر:**
 $\theta_{D/C} = \Delta$ سطح زیر نمودار (M/EI) بین نقاط C و D

علامت زاویه: یک سطح مثبت (سطحی که بالای محور x قرار دارد) دلالت بر این دارد که وقتی از C به طرف D حرکت کنیم، مماس بر منحنی الاستیک در جهت پادساعتگرد دوران می کند.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشیری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

9 - 14 of 31

MECHANICS OF MATERIALS

Beer • Johnston • DeWolf

قضایای مساحت-لنگر

• مماس بر منحنی الاستیک در P و P' قطاعی به اندازه dt روی عمودی که از C گذشته بوجود می‌آورد.

$$dt = x_1 d\theta$$

$$dt = x_1 \frac{M}{EI} dx$$

$$t_{C/D} = \int_{x_C}^{x_D} x_1 \frac{M}{EI} dx = \bar{x}_1 \times \left(\text{Area under } M/EI \text{ between } C \text{ and } D \right)$$

انحراف مماسی C نسبت به D

$\bar{x}_1$ = فاصله بین مرکز هندسی سطح مزبور و محور قائم مار بر C

• قضیه دوم مساحت-لنگر

انحراف مماسی C نسبت به D برابر است با مماس اول سطح زیر نمودار (M/EI) بین C و D نسبت به محور عمودی مار بر C .

انحراف مماسی D نسبت به C برابر است با مماس اول سطح زیر نمودار (M/EI) بین C و D نسبت به محور عمودی مار بر D .

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

9 - 15 of 31

MECHANICS OF MATERIALS

Beer • Johnston • DeWolf

کاربرد قضایای مساحت-لنگر در تیرهای یکسرگیردار و تیرهایی که بار متقارن دارند

انتخاب مماس مبنا:

• تیر یکسرگیردار:

مماس در A را به عنوان مبنا انتخاب کنید.

$$\theta_D = \theta_{D/A} \quad , \quad y_D = t_{D/A}$$

• تیرهای با تکیه گاه ساده که بار متقارن دارند:

مماس در C را به عنوان مبنا در نظر بگیرید.

$$\theta_D = \theta_{D/C} \quad , \quad y_D = t_{B/C} - t_{D/C}$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

9 - 16 of 31

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مثال:

مطلوب است تعیین شیب و تغییر مکان قائم انتهای B از تیر یک سر گیردار AB. سطح مقطع تیر مستطیلی و ابعاد آن در تمام طول تیر ثابت است. سختی خمشی تیر (EI) برابر است با 10 MN.m^2 .

$$\sum M_A = 0 \rightarrow 90 - 50(3) + M = 0$$

$$M = 60$$

$$M + 60 - 50x = 0 \rightarrow M = 50x - 60$$

$$\frac{x_D}{60} = \frac{3 - x_D}{90} \rightarrow x_D = 1.2 \text{ m}$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

9 - 17 of 31

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مثال (ادامه):

$$\theta_{B/A} = \theta_B - \theta_A = -A_1 + A_2$$

نکته مهم: مساحتها باید جمع جبری شوند.

$$\theta_{B/A} = -(1/2)(1.2\text{m})(6 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1}) + (1/2)(1.8\text{m})(9 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1})$$

$$\theta_{B/A} = 4.5 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

$$\theta_B = \theta_{B/A} = 4.5 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

از آنجا که $\theta_A = 0$

$$t_{B/A} = A_1(2.6\text{m}) + A_2(0.6\text{m})$$

$$t_{B/A} = (-3.6 \times 10^{-3})(2.6\text{m}) + (8.1 \times 10^{-3})(0.6\text{m}) = -4.5\text{mm}$$

چون مماس مبنا در نقطه A افقی است، پس:

$$y_B = t_{B/A} = -4.5\text{mm}$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

9 - 18 of 31

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

استفاده از قضایای مساحت-لنگر در تیرهای نامعین ایستایی

• عکس‌العمل‌ها در تیرهای نامعین ایستایی از بار مجهول در نظر گرفتن قید اضافی و الزام سازگاری تغییر مکان‌ها به دست می‌آید.

• نمودار (M/EI) هر یک از بارها ترسیم شده است. مماس‌های انحرافی با هم جمع شده و الزام سازگاری اعمال می‌شود.

$$t_{B/A} = 0 \rightarrow (t_{B/A})_w + (t_{B/A})_M = 0$$

• با معلوم شدن عکس‌العمل‌ها، شیب و خیز از روش قضایای مساحت لنگر به دست می‌آید.

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 9 - 19 of 31

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مثال: 10-22 Popov

خیز ماکزیمم تیر آلومنیومی کوچک زیر را از روش مساحت لنگر به دست آورید. ثابت صلبیت خمشی EI برابر با 60 N.m^2 است.

عکس‌العمل‌ها را با جهت‌های فرضی دلخواه در نظر می‌گیریم.

