

Seventh Edition

CHAPTER
7

VECTOR MECHANICS FOR ENGINEERS: STATICS

Ferdinand P. Beer
E. Russell Johnston, Jr.

Lecture Notes:
J. Walt Oler
Texas Tech University

نیروها در تیرها و کابل‌ها



گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری
 © 2004 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

Seventh Edition

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مقدمه

- در فصل‌های قبل بحث‌های زیر انجام شد:
 - الف) به دست آوردن نیروهای **خارجی** که به سازه اثر می‌کردند (مانند عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی) و
 - ب) به دست آوردن نیروهایی که **اعضای سازه را با هم نگاه می‌داشت** (مانند نیروهای مفصل‌ها).
- در فصل پیش‌رو در باره به دست آوردن نیروهای **داخلی** (یعنی، کششی/فشاری، برشی، و خمشی) که قسمت‌های مختلف یک عضو را به هم متصل می‌کند بحث می‌کنیم.
- تمرکز روی انواع سازه‌های مهم مهندسی است:
 - الف) **تیرها** - که معمولاً بلند، مستقیم، و ستونوار (منشوری) هستند و برای تحمل بارهایی که در نقاط مختلف آن وارد می‌شود طراحی می‌شوند.
 - ب) **کابل‌ها** - اعضای انعطاف پذیرند که تنها بارهای کششی را می‌توانند تحمل کنند. برای تحمل بارهای متمرکز و گسترده طراحی می‌شوند.

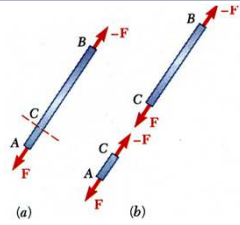


گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری
 © 2004 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

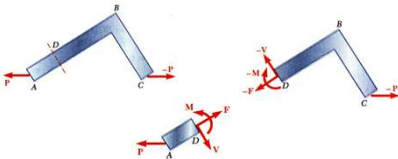
7 - ۱/90

Vector Mechanics for Engineers: Statics

نیروهای داخلی اعضا



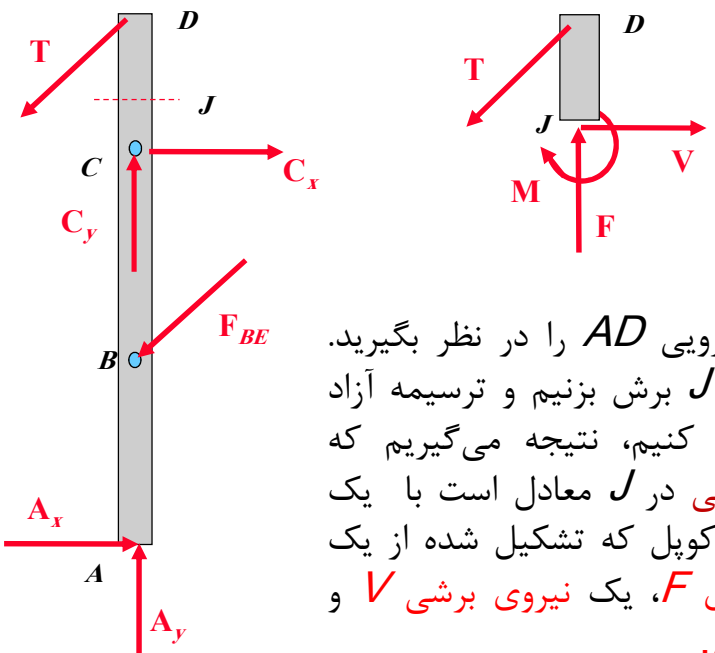
- اعضای دو نیرویی مستقیم AB تحت تاثیر دو نیروی F و $-F$ در حال تعادل است.
- نیروهای داخلی معادل F و $-F$ برای تعادل ترسیمه آزاد AC و CB نیاز است.



- برای تعادل اعضای دو نیرویی که مستقیم نیستند، یک سیستم نیرو-کوپل لازم است.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری
© 2004 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

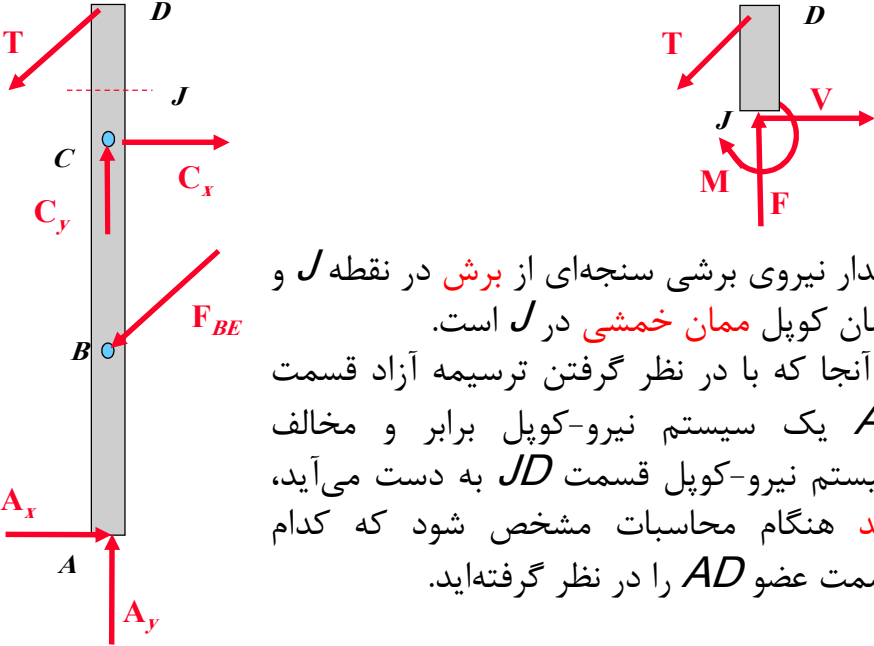
7 - ۲/90



عضو چند نیرویی AD را در نظر بگیرید. اگر آن را در J برش بزنیم و ترسیمه آزاد JD را رسم کنیم، نتیجه می‌گیریم که نیروهای داخلی در J معادل است با یک سیستم نیرو-کوپل که تشکیل شده از یک نیروی محوری F ، یک نیروی برشی V و یک کوپل M .

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

7 - ۴/90



مقدار نیروی برشی سنجه‌ای از **برش** در نقطه J و ممان کوپل **ممان خمشی** در J است. از آنجا که با در نظر گرفتن ترسیمه آزاد قسمت AJ یک سیستم نیرو-کوپل برابر و مخالف سیستم نیرو-کوپل قسمت JD به دست می‌آید، **باید** هنگام محاسبات مشخص شود که کدام قسمت عضو AD را در نظر گرفته‌اید.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

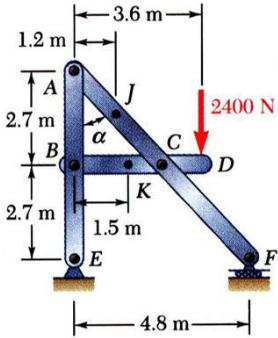
7 - 90

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مسئله نمونه 7.1

حل:

- عکس‌العمل‌ها و نیروها را در هر یک از اتصالات اعضا به دست می‌آوریم.
- عضو ACF را در J برش می‌زنیم. نیروهای **داخلی** در J با یک سیستم نیرو-کوپل معادل نشان داده می‌شود که با در نظر گرفتن تعادل هر قسمت به دست می‌آید.
- عضو BCD را در K برش می‌زنیم. نیروهای **داخلی** در K با یک سیستم نیرو-کوپل معادل نشان داده می‌شود که با در نظر گرفتن تعادل هر قسمت به دست می‌آید.



