

مفاهیم اولیه در مکانیک جامدات

- **مکانیک** مطالعه حرکت (تعادل) ماده و نیروهایی است که آن حرکت (تعادل) را سبب شده‌اند.
- مکانیک بر اساس مفاهیم زمان، فضا، نیرو، انرژی، و ماده است.
- دانش مکانیک برای مطالعه همه شاخه‌های فیزیک، شیمی، زیست‌شناسی، و مهندسی ضروری است.
- **مکانیک جامدات** علم نیرو و حرکت ماده در حالت جامد آن است.
- مکانیک جامدات** در مورد تغییر شکل و حرکت "جامدات" بحث می‌کند. در مکانیک جامدات تغییر مکانی مهم و مورد علاقه کاربران است که موقعیت آنی یک ذره را به موقعیت "اولیه" آن مربوط می‌کند.

© M.H. Abolbashari, Ferdowsi University of Mashhad

مفهوم پیوستگی

این که ماده از اتم/مولکول تشکیل شده مورد قبول همگان است. به عنوان مثال، در مقیاس کوچک، یک جسم آلومینیومی در واقع مجموعه‌ای گسسته از اتم‌های آلومینیم است که در ردیف‌های منظم به یکدیگر متصل شده‌اند.

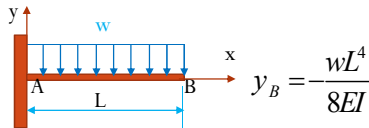
در مقیاس باز هم کوچکتر، اتم‌ها از یک هسته پروتون و نوترون‌هایی تشکیل شده‌اند که الکترون‌ها دور آن می‌چرخند.

بنابراین، ماده پیوسته نیست.

مفهوم پیوستگی (دنباله)

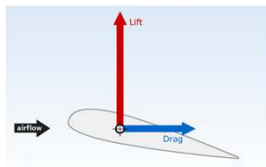
با این همه، تجربیات روزمره بسیاری از رفتار ماده وجود دارد؛ مانند:

- خیز یک سازه در اثر بار وارده،



- نیروی پسا (drag) وارد بر یک جسم در حال حرکت در هوا

نیروی پسا به خواص سیال و اندازه، شکل و سرعت جسم بستگی دارد. یک راه برای بیان این نیرو معادله زیر است:



$$F_D = \frac{1}{2} \rho v^2 C_D A$$

نیروی پسا

مساحت سطح مقطع

ضریب پسا که بی بعد است

سرعت جسم نسبت به سیال

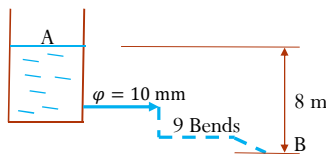
جرم مخصوص سیال

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

3/19

- دبی آب خروجی از لوله‌ای که تحت یک گرادیان فشار قرار دارد،

یک سیستم آبرسانی تشکیل شده از یک منبع با دریچه‌ای خروجی بدون افت و لوله‌ای به قطر 10 mm و طول 20 m، که ۹ زانوی ۹۰ درجه دارد. لوله آب را در هوای آزاد که 8 m زیر سطح آزاد منبع است تخلیه می‌نماید. با فرض اینکه در هر زانو اتلافی برابر با 0.75 ارتفاع نظیر سرعت وجود داشته باشد و اصطکاک در لوله با معادله بلاسیوس $c_f = 0.079 Re^{-0.25}$ بیان شود، دبی خروجی را محاسبه نمایید. لزجت دینامیکی برابر $\mu = 0.89 \times 10^{-3} \text{ Ns/m}^2$ و جرم مخصوص $\rho = 997 \text{ kg/m}^3$ است.