مسئله را به دو روش می‌توان حل کرد.

روش اول:

$\sum F_y = 0, R_A'' + R_B'' = 0$

$\sum M_A = 0$

$-M_A + R_B''(0.25) = 0$

$R_B'' = \frac{M_A}{0.25}, R_A'' = -\frac{M_A}{0.25}$

$M + \frac{M_A}{0.25}x - M_A = 0$

$M = -\frac{M_A}{0.25}x + M_A$

$M|_{x=0} = M_A$

$M|_{x=0.25} = 0$

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 9 - 20 of 31

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مثال: 10-22 Popov (ادامه)

مماس بر منحنی الاستیک در A

محور مار بر B

مماس بر منحنی الاستیک در B

$t_{B/A} = 0$

$$\frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} (0.25)(6) \frac{1}{3} (0.25 + 0.1) + \frac{1}{2} (0.25 M_A) \frac{2}{3} (0.25) \right] = 0$$

مساحت مثلث بالایی در ترسیمه گشتاور

فاصله مرکز مثلث بالایی تا محور مار بر B

$M_A = -4.2 \text{ N.m}$

گرآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

9 - 21 of 31

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مثال: 10-22 Popov (ادامه)

با توجه به اینکه مقدار M_A منفی به دست آمد، جهت آن در شکل باید عوض شود. با نوشتن روابط تعادل و در نظر گرفتن جهت صحیح M_A ، عکس العمل‌ها به دست می‌آید.

$\sum M_A = 0, -100(0.15) + R_B(0.25) + 4.2 = 0$

$R_B = 43.2 \text{ N}$

$\sum M_B = 0, 100(0.1) + 4.2 - R_A(0.25) = 0$

$R_A = 56.8 \text{ N}$

check: $\sum F_y = 0, 43.2 + 56.8 - 100 = 0$

$M + 4.2 - 56.8x = 0$

$M = 56.8x - 4.2$

$M|_{x=0} = -4.2 \text{ N.m}$

$M|_{x=0.15} = 4.32 \text{ N.m}$

$\theta_{A/C} = \theta_A - \theta_C = 0 - 0 = 0$

$56.8x - 4.2 = 0 \quad x = 0.0739 \approx 0.074 \text{ m}$

بنابراین نقطه C در فاصله $2x = 0.148$ از تکیه گاه چپ قرار دارد زیرا سطح زیر منحنی تا نقطه C باید صفر شود (دو سطح هاشور خورده).

$y_{\max} = y_c = t_{C/A} = t_{A/C} = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} (0.074)(-4.2) \left(\frac{1}{3} (0.074) \right) + \frac{1}{2} (0.074)(4.2) \left(0.074 + \frac{2}{3} (0.074) \right) \right] = 0.256 \text{ mm}$

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

9 - 22 of 31

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مثال: 10-22 Popov (ادامه)

روش دوم: $M'_A + 100(0.15) = 0 \quad M'_A = -100(0.15)$

$0 < x < 0.15$
 $M + 15 - 100x = 0$
 $M = 100x - 15$

$0 < x < 0.25$
 $M + R_B x - R_B(0.25) = 0$
 $M = R_B(0.25) - R_B x$

$R_B + R_A = 0 \rightarrow R_A = -R_B$
 $M_A - R_B(0.25) = 0$

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 9 - 23 of 31

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

روش دوم (ادامه):

فاصله مرکز مثلث تا محور مار بر B

$t_{B/A} = 0 \quad \frac{1}{EI} \left\{ \frac{1}{2}(0.25)(0.25R_B) \left[\frac{2}{3}(0.25) \right] + \frac{1}{2}(0.15)(-15) \left[\left(\frac{2}{3} \right)(0.15) + 0.1 \right] \right\} = 0$

مساحت مثلث ۲ مساحت مثلث ۱

$R_B = 43.2 \text{ N}$

همچنان که فرض کردیم جهت آن رو به بالاست.

$\sum M_A = 0, -M_A + 43.2(0.25) - 100(0.15) = 0$
 $M_A = -4.2 \text{ N.m}$

اکنون می توان ترسیمه ترکیبی گشتاور خمشی را مانند قبل (روش اول) رسم کرد و بقیه مسئله را دنبال کرد و خیز ماکزیمم را به دست آورد.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 9 - 24 of 31

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

نمودار ممان خمشی جزء به جزء

Shape	Area	c
Rectangle	bh	$\frac{h}{2}$
Triangle	$\frac{bh}{2}$	$\frac{h}{3}$
Parabolic spandrel ماهپچه	$\frac{bh}{3}$	$\frac{h}{4}$
Cubic spandrel	$\frac{bh}{4}$	$\frac{h}{5}$
General spandrel	$\frac{bh}{n+1}$	$\frac{h}{n+2}$