نیروهای **داخلی** الف) در نقطه J عضو ACF ، ب) در نقطه K عضو BCD را به دست آورید.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

© 2004 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

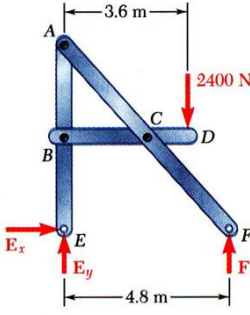
7 - 90

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مسئله نمونه 7.1 (ادامه)

حل:

- نیروهای عکس‌العمل و اتصالات را محاسبه می‌کنیم.
- ترسیمه آزاد کل قاب را در نظر می‌گیریم.



$$+\circlearrowleft \sum M_E = 0:$$

$$-(2400 \text{ N})(3.6 \text{ m}) + F(4.8 \text{ m}) = 0 \quad F = 1800 \text{ N}$$

$$\sum F_y = 0:$$

$$-2400 \text{ N} + 1800 \text{ N} + E_y = 0 \quad E_y = 600 \text{ N}$$

$$\sum F_x = 0:$$

$$E_x = 0$$

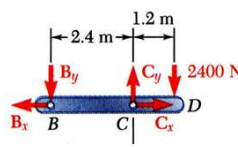
7 - ۷/90

© 2004 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مسئله نمونه 7.1 (ادامه)

ترسیمه آزاد BCD را در نظر می‌گیریم:



$$+\circlearrowleft \sum M_B = 0:$$

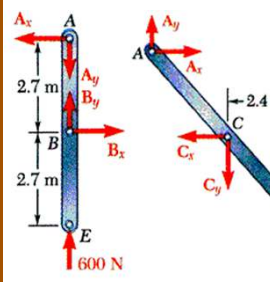
$$-(2400 \text{ N})(3.6 \text{ m}) + C_y(2.4 \text{ m}) = 0 \quad C_y = 3600 \text{ N}$$

$$+\circlearrowleft \sum M_C = 0:$$

$$-(2400 \text{ N})(1.2 \text{ m}) + B_y(2.4 \text{ m}) = 0 \quad B_y = 1200 \text{ N}$$

$$\sum F_x = 0: \quad -B_x + C_x = 0$$

ترسیمه آزاد ABE را در نظر می‌گیریم:



$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0: \quad B_x(2.4 \text{ m}) = 0 \quad B_x = 0$$

$$\sum F_x = 0: \quad B_x - A_x = 0 \quad A_x = 0$$

$$\sum F_y = 0: \quad -A_y + B_y + 600 \text{ N} = 0 \quad A_y = 1800 \text{ N}$$

از عضو BCD داریم:

$$\sum F_x = 0: \quad -B_x + C_x = 0 \quad C_x = 0$$

7 - ۸/90

© 2004 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مسئله نمونه 7.1 (ادامه)

- عضو ACF را در J برش میزنیم. نیروهای داخلی در J با یک سیستم نیرو-کوپل معادل نشان داده می شود.
- ترسیمه آزاد AJ را در نظر می گیریم:

$$\sum M_J = 0:$$

$$-(1800 \text{ N})(1.2 \text{ m}) + M = 0 \quad \boxed{M = 2160 \text{ N} \cdot \text{m}}$$

$$\sum F_x = 0:$$

$$F - (1800 \text{ N}) \cos 41.7^\circ = 0 \quad \boxed{F = 1344 \text{ N}}$$

- به جهت محور x توجه نمایید.

$$\sum F_y = 0:$$

$$-V + (1800 \text{ N}) \sin 41.7^\circ = 0 \quad \boxed{V = 1197 \text{ N}}$$

7 - ۱/90

© 2004 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مسئله نمونه 7.1 (ادامه)

- عضو BCD را در K برش میزنیم. نیروهای داخلی در K که با یک سیستم نیرو-کوپل معادل نشان داده می شود را به دست می آوریم:
- ترسیمه آزاد BK را در نظر می گیریم:

$$\sum M_K = 0:$$

$$(1200 \text{ N})(1.5 \text{ m}) + M = 0 \quad \boxed{M = -1800 \text{ N} \cdot \text{m}}$$

$$\sum F_x = 0:$$

$$\boxed{F = 0}$$

$$\sum F_y = 0:$$

$$-1200 \text{ N} - V = 0 \quad \boxed{V = -1200 \text{ N}}$$

7 - ۱۰/90

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

© 2004 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

انواع کابل‌ها

- با بارهای متمرکز
(وزن کابل ناچیز است)
- با بارهای گسترده
(وزن کابل ناچیز است)
- تحت تأثیر وزن خودش (زنجیرها)

شدت بار گذاری قائم در امتداد تصویر افقی کابل ثابت است. کابل به شکل یک سهمی در می‌آید.

بار افقی متغیر

7 - ۱۱/90

Vector Mechanics for Engineers: Statics

کابل‌های با نیروهای متمرکز

- کابل‌ها به عنوان المان‌های سازه‌ای در پل‌ها، خطوط انتقال، کابل تراموا و سیم مهار برج‌های بلند و غیره استفاده می‌شوند.
- برای طراحی، فرض می‌شود:
 - الف) نیروهای متمرکز در راستاهای عمودی‌اند.
 - ب) وزن کابل قابل چشم‌پوشی است.
 - ج) کابل انعطاف پذیر است، یعنی مقاومت به خمش آن کوچک است.
 - د) بخشی از کابل که بین دو بار مجاور است، عضو دو نیرویی است.
- می‌خواهیم شکل کابل را تعیین کنیم، یعنی فاصله عمودی از تکیه‌گاه A تا هر نقطه بار

7 - ۱۱/90

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالشیری

© 2004 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

MF6

guy=مهيار
My Friend ۰۲/۰۵/۲۰۰۹ :

Vector Mechanics for Engineers: Statics

کابل‌های با بار متمرکز

- ترسیمه آزاد کل کابل را در نظر می‌گیریم. شیب کابل در A و B مجهول است. در هر تکیه‌گاه دو مؤلفه عکس‌العمل وجود دارد.
- چهار مجهول داریم و سه معادله تعادل برای به دست آوردن عکس‌العمل‌ها کافی نیست.
- معادله دیگر با در نظر گرفتن تعادل قسمت AD کابل و فرض اینکه مختصات D معلوم باشد به دست می‌آید. آن معادله عبارت است از:
$$\sum M_D = 0.$$
- برای نقاط دیگر کابل:
$$\sum M_{C_2} = 0 \text{ yields } y_2$$

$$\sum F_x = 0, \sum F_y = 0 \text{ yield } T_x, T_y$$
- $T_x = T \cos \theta = A_x = \text{constant}$

© 2004 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 7 - ۱۴/90

کابل‌ها

بارهای متمرکز، بارهای گسترده، تحت تأثیر وزن خودش

بنابراین

مقاومتی به خمش ندارد.

نیرو کششی مماس بر کابل است.

۲- کاملاً غیر قابل انعطاف: طول ثابت و شکل را به عنوان جسم صلب در نظر می‌گیریم.