$$Re = \rho u D / \mu = 997 \times u \times 0.01 / 0.89 \times 10^{-3} = 11202u$$

$$c_f = 0.079 (11202u)^{-0.25} = 7.679 \times 10^{-3} u^{-0.25}$$

Darcy-Weisbach equation

$$\text{Loss in pipe} = h_f = \frac{4c_f L u^2}{2gD} = \frac{4 \times 7.679 \times 10^{-3} u^{-0.25} \times 20 \times u^2}{2g \times 0.01} = 3.1311u^{1.75}$$

$$\text{Loss in Bends} = 9 \times \frac{0.75u^2}{2g} = 0.344u^2$$

Bernoulli eq. between surface (A) $\rightarrow$ (B)

$$h_A + Z_A + \frac{u_A^2}{2g} = h_B + Z_B + \frac{u_B^2}{2g} + h_L$$

$$0 + 8 + 0 = 0 + 0 + \frac{u^2}{2g} + 0.344u^2 + 3.1311u^{1.75} \rightarrow u = 1.5 \text{ m/s} \rightarrow Q = Au = 117.8 \times 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s}$$

http://home.zcu.cz/~kovarikp/MT/freestudy/FLUID_MECHANICS_D203/reseni_tutorial/FLUID_MECHANICS_D203_reseni.pdf, 19th, Sept. 2014

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

4/19

مفهوم پیوستگی (دنباله)

که در آن‌ها (مانند این سه مورد) تئوری‌ها و روابطی بدون توجه به **ساختار مولکولی مواد** استفاده می‌شود. تئوری‌هایی که روابط بین پدیده‌های خالص را بدون توجه به ساختار مواد در مقیاس‌های کوچک بیان می‌نمایند، تئوری پیوسته می‌گویند.

تئوری پیوسته مواد را بینهایت مرتبه تقسیم پذیر فرض می‌نماید. بنابراین با این تئوری فرد ایده یک حجم کوچک از مواد را که همان ذره است می‌پذیرد و اینکه در همسایگی هر ذره، همیشه ذرات همسایه دیگری وجود دارند. (Lai)

به هر حال، اگر مفهوم پیوستگی ماده را قبول کنیم، از ترکیب گسسته اجسام مادی چشم پوشی کرده و فرض می‌نماییم که **ماده چنین اجسامی به طور یکنواختی پخش شده و تمام فضای اشغال شده را کاملاً پر کرده‌اند.**

با این مدل پیوسته، ادعا می‌کنیم ماده بینهایت بار به قسمت‌های کوچکتر قابل تقسیم است که هر بخش کوچکتر تمامی خواص فیزیکی جسم اولیه را دارد.

براین اساس، می‌توانیم **کمیات میدانی مانند چگالی و سرعت را به هر نقطه از جسم که فضا را اشغال کرده نسبت دهیم.**

مدل پیوسته اجسام مادی به دو دلیل برای مهندسان مهم است:

۱- با مقیاسی که ما اجسام فولادی، آلومینیومی، بتنی و غیره را در نظر می‌گیریم، **ابعاد مشخصه نسبت به ابعاد مولکولی بسیار بسیار بزرگ‌ترند** آن چنان که مدل پیوسته یک بیان پرفایده و قابل اطمینانی خواهد بود.

۲- تمامی دانش ما از رفتار مکانیکی مواد بر اساس داده‌های تجربی است که از آزمایش روی **نمونه‌هایی با ابعاد نسبتاً بزرگ** جمع‌آوری شده است.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

7/19

مکانیک محیط پیوسته

مکانیک محیط پیوسته در باره رفتار مکانیکی جامدات و سیالات در مقیاس ماکروسکوپیک بحث می‌کند. **مکانیک محیط پیوسته** پاسخ مصالح را به شرایط بارگذاری مختلف مطالعه می‌کند.