- به دست آوردن تغییرات شیب و انحراف مماسی در صورت ارزیابی جداگانه هر بار ساده می‌شود.
- یک نمودار (M/EI) برای هر بار ترسیم کنید.
- تغییر زاویه $\theta_{D/C}$ از جمع سطح زیر نمودارها به دست می‌آید.
- انحراف مماسی $t_{D/C}$ از جمع ممان اول‌های سطح‌ها نسبت به محور مار بر D به دست می‌آید.
- ممان خمشی که از در نظر گرفتن تک تک بارها و سپس جمع آن‌ها به دست می‌آید را نمودار **جزء به جزء** می‌گویند.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

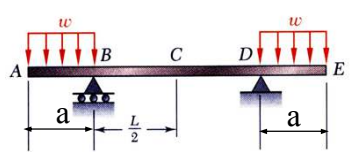
© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مسئله نمونه 9.11

حل:

- عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی را به دست آورید.
- نمودار نیروی برشی، ممان خمشی، و (M/EI) را ترسیم کنید.
- مماس در C را به عنوان مبنا در نظر بگیرید و شیب و انحراف مماسی در E را محاسبه کنید.



برای تیر منشوری نشان داده شده، شیب و خیز در E را به دست آورید.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

9 - 26 of 31

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مسئله نمونه 9.11 (ادامه)

حل:

- عکس العمل‌های تکیه‌گاهی را به دست آورید.

$$R_B = R_D = wa$$

- نمودار نیروی برشی، ممان خمشی، و (M/EI) را ترسیم کنید.

$$A_1 = -\frac{wa^2}{2EI} \left(\frac{L}{2} \right) = -\frac{wa^2 L}{4EI}$$

$$A_2 = -\frac{1}{3} \left(\frac{wa^2}{2EI} \right) (a) = -\frac{wa^3}{6EI}$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 9 - 27 of 31

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مسئله نمونه 9.11 (ادامه)

شیب در E:

$$\theta_E = \theta_C + \theta_{E/C} = \theta_{E/C}$$

$$= A_1 + A_2 = -\frac{wa^2 L}{4EI} - \frac{wa^3}{6EI}$$

$$\theta_E = -\frac{wa^2}{12EI} (3L + 2a)$$

خیز در E:

$$y_E = t_{E/C} - t_{D/C}$$

$$= \left[A_1 \left(a + \frac{L}{4} \right) + A_2 \left(\frac{3a}{4} \right) \right] - \left[A_1 \left(\frac{L}{4} \right) \right]$$

$$= \left[-\frac{wa^3 L}{4EI} - \frac{wa^2 L^2}{16EI} - \frac{wa^4}{8EI} \right] - \left[-\frac{wa^2 L^2}{16EI} \right]$$

$$y_E = -\frac{wa^3}{8EI} (2L + a)$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 9 - 28 of 31

MECHANICS OF MATERIALS

Beer • Johnston • DeWolf

کاربرد قضایای مساحت-لنگر در تیرهایی که بار نامتقارن دارند

گرآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

- مماس مبنا را در تکیه گاه A تعریف کنید. با به دست آوردن انحراف مماسی در B نسبت به A، θ_A را محاسبه کنید.
- شیب در نقاط دیگر نسبت به مماس مبنا به دست می آید.

$$\theta_D = \theta_A + \theta_{D/A}$$
- خیز در D از انحراف مماسی در D به دست می آید.

$$y_D = ED - EF = t_{D/A} - \frac{x}{L} t_{B/A}$$

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

9 - 29 of 31

MECHANICS OF MATERIALS

Beer • Johnston • DeWolf

خیز ماکزیمم

گرآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

- خیز ماکزیمم در K اتفاق می افتد که مماس افقی است.
- نقطه K از برابر قرار دادن سطح زیر نمودار (M/EI) با $-\theta_A$ به دست می آید.
- y_{max} را از محاسبه ممان اول سطح بین A و K نسبت به محور عمودی مار بر A به دست آورید.

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

9 - 30 of 31

MECHANICS OF MATERIALS			
پیوست د: خیز و شیب تیرها			
تیر و بارگذاری	منحنی الاستیک	ماکزیمم خیز	شیب در انتها
1		$-\frac{PL^3}{3EI}$	$-\frac{PL^2}{2EI}$
2		$-\frac{wL^4}{8EI}$	$-\frac{wL^3}{6EI}$
3		$-\frac{ML^2}{2EI}$	$-\frac{ML}{EI}$
4		$-\frac{PL^3}{48EI}$	$-\frac{PL^2}{16EI}$
5		$-\frac{Pb(L^3-b^3)}{6EI}$	$-\frac{Pb(L^2-b^2)}{2EI}$
6		$-\frac{wL^4}{8EI}$	$-\frac{wL^3}{6EI}$
7		$-\frac{ML^2}{16EI}$	$-\frac{ML}{4EI}$

پیوست د: خیز و شیب تیرها

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

9 - 31 of 31