فرض‌ها

۱- کاملاً انعطاف پذیر:

۲- کاملاً غیر قابل انعطاف: طول ثابت و شکل را به عنوان جسم صلب در نظر می‌گیریم.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری 7 - ۱۴/90

MF12

کابل‌های تحت بارهای متمرکز

قطعات خط مستقیم (بدون وزن)

نیروی کشش ثابت

مثال:

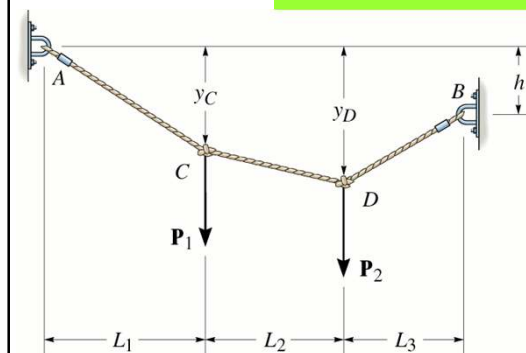
9 مجهول: $(T_1, T_2, T_3, 4 \text{ Reaction Forces}, y_C, y_D)$

8 معادله: 2 معادله در هر نقطه (A, B, C, D)

یک معادله دیگر نیاز است.

معادله دیگر:

از فاصله عمودی یک نقطه دلخواه استفاده می‌کنیم.



7 - ۱۰/۹۰

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مسئله نمونه 7.8

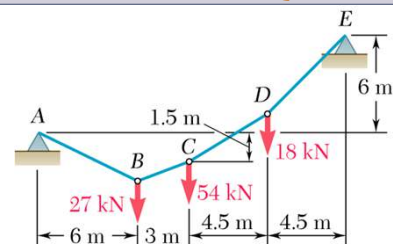
حل:

• مؤلفه‌های نیروهای عکس‌العمل در A را از دو معادله‌ای که ترسیمه آزاد کل کابل در نظر گرفته شود و ممان حول E و در نظر گرفتن ترسیمه آزاد قسمت ABC و ممان حول C به دست می‌آوریم.

• فاصله عمودی نقطه B را با در نظر گرفتن ترسیمه آزاد AB و نوشتن معادله ممان حول نقطه B به دست می‌آوریم.

• به طور مشابه، فاصله عمودی نقطه D با استفاده از ترسیمه آزاد $ABCD$ را محاسبه می‌کنیم.

• شیب ماکزیمم و کشش ماکزیمم که در DE اتفاق می‌افتد به دست می‌آوریم.



کابل AE سه بار عمودی را که در نقاط مختلف روی کابل اثر می‌کنند تحمل می‌کند. اگر نقطه C به میزان 1.5 m زیر تکیه‌گاه چپ باشد، به دست آورید:

الف) فاصله عمودی نقطه B و D ،

ب) شیب ماکزیمم و کشش ماکزیمم در کابل.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2004 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

7 - ۱۱/۹۰

MF12 **افت Sag:**
My Friend ۰۸/۰۵/۲۰۰۹ :

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مسئله نمونه 7.8 (ادامه)

حل:

- مؤلفه‌های نیروهای عکس‌العمل در A را از دو معادله‌ای که ترسیمه آزاد کل کابل در نظر گرفته شود و ممان حول E

$$\sum M_E = 0:$$

$$\begin{aligned} A_x(6\text{ m}) - A_y(18\text{ m}) + (27\text{ kN})(12\text{ m}) \\ + (54\text{ kN})(9\text{ m}) + (18\text{ kN})(45\text{ m}) = 0 \\ 6A_x - 18A_y + 891 = 0 \end{aligned}$$

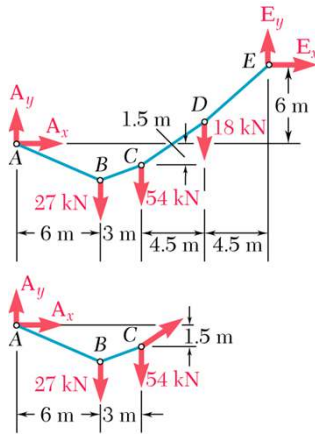
- و در نظر گرفتن ترسیمه آزاد قسمت ABC و ممان حول C به دست می‌آوریم.

$$\sum M_C = 0:$$

$$-1.5A_x - 9A_y + 3(27) = 0$$

از حل همزمان:

$$A_x = -81\text{ kN} \quad A_y = 22.5\text{ kN}$$



گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالشیری

© 2004 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

7 - ۱۷/90

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مسئله نمونه 7.8 (ادامه)

- فاصله عمودی نقطه B را با در نظر گرفتن ترسیمه آزاد AB و نوشتن معادله ممان حول نقطه B به دست می‌آوریم.

$$\sum M_B = 0: \quad y_B(81) - (22.5\text{ kN}) = 0$$

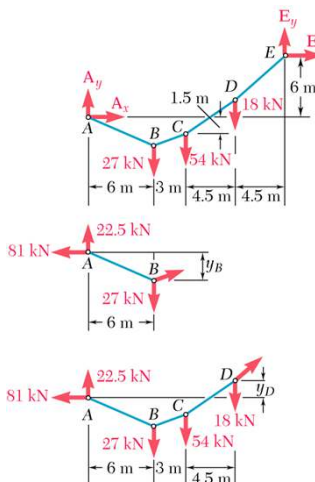
$$y_B = -1.67\text{ m}$$

- به طور مشابه، فاصله عمودی نقطه D را با استفاده از ترسیمه آزاد $ABCD$ محاسبه می‌کنیم.

$$\sum M_D = 0:$$

$$\begin{aligned} -y_D(81) - (22.5\text{ kN})(13.5\text{ m}) + (27\text{ kN})(7.5\text{ m}) \\ + (54\text{ kN})(4.5\text{ m}) = 0 \end{aligned}$$

$$y_D = 1.75\text{ m}$$



گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالشیری

© 2004 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

7 - ۱۸/90

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مسئله نمونه 7.8 (ادامه)

• شیب ماکزیمم و کشش ماکزیمم که در DE اتفاق می افتد را به دست می آوریم.

$$\tan \theta = \frac{4.25 \text{ m}}{4.5 \text{ m}} \quad \theta = 43.4^\circ$$

$$T_{\max} = \frac{81 \text{ kN}}{\cos \theta} \quad T_{\max} = 111.6 \text{ kN}$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری
© 2004 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

Vector Mechanics for Engineers: Statics

کابل سهمی گون

• کابلی را در نظر بگیرید که یک بار گسترده یکنواخت افقی را تحمل می کند مانند کابل یک پل معلق.

• باری که از پایین نقطه C تا نقطه D روی کابل است، برابر است با $W = wx$

مقدار و جهت نیروی کشش داخلی عبارت است از:

$$T = \sqrt{T_0^2 + w^2 x^2} \quad \tan \theta = \frac{wx}{T_0}$$

از ممان حول D داریم:

$$\sum M_D = 0: \quad wx \frac{x}{2} - T_0 y = 0$$

یا

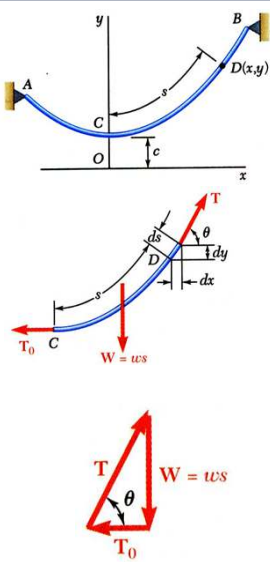
$$y = \frac{wx^2}{2T_0}$$

کابل یک منحنی سهمی خواهد داشت.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری
© 2004 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

Vector Mechanics for Engineers: Statics

زنجر



- کابلی را در نظر بگیرید که تحت تأثیر بار یکنواخت در راستای خودش است مانند کابلی که تحت تأثیر وزن خودش می‌باشد.
- بار از پایین‌ترین نقطه C تا نقطه D عبارت است از: $W = ws$
- برای سادگی محاسبات، مرکز مختصات را در فاصله $c = \frac{T_0}{w}$ از نقطه C در نظر می‌گیریم.
- و نیروی کشش داخلی عبارت است از:

$$T = \sqrt{T_0^2 + w^2 s^2} = w \sqrt{c^2 + s^2}$$

برای ارتباط بین x و طول کابل s داریم:

$$dx = ds \cos \theta = \frac{T_0}{T} ds = \frac{wc}{w \sqrt{c^2 + s^2}} ds = \frac{ds}{\sqrt{1 + s^2/c^2}}$$