موضوع آن می‌تواند به دو بخش مهم تقسیم شود:

۱- اصول کلی مشترک در همه مواد

تأکید روی به دست آوردن معادلات اساسی است که برای همه مواد اعم از جامد و سیال اعتبار دارد. اعتبار این معادلات از تجربیات ما از دنیای فیزیکی به دست می‌آید مانند اصل بقای جرم، بالانس بودن مومنتم خطی، ممان مومنتم، اصل انرژی، و قانون نامعادله انتروپی و غیره.

از نظر ریاضی این اصول دو شکل معادل هم دارند:

الف) شکل انتگرالی که برای یک حجم محدود از مواد از یک محیط پیوسته رابطه سازی می‌شود،

ب) معادلات میدان برای یک حجم دیفرانسیلی از مواد (ذرات) در هر نقطه از میدان مورد نظر

8/19

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

۲- معادلات مشخصه که مصالح ایده آل را تعریف می کند

رفتار مصالح ایده آل مشخصی را بیان می کند. این معادلات نقاط محوری هستند که بر اساس آنها مطالعه الاستیسیته، پلاستیسیته، ویسکوالاستیسیته، و مکانیک سیالات انجام می گیرد.

مصالح ایده آل بیان کننده جنبه های مشخصی از رفتار مکانیکی مصالح طبیعی هستند.

مثال ها:

- (۱) جسم جامد الاستیک خطی
- (۲) سیال لزج خطی
- (۳) سیال غیر نیوتنی غیر قابل تراکم

۱.۱. قانون هوک

از نظر تاریخی، ایده الاستیسیته ابتدا توسط رابرت هوک (۱۶۳۵-۱۷۰۳) در سال ۱۶۷۶ مطرح شد. او در سال ۱۶۷۸ آن را به این شکل عنوان کرد:

“قدرت هر جسم فنری متناسب با میزان کشیده شدن آن است.”

شکل اولیه قانون هوک خیلی روشن نیست. اولین کار این است که آن را به شکل دقیق‌تری بیان کنیم. از نظر تاریخی، این کار به دو روش مختلف صورت گرفته است. **اولین روش** این است که از ایده کلی «فتر» استفاده کرده و به ارتباط بار-تغییر مکان توجه کنیم. $u = a_1 p_1 + a_2 p_2 + \dots + a_n p_n$. **روش دوم** این است که آن را به شکل یک معادله تانسوری (که بعداً تعریف می‌شود) که تنش و کرنش را به هم مربوط می‌کند بیان کنیم.

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl}$$

گرچه برای یک نظریه کلی روش دوم روش مناسبی است، ولی روش اول ساده‌تر و محدودتر است و خالی از فایده نیست. در این بخش، ما روش اول را به عنوان یک نمونه از تئوری الاستیسیته توسعه می‌دهیم.

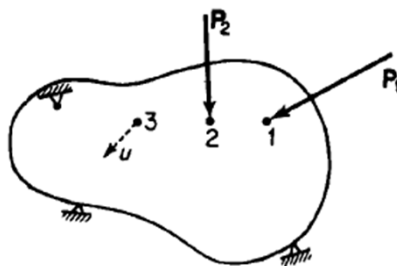


Fig. 1.1:l. Static equilibrium of a body under external forces

برای خواص جسم مورد مطالعه سه فرض اساسی می‌کنیم.

فرض اول

(H1) جسم پیوسته است و در اثر اعمال بارهای خارجی نیز پیوسته باقی می‌ماند.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری 11/19

این فرض به معنی این است که:

از ساختار اتمی جسم چشم پوشی شده است. نقاط همسایه، تحت هر نوع بارگذاری همسایه باقی می‌مانند. در اثر اعمال بارهای خارجی ترک و سوراخی در داخل جسم بوجود نمی‌آید. جسمی که این فرض در مورد آن صادق باشد را یک محیط پیوسته می‌گویند. مطالعه تغییر شکل و حرکت یک جسم پیوسته را مکانیک محیط پیوسته می‌گویند.