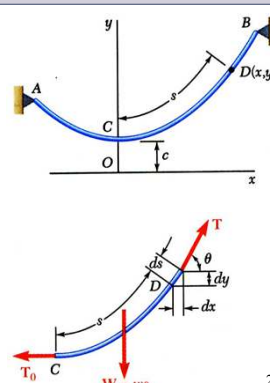
$$x = \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{1 + s^2/c^2}} = c \sinh^{-1} \frac{s}{c} \quad \text{and} \quad s = c \sinh \frac{x}{c}$$

7 - ۲۱/90

© 2004 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

Vector Mechanics for Engineers: Statics

زنجر



- برای ارتباط مختصات x و y کابل:

$$dy = dx \tan \theta = \frac{W}{T_0} dx = \frac{ws}{wc} dx = \sinh \frac{x}{c} dx$$

$$y - c = \int_0^x \sinh \frac{x}{c} dx = c \cosh \frac{x}{c} - c$$

$$y = c \cosh \frac{x}{c}$$

که معادله زنجر است.

همچنین داریم:

$$y^2 - c^2 = (c \cosh \frac{x}{c})^2 - (c \sinh \frac{x}{c})^2 = c^2 (\cosh^2 \frac{x}{c} - \sinh^2 \frac{x}{c}) = c^2$$

$$T = w \sqrt{c^2 + s^2} = w \sqrt{c^2 + y^2 - c^2} = wy$$

بنابراین:

$$T = wy, T_0 = wc, W = ws$$

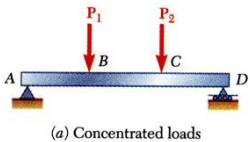
7 - ۲۲/90

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالشیری

© 2004 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

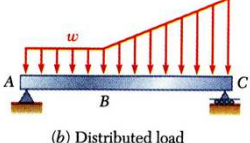
Vector Mechanics for Engineers: Statics

انواع بارها و تکیه‌گاه‌ها در تیرها



(a) Concentrated loads

- **تیرها** - سازه‌هایی که برای تحمل بارهایی که در نقاط مختلف آن وارد می‌شود طراحی می‌شوند.
- تیرها می‌توانند تحت تأثیر بارهای متمرکز و یا گسترده و یا ترکیب آن‌ها باشند.
- طراحی تیرها دو مرحله‌ای است:



(b) Distributed load

- (۱) به دست آوردن ترسیمه نیروهای برشی و ممان خمشی که توسط بارها بوجود آمده‌اند.
- (۲) انتخاب سطح مقطع مناسبی که این نیروی برشی و ممان خمشی را بتواند به خوبی تحمل کند.

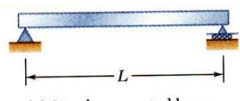
گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالشیری
© 2004 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 7 - ۲۲/90

Vector Mechanics for Engineers: Statics

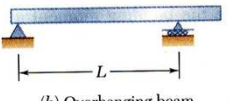
انواع بارها و تکیه‌گاه‌ها در تیرها

- تیرها بر اساس تکیه‌گاه‌شان تقسیم بندی می‌شوند.
- عکس‌العمل تکیه‌گاه‌ها در تیرها در صورتی به دست می‌آیند که تنها سه مجهول داشته باشند. در غیر این صورت از نظر استاتیکی نامعین‌اند.

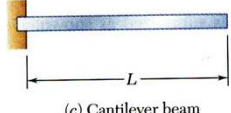
Statically Determinate Beams



(a) Simply supported beam

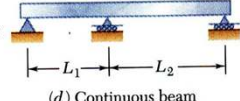


(b) Overhanging beam

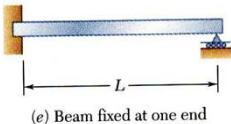


(c) Cantilever beam

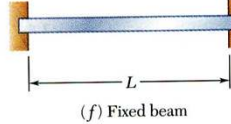
Statically Indeterminate Beams



(d) Continuous beam



(e) Beam fixed at one end and simply supported at the other end



(f) Fixed beam

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالشیری
© 2004 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 7 - ۲۴/90

Vector Mechanics for Engineers: Statics

نیروی برشی و ممان خمشی در تیرها

- می‌خواهیم ممان خمشی و نیروی برشی در هر نقطه از تیری که تحت بارهای متمرکز یا گسترده است را به دست آوریم.
- با در نظر گرفتن ترسیمه آزاد عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی را به دست می‌آوریم.
- تیر را در C برش می‌زنیم و ترسیمه آزاد AC و CB را ترسیم می‌کنیم. تعریف سیستم نیرو-کوپل داخلی در شکل نشان داده شده است.
- از تعادل M و V یا M' و V' به دست می‌آیند.

تأثیر نیروهای خارجی (برش مثبت)

تأثیر نیروهای خارجی (لنگر خمشی مثبت)

© 2004 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 7 - ۲۰/۹۰

Vector Mechanics for Engineers: Statics

ترسیمه‌های نیروی برشی و ممان خمشی

- تغییرات نیروی برشی و ممان خمشی در امتداد تیر را می‌توان رسم کرد.
- عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی را به دست آورید.
- تیر را در C برش زده و عضو AC را در نظر بگیرید.

$$V = +P/2 \quad M = +Px/2$$
- تیر را در E برش زده و عضو EB را در نظر بگیرید.

$$V' = -P/2 \quad M' = +P(L-x)/2$$
- با در نظر گرفتن AE خواهیم داشت:

$$M = P(L-x)/2$$
- برای تیر تحت بار متمرکز، برش بین دو نقطه بار ثابت است ولی ممان به طور خطی متغیر خواهد بود.

© 2004 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 7 - ۲۱/۹۰

Vector Mechanics for Engineers: Statics

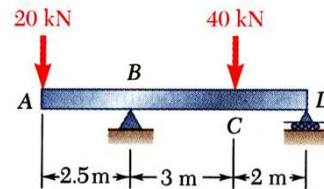
مسئله نمونه 7.2

حل:

- ترسیمه آزاد کل تیر را در نظر گرفته و عکس‌العمل‌های B و D را به دست می‌آوریم.

- سیستم معادل نیرو-کوپل داخلی برای ترسیمه آزاد تیری که برش خورده (از هر دو طرف نقاط محل اثر نیروها) را به دست می‌آوریم.

- نتایج را رسم می‌کنیم.



ترسیمه نیروی برشی و ممان خمشی تیر را به دست آورید.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالشیری

© 2004 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

7 - ۲۷/۹۰

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مسئله نمونه 7.2 (ادامه)

حل:

ترسیمه آزاد کل تیر را در نظر گرفته و عکس‌العمل‌های B و D را به دست می‌آوریم.

سیستم معادل نیرو-کوپل داخلی برای ترسیمه آزاد تیری که برش خورده (از هر دو طرف نقاط محل اثر نیروها) را به دست می‌آوریم.

$$\sum F_y = 0: \quad -20\text{ kN} - V_1 = 0$$

$$V_1 = -20\text{ kN}$$

$$\sum M = 0: \quad (20\text{ kN})(0\text{ m}) + M_1 = 0$$

$$M_1 = 0$$

به طور مشابه:

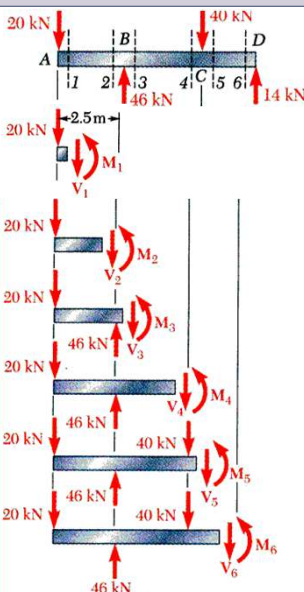
$$V_2 = -20\text{ kN} \quad M_2 = -50\text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$V_3 = 26\text{ kN} \quad M_3 = -50\text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$V_4 = 26\text{ kN} \quad M_4 = +28\text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$V_5 = -14\text{ kN} \quad M_5 = +28\text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$V_6 = -14\text{ kN} \quad M_6 = 0\text{ kN}\cdot\text{m}$$



© 2004 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

7 - ۲۸/۹۰

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مسئله نمونه 7.2 (ادامه)

- نتایج را رسم می‌کنیم.
- دقت کنید که نیروی برشی تیر در فاصله بین دو نیروی متمرکز مقدار ثابتی دارد ولی ممان خمشی به طور خطی تغییر می‌کند.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالشیری

© 2004 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

7 - ۲۹/۹۰

Vector Mechanics for Engineers: Statics

رابطه بین بار، نیروی برشی و ممان خمشی

- رابطه بین بار و نیروی برشی:

$$V - (V + \Delta V) - w\Delta x = 0$$

$$\frac{dV}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta x} = -w$$

$$V_D - V_C = - \int_{x_C}^{x_D} w dx = -(\text{area under load curve})$$

- رابطه بین نیروی برشی و ممان خمشی

$$(M + \Delta M) - M - V\Delta x + w\Delta x \frac{\Delta x}{2} = 0$$

$$\frac{dM}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(V - \frac{1}{2} w\Delta x \right) = V$$

$$M_D - M_C = \int_{x_C}^{x_D} V dx = (\text{area under shear curve})$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالشیری

© 2004 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

7 - ۳۰/۹۰

Vector Mechanics for Engineers: Statics

رابطه بین بار، نیروی برشی و ممان خمشی

- عکس العمل تکیه گاه ها
- منحنی نیروی برشی
- در هر مقطعی: $V - V_A = -\int_0^x w dx = -wx$
- منحنی ممان خمشی
- در هر مقطعی: $M - M_A = \int_0^x V dx$

$$R_A = R_B = \frac{wL}{2}$$

$$V = V_A - wx = \frac{wL}{2} - wx = w\left(\frac{L}{2} - x\right)$$

$$M = \int_0^x w\left(\frac{L}{2} - x\right) dx = \frac{w}{2}(Lx - x^2)$$

$$M_{\max} = \frac{wL^2}{8} \quad \left(M \text{ at } \frac{dM}{dx} = V = 0\right)$$

© 2004 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 7 - ۳۱/۹۰

Vector Mechanics for Engineers: Statics

SF and BM diagram

	P	Constant	Linear
Load			
Shear	Constant	Linear	Parabolic
Moment	Linear	Parabolic	Cubic

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

© 2004 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 7 - ۳۲

Vector Mechanics for Engineers: Statics

SF and BM diagram

	0	0	Constant
Load			
Shear	Constant	Constant	Linear
Moment	Linear	Linear	Parabolic

گرآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

© 2004 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

7 - ۳۳

Vector Mechanics for Engineers: Statics

Sample Problem 7.3

Draw the shear and bending moment diagrams for the beam AB . The distributed load of 7200 N/m extends over 0.3 m of the beam, from A to C , and the 1800 N load is applied at E .

SOLUTION:

- Taking entire beam as free-body, calculate reactions at A and B .
- Determine equivalent internal force-couple systems at sections cut within segments AC , CD , and DB .
- Plot results.

گرآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

© 2004 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

7 - ۳۴/90

Vector Mechanics for Engineers: Statics

Sample Problem 7.3

SOLUTION:

- Taking entire beam as a free-body, calculate reactions at A and B .

$$\sum M_A = 0:$$

$$B_y(0.8\text{ m}) - (2160\text{ N})(0.15\text{ m}) - (1800\text{ N})(0.55\text{ m}) = 0$$

$$B_y = 1642\text{ N}$$

$$\sum M_B = 0:$$

$$(2160\text{ N})(0.65\text{ m}) + (1800\text{ N})(0.25\text{ m}) - A(0.8\text{ m}) = 0$$

$$A = 2318\text{ N}$$

$$\sum F_x = 0:$$

$$B_x = 0$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

© 2004 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

7 - ۳۰/۹۰

Vector Mechanics for Engineers: Statics

Sample Problem 7.3

- Evaluate equivalent internal force-couple systems at sections cut within segments AC , CD , and DB .

From A to C :

$$\sum F_y = 0: 2318 - 7200x - V = 0$$

$$V = 2318 - 7200x$$

$$\sum M_1 = 0: -2318x + 7200x(\frac{1}{2}x) + M = 0$$

$$M = 2318x - 3600x^2$$

From C to D :

$$\sum F_y = 0: 2318 - 2160 - V = 0$$

$$V = 158\text{ N}$$

$$\sum M_2 = 0: -2318x + 2160(x - 0.15) + M = 0$$

$$M = (324 + 158x)\text{ N}\cdot\text{m}$$

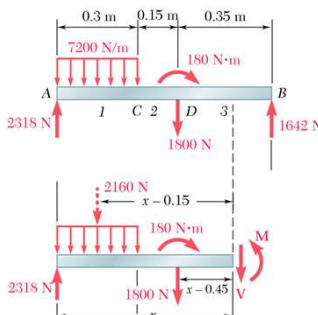
گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

© 2004 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

7 - ۳۱/۹۰

Vector Mechanics for Engineers: Statics

Sample Problem 7.3



- Evaluate equivalent internal force-couple systems at sections cut within segments AC , CD , and DB .

From D to B :

$$\sum F_y = 0: 2318 - 2160 - 1800 - V = 0$$

$$V = -1642 \text{ N}$$

$$\sum M_2 = 0:$$

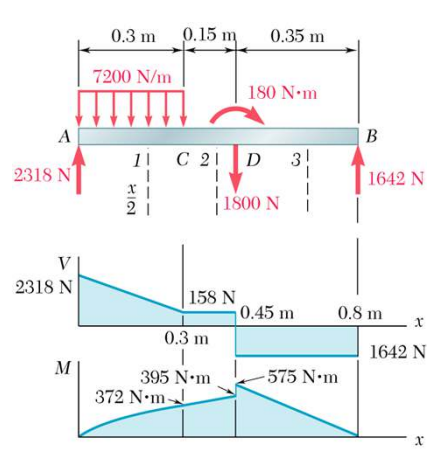
$$-2318x + 2160(x - 0.15) - 180 + 1800(x - 0.45) + M = 0$$

$$M = (1314 - 1642x) \text{ N} \cdot \text{m}$$

7 - 37/90

Vector Mechanics for Engineers: Statics

Sample Problem 7.3



- Plot results.

From A to C :

$$V = 3218 - 7200x$$

$$M = 3218x - 20x^2$$

From C to D :

$$V = 158 \text{ N}$$

$$M = (324 + 158x) \text{ N} \cdot \text{m}$$

From D to B :

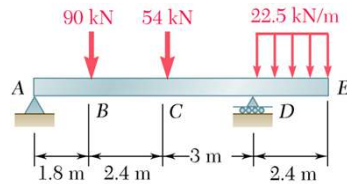
$$V = -1642 \text{ N}$$

$$M = (1314 - 1642x) \text{ N} \cdot \text{m}$$

7 - 38/90

Vector Mechanics for Engineers: Statics

Sample Problem 7.4



Draw the shear and bending-moment diagrams for the beam and loading shown.