فرض دوم

فرض کنید: (۱) راستا و نقطه اثر نیروها تغییر نکند.
(۲) مقدار نیروها نیز آنچنان کم و یا زیاد شود که نسبت آن‌ها به یکدیگر ثابت بماند.

(1) **(H2) قانون هوک:** $u = a_1 p_1 + a_2 p_2 + \dots + a_n p_n$

$a_1, a_2, \dots, a_n$ مقادیر ثابتی هستند که مستقل از مقدار $P_1, P_2, \dots, P_n$ است.

مقادیر ثابت‌های $a_1, a_2, \dots, a_n$ البته به موارد زیر وابسته‌اند:

- موقعیتی که در آن مؤلفه تغییر مکان اندازه‌گیری می‌شود
- راستا و محل اثر هر یک از نیروها

قانون هوک به شکل (H2) قانونی است که می‌تواند به سادگی و مستقیماً مورد آزمون تجربی قرار گیرد.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

12/19

فرض سوم

(H3) یک حالت یگانه بدون تنش برای جسم وجود دارد که هرگاه تمامی نیروهای خارجی برداشته شوند، جسم به آن حالت برمی گردد.

جسمی که این سه فرض را برآورده کند، **جامد الاستیک خطی** نامیده می شود. برای جسم جامد الاستیک خطی چندین نتیجه از این فرضیات به دست می آید.

(A) اصل جمع آثار (superposition):

با ترکیب (H2) و (H3) می توان نشان داد که معادله (1) نه تنها برای برای سیستم هایی که در آن ها نسبت $P_1:P_2:\dots:P_n$ ثابت است (همان گونه که در ابتدا فرض کرده بودیم) معتبر است که برای هر مجموعه نیرو $P_1, P_2, \dots, P_n$ نیز برقرار و معتبر است. به عبارت دیگر معادله (1) به ترتیب اعمال نیروها وابسته نیست. (اثبات را در کتاب مطالعه نمایید.)

معرفی ضرایب تأثیر (Influence coefficients):

اگر P_1 و P_2 (با مقادیر P_1 و P_2) دو نیروی اختیاری باشند که به ترتیب به نقاط ۱ و ۲ اعمال شوند، و خیز (تغییر مکان) در جهت خاصی در نقطه ۳ اندازه گیری شود (مطابق شکل 1.1:1)، آنگاه بر اساس (H2) اگر P_1 به تنهایی اعمال شود، خیز در نقطه ۳ برابر است با $u_3 = c_{31}P_1$. اگر P_2 به تنهایی اعمال شود، خیزی برابر با $u_3 = c_{32}P_2$ ایجاد می شود. حال اگر P_1 و P_2 با هم اعمال شوند در حالی که نسبت $P_1:P_2$ ثابت است، آنگاه بر اساس (H2) خیز در نقطه ۳ برابر است با:

$$(a) \quad u_3 = c'_{31}P_1 + c'_{32}P_2$$

13/19

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

اکنون این سؤال مطرح می شود که آیا $c'_{31} = c_{31}$ ، $c'_{32} = c_{32}$ ؟ جواب مثبت است. ثابت های c_{31} ، c_{32} ، etc. در تعریف خواص الاستیک اجسام جامد اهمیت زیادی دارند. آن ها را **ضرایب تأثیر و یا ضرایب تأثیر انعطاف پذیری (flexibility influence coefficient)** می نامند.

(B) نیروها و تغییر مکان های مربوط و معنای یگانه کار کلی انجام شده توسط نیروها

یک مجموعه نیروی خارجی $P_1, \dots, P_n$ که روی یک جسم اثر می کنند در نظر بگیرید. اکنون تغییر مکان هایی در نقاط اثر نیروها و در راستای نیروها در نظر بگیرید که به آن ها تغییر مکان های مربوط **(corresponding)** به نیروهای این نقاط می گویند **(عکس العمل های تکیه گاهی)** به عنوان نیروهای خارجی که به جسم اثر می کنند در نظر گرفته می شوند و در مجموعه نیروها محسوب می شوند.