SOLUTION:

- Taking entire beam as a free-body, determine reactions at supports.
- Between concentrated load application points, $dV/dx = -w = 0$ and shear is constant.
- With uniform loading between D and E , the shear variation is linear.
- Between concentrated load application points, $dM/dx = V = \text{constant}$. The change in moment between load application points is equal to area under shear curve between points.
- With a linear shear variation between D and E , the bending moment diagram is a parabola.

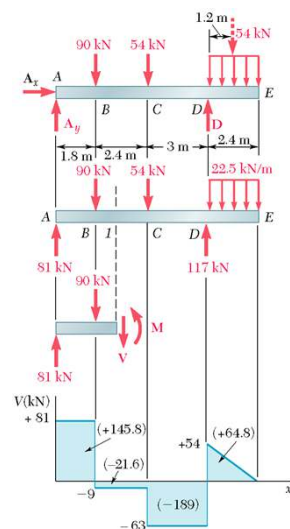
گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالشیری

© 2004 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

7 - 39/90

Vector Mechanics for Engineers: Statics

Sample Problem 7.4



SOLUTION:

- Taking entire beam as a free-body, determine reactions at supports.

$$\sum M_A = 0 :$$

$$D(7.2 \text{ m}) - (90 \text{ kN})(1.8 \text{ m}) - (54 \text{ kN})(4.2 \text{ m}) - (54 \text{ kN})(8.4 \text{ m}) = 0$$

$$D = 117 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 :$$

$$A_y - 90 \text{ kN} - 54 \text{ kN} + 117 \text{ kN} - 54 \text{ kN} = 0$$

$$A_y = 81 \text{ kN}$$

- Between concentrated load application points, $dV/dx = -w = 0$ and shear is constant.
- With uniform loading between D and E , the shear variation is linear.

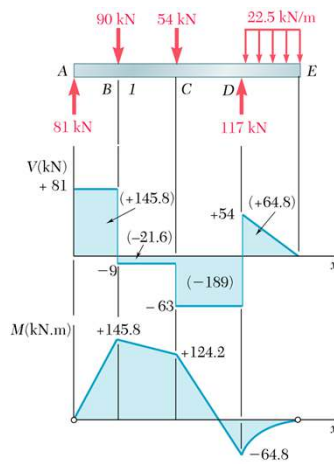
گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالشیری

© 2004 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

7 - 40/90

Vector Mechanics for Engineers: Statics

Sample Problem 7.4



- Between concentrated load application points, $dM/dx = V = \text{constant}$. The change in moment between load application points is equal to area under the shear curve between points.

$$M_B - M_A = +145.8 \quad M_B = +145.8 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_C - M_B = -21.6 \quad M_C = +124.2 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_D - M_C = -189 \quad M_D = -64.8 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_E - M_D = -64.8 \quad M_E = 0$$

- With a linear shear variation between D and E, the bending moment diagram is a parabola.

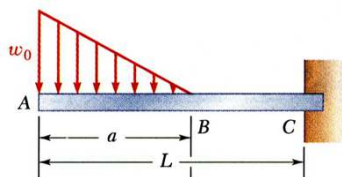
گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

© 2004 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

7 - ۴۱/۹۰

Vector Mechanics for Engineers: Statics

Sample Problem 7.6



Sketch the shear and bending-moment diagrams for the cantilever beam and loading shown.

SOLUTION:

- The change in shear between A and B is equal to the negative of area under load curve between points. The linear load curve results in a parabolic shear curve.
- With zero load, change in shear between B and C is zero.
- The change in moment between A and B is equal to area under shear curve between points. The parabolic shear curve results in a cubic moment curve.
- The change in moment between B and C is equal to area under shear curve between points. The constant shear curve results in a linear moment curve.

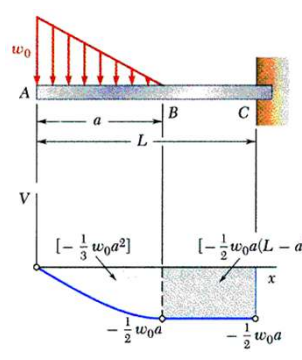
گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

© 2004 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

7 - ۴۲/۹۰

Vector Mechanics for Engineers: Statics

Sample Problem 7.6



SOLUTION:

- The change in shear between A and B is equal to negative of area under load curve between points. The linear load curve results in a parabolic shear curve.

at A , $V_A = 0$, $\frac{dV}{dx} = -w = -w_0$

$$V_B - V_A = -\frac{1}{2} w_0 a \quad V_B = -\frac{1}{2} w_0 a$$

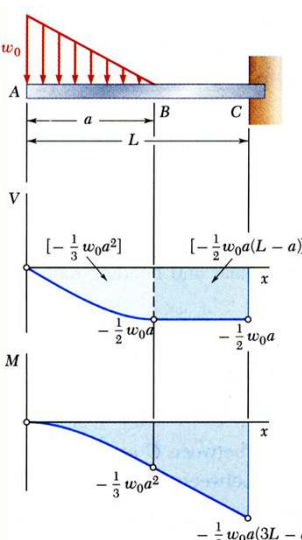
at B , $\frac{dV}{dx} = -w = 0$

- With zero load, change in shear between B and C is zero.

7 - ٤٢/٩٠

Vector Mechanics for Engineers: Statics

Sample Problem 7.6



- The change in moment between A and B is equal to area under shear curve between the points. The parabolic shear curve results in a cubic moment curve.

at A , $M_A = 0$, $\frac{dM}{dx} = V = 0$

$$M_B - M_A = -\frac{1}{3} w_0 a^2 \quad M_B = -\frac{1}{3} w_0 a^2$$

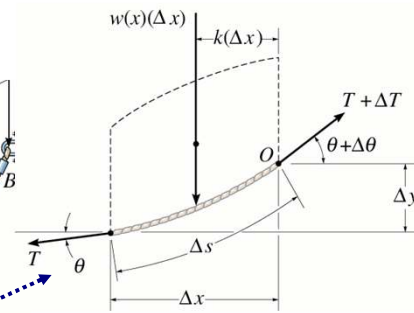
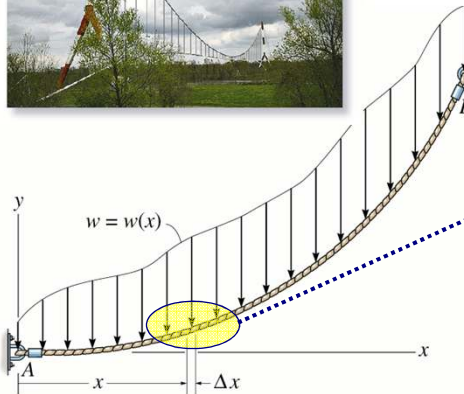
$$M_C - M_B = -\frac{1}{2} w_0 a(L-a) \quad M_C = -\frac{1}{6} w_0 a(3L-a)$$

- The change in moment between B and C is equal to area under shear curve between points. The constant shear curve results in a linear moment curve.

7 - ٤٤/٩٠

Cables

Cables Subjected to Distributed Loads



گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

7 - ۴۵/90

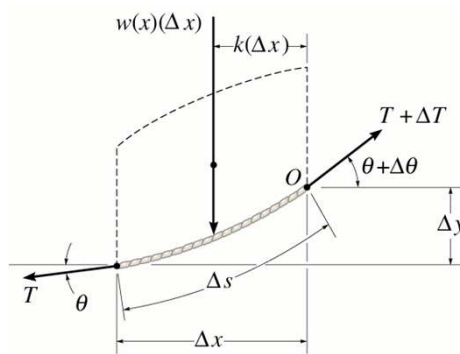
Cables

Cables Subjected to Distributed Loads

$$\sum F_x = 0: -T \cos \theta + (T + \Delta T) \cos(\theta + \Delta \theta) = 0$$

$$\sum F_y = 0: -T \sin \theta - w(x) \Delta x + (T + \Delta T) \sin(\theta + \Delta \theta) = 0$$

$$\sum M_o = 0: w(x)(\Delta x)k(\Delta x) + T \cos \theta(\Delta y) + T \sin \theta(\Delta x) = 0$$



divide by Δx
limit as $\Delta x \rightarrow 0$
also $\Delta y \rightarrow 0, \Delta \theta \rightarrow 0, \Delta T \rightarrow 0$

$$\frac{d(T \cos \theta)}{dx} = 0$$

$$\frac{d(T \sin \theta)}{dx} - w(x) = 0$$

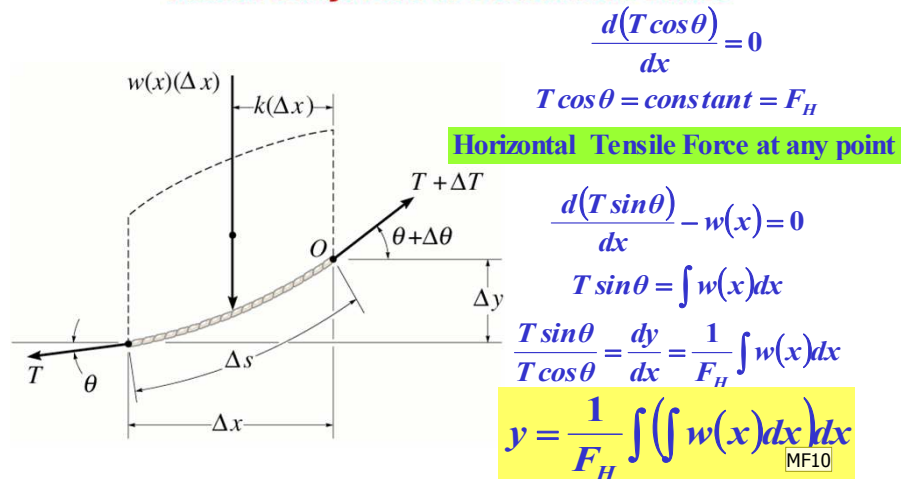
$$\frac{dy}{dx} = \tan \theta$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

7 - ۴۶/90

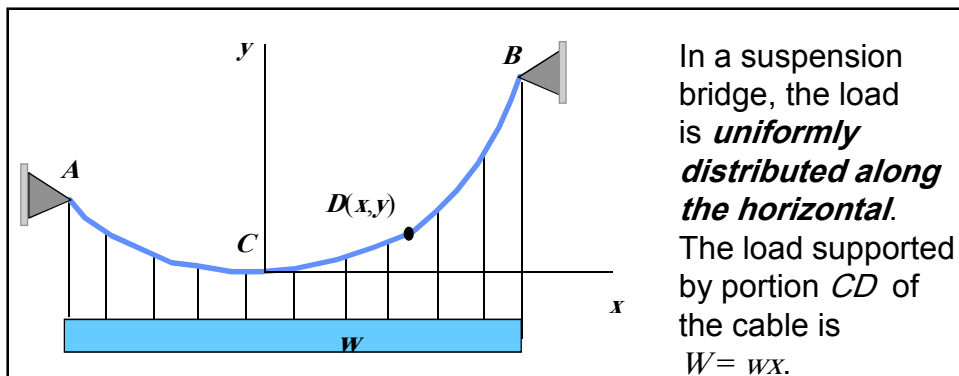
Cables

Cables Subjected to Distributed Loads



Note : there are two more constants of integration C_1 and C_2 .

7 - ٤٧/90



The curve formed by the cable is a ***parabola*** of equation

$$y = \frac{wx^2}{2T_o}$$

Slide 47

MF10 Divide both sides by $T \cos \theta$ and substitute $\tan \theta$ by dy/dx from previous slide.
My Friend • / • Δ / √ • • 9 :

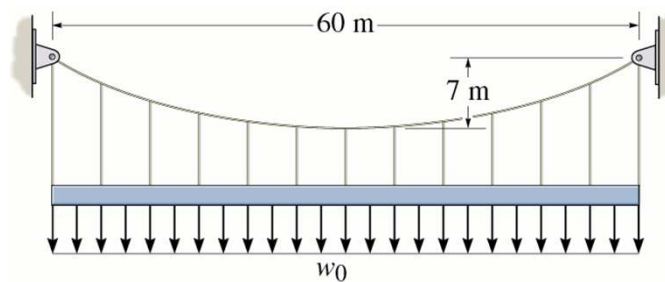
Sample Problem 7.2

Determine the maximum uniform loading w_0 that the cable can support if it is capable of sustaining a maximum tension of 60 kN before it will break,

Given: T_{max} , geometry

Find: $w_{0\ max}$

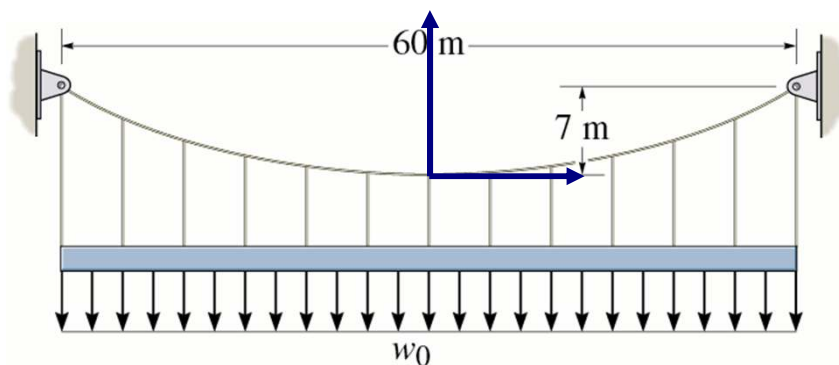
Solution:



گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

7 - ۹/90

Sample Problem 7.2



$$T \cos \theta = F_H$$

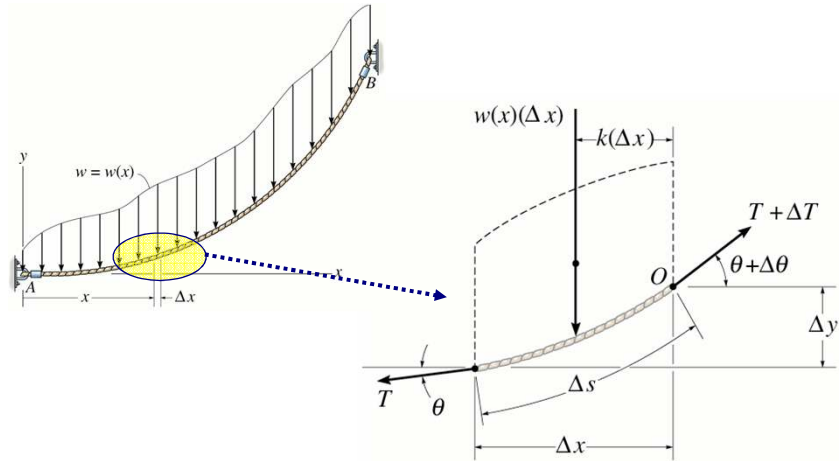
$$\frac{dy}{dx} = \tan \theta = \frac{1}{F_H} \int w(x) dx$$

$$y = \frac{1}{F_H} \int \left(\int w(x) dx \right) dx$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