$$\begin{aligned} u_1 &= c_{11}P_1 + c_{12}P_2 + \dots + c_{1n}P_n, & (3) \quad p_1u_1 + p_2u_2 + \dots + p_nu_n &= c_{11}P_1^2 + c_{12}P_1P_2 + \dots + c_{1n}P_1P_n \\ (2) \quad u_2 &= c_{21}P_1 + c_{22}P_2 + \dots + c_{2n}P_n, & &+ c_{21}P_1P_2 + c_{22}P_2^2 + \dots + c_{2n}P_2P_n \\ &\dots & & \\ u_n &= c_{n1}P_1 + c_{n2}P_2 + \dots + c_{nn}P_n. \end{aligned}$$

کمیت فوق مستقل از ترتیب اثر بارهاست. آن را **کار کلی انجام شده روی جسم توسط مجموعه نیروها** می گویند.

14/19

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

(C) رابطه دوطرفه ماکسول (Maxwell's reciprocal relation)

ضرایب تأثیر نیروها و تغییر مکان‌های مربوط متقارنند.

$$(4) \quad c_{ij} = c_{ji}$$

به عبارت دیگر، تغییر مکان در نقطه i در اثر اعمال بار واحد در نقطه j برابر است با تغییر مکان در نقطه j در اثر بار واحد در نقطه i به شرطی که نیروها و تغییر مکان‌ها به هم مربوط باشند. یعنی تغییر مکان‌ها در راستای نیروهای آن نقاط اندازه‌گیری شوند. (اثبات را در کتاب مطالعه نمایید.)

(D) قضیه دوطرفه بتی-ریلی (Betti-Rayleigh reciprocal theorem)

فرض کنید مجموعه بارهای $P_1, P_2, \dots, P_n$ تغییر مکان‌های مربوط $u_1, u_2, \dots, u_n$ را بوجود آورده باشند. همچنین فرض کنید مجموعه بارهای دیگری $P'_1, P'_2, \dots, P'_n$ که در همان نقاط و راستا اثر می‌کنند، تغییر مکان‌های $u'_1, u'_2, \dots, u'_n$ را بوجود آورده باشند.

$$(5) \quad p_1 u'_1 + p_2 u'_2 + \dots + p_n u'_n = p'_1 u_1 + p'_2 u_2 + \dots + p'_n u_n$$

به عبارت دیگر، در یک جسم الاستیک خطی، کار انجام شده توسط یک مجموعه نیرو که در امتداد تغییر مکان‌های مربوط ایجاد شده توسط مجموعه نیروهای دیگری انجام شده باشد برابر است با کار انجام شده توسط مجموعه نیروهای دوم در امتداد تغییر مکان‌های مربوط ایجاد شده توسط مجموعه نیروهای اول. (اثبات را در کتاب مطالعه نمایید.)

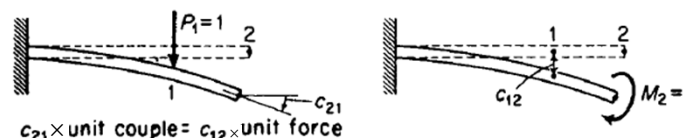
15/19

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

قضیه دو طرفه بتی-ریلی به شکل معادله (5) را می‌توان تعمیم داد تا شامل **ممان** و **چرخش** به عنوان **نیروها** و **تغییر مکان‌های کلی** هم بشود.



For the same beam, $c_{21} = c_{12}$.
(a) Forces and corresponding displacements.



$c_{21} \times \text{unit couple} = c_{12} \times \text{unit force}$
(b) Generalized force (moment) and the corresponding generalized displacement (moment ~ rotation of angle).

Fig. 1.1:2. Illustration of the reciprocal theorem.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

16/19

(E) انرژی کرنشی (Strain energy)

از قانون اول ترمودینامیک می توان استفاده کرد و نتایج دیگری هم گرفت. وقتی جسمی از نظر حرارتی ایزوله و ضریب انبساط حرارتی قابل چشم پوشی باشد، قانون اول ترمودینامیک می گوید:

در یک بازه زمانی معین، کار انجام شده روی جسم توسط نیروهای خارجی =

افزایش انرژی جنبشی و انرژی داخلی در همان بازه زمانی

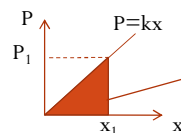
اگر فرایند خیلی آهسته باشد، آنگاه انرژی جنبشی تقریباً صفر است و داریم:

کار انجام شده = تغییرات انرژی داخلی

اگر انرژی داخلی حالت بدون تنش را صفر فرض کنیم، انرژی ذخیره شده انرژی کرنشی نامیده می شود.

اگر انرژی کرنشی را U بنامیم، از روابط (3) و (4) داریم:

$$(6) \quad U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} p_i p_j = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n c_{ii} p_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \sum c_{ij} p_i p_j$$



$$U = \int_0^{x_1} p dx = \int_0^{x_1} kx dx = \frac{1}{2} kx_1^2 = \frac{1}{2} p_1 x_1$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

17/19

اگر از معادله (6) نسبت به P_i مشتق بگیریم، داریم:

$$\frac{\partial U}{\partial p_i} = c_{ii} p_i + \sum_{j \neq i} c_{ij} p_j, \quad i, j=1, 2, \dots, n.$$

طرف راست دقیقاً u_i است. بنابراین:

(F) قضیه کستیگلیانو (Castigliano's theorem)

$$(7) \quad \frac{\partial U}{\partial p_i} = u_i, \quad i=1, \dots, n.$$

به عبارت دیگر، اگر

- یک مجموعه نیرویی $P_1, P_2, \dots, P_n$ روی یک جسم کاملاً الاستیک اعمال شوند و

- انرژی کرنشی بر حسب تابعی از مجموعه $P_1, P_2, \dots, P_n$ بیان شده باشد، آنگاه

مشتق جزئی انرژی کرنشی نسبت به یک بار مشخص، تغییر مکان مربوط در نقطه اعمال آن بار و در راستای آن خواهد بود.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

18/19

(G) اصل کار مجازی (The principle of virtual work) و قضیه دوم کستیگیلیانو

به عبارت دیگر، برای یک جسم که تحت تأثیر نیروهای خارجی در حال تعادل است، اصل کار مجازی را می‌توان برای نشان دادن مطلب زیر به کار برد که:

اگر انرژی کرنشی بر حسب تابعی از تغییرمکان‌های مربوط بیان شده باشد، **آنگاه**

$$(8) \quad \frac{\partial U}{\partial u_i} = p_i, \quad i=1, \dots, n.$$

به عبارت دیگر، **اگر**

- یک مجموعه تغییرمکان $u_1, u_2, \dots, u_n$ در نقاط مختلف روی یک جسم کاملاً الاستیک در راستای بارهای $P_1, P_2, \dots, P_n$ اندازه گیری شده باشند و
- انرژی کرنشی بر حسب تابعی از مجموعه $u_1, u_2, \dots, u_n$ بیان شده باشد،

آنگاه

مشتق جزئی انرژی کرنشی نسبت به یک تغییرمکان مشخص، بار در نقطه اندازه گیری آن تغییرمکان و در راستای آن را می‌دهد.

(اثبات را در کتاب مطالعه نمایید.)

نتیجه مهم (8) بر اساس کاربرد اصل کار مجازی برای حالت تعادل یک جسم به دست آمده با این شرط که تابع انرژی کرنشی بر حسب تغییرمکان‌ها موجود است. این معادله برای اجسام الاستیکی که **رابطه بار-تغییرمکان غیر خطی** دارند نیز صادق است.