7 - ۱۰/90

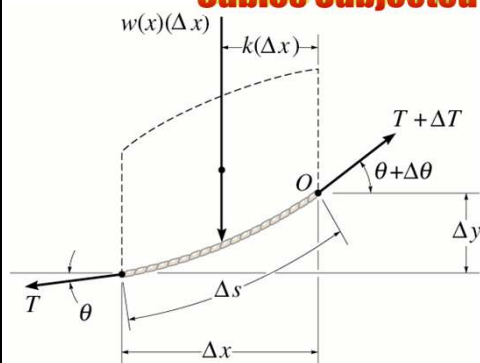
Cables Cables Subjected to Its Own Weight



گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

7 - ۰۱/90

Cables Cables Subjected to Its Own Weight



$$x = \int \frac{ds}{\left\{ 1 + \frac{1}{F_H^2} \left(\int w(s) ds \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}}$$

$$T \cos \theta = F_H$$

$$T \sin \theta = \int w(s) ds$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{F_H} \int w(s) ds$$

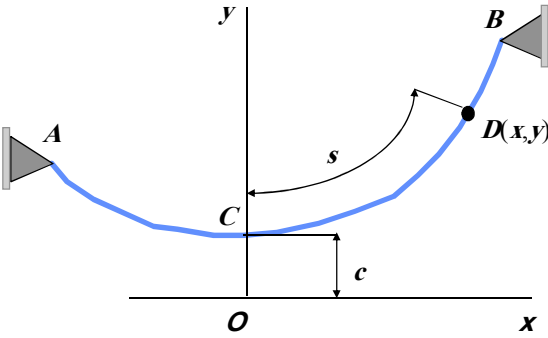
$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\left(\frac{ds}{dx} \right)^2 - 1}$$

$$\frac{ds}{dx} = \left\{ 1 + \frac{1}{F_H^2} \left(\int w(s) ds \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

7 - ۰۲/90



For a cable hanging under its own weight, the load is **uniformly distributed along the cable itself**. The load supported by portion CD of the cable is $W = ws$.

Choosing the origin O at a distance $c = T_0/w$ below C , the relations between the geometry of the **catenary** and cable tension are

$$s = c \sinh \frac{x}{c} \quad y = c \cosh \frac{x}{c} \quad y^2 - s^2 = c^2$$

$$T_O = wc \quad W = ws \quad T = wy$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

7 - ۵۳/90

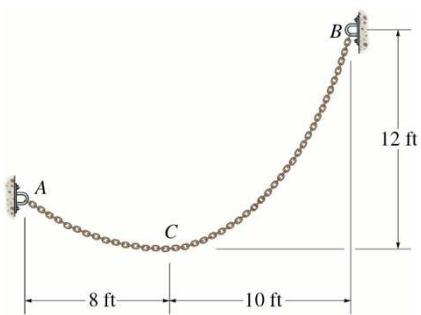
Sample Problem 7.3

The chain has a weight of 3 lb/ft. Determine the tension at points A, B, and C necessary for equilibrium.

Given: w_0 , geometry

Find: T_A , T_B , T_C

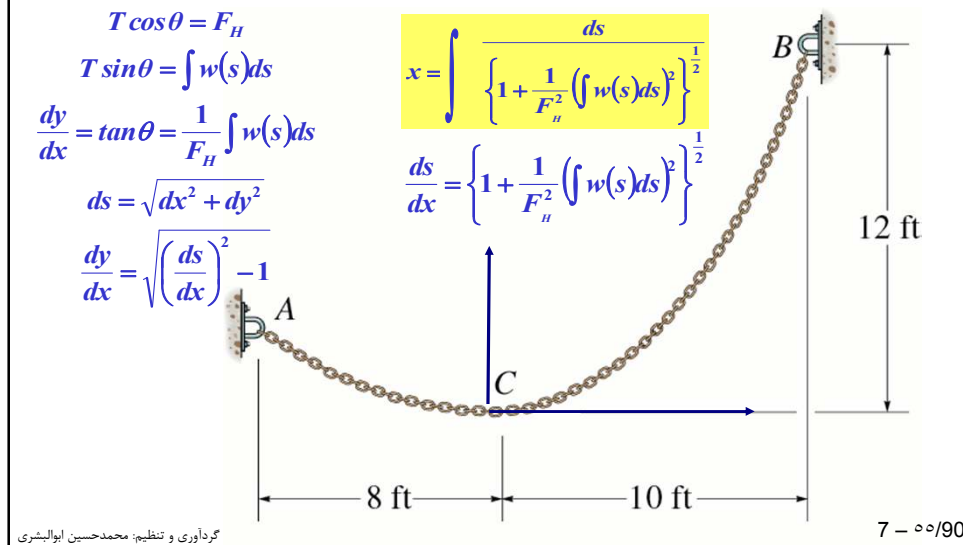
Solution:



گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

7 - ۵۴/90

Sample Problem 7.3



§ 7.1-7.5 Internal forces; shear force & bending moment diagrams

Recall:

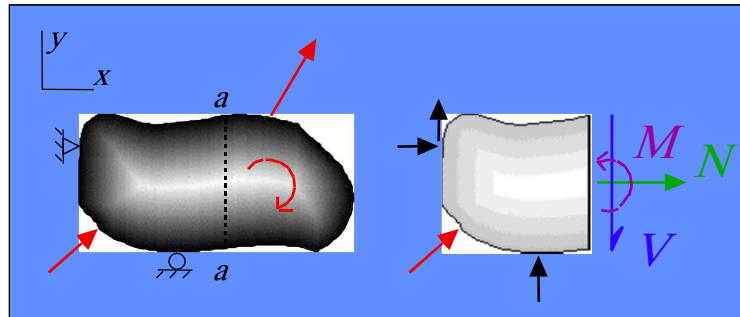
Internal forces are forces in structural members that are generated by *straining* of material (deformable bodies).

Procedure for finding internal forces:

- 1) If appropriate, draw FBD for the whole structure and find any unknown reactions.
- 2) Identify the cross section where internal forces are desired.
- 3) Take a cut through this cross section, draw FBD, and introduce the appropriate internal force unknowns.
- 4) Apply equations of equilibrium and solve

7 - ۰۶/۹۰

2-D: Imagine we are interested in the internal forces on cross section aa :



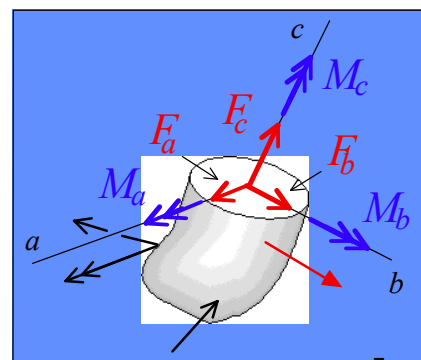
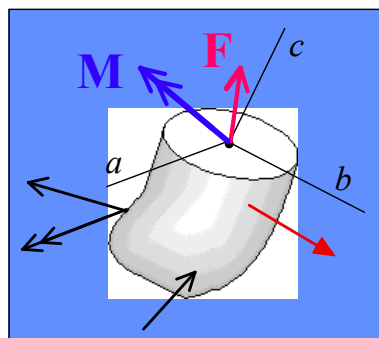
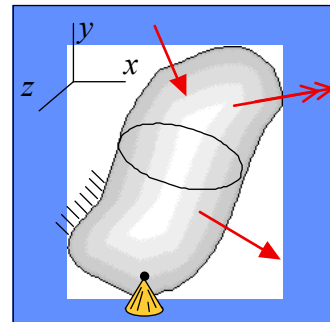
Internal forces: N = normal force
 M = moment
 V = shear force

Observe that the particular values we get for N , M and V depend on the orientation of cross section aa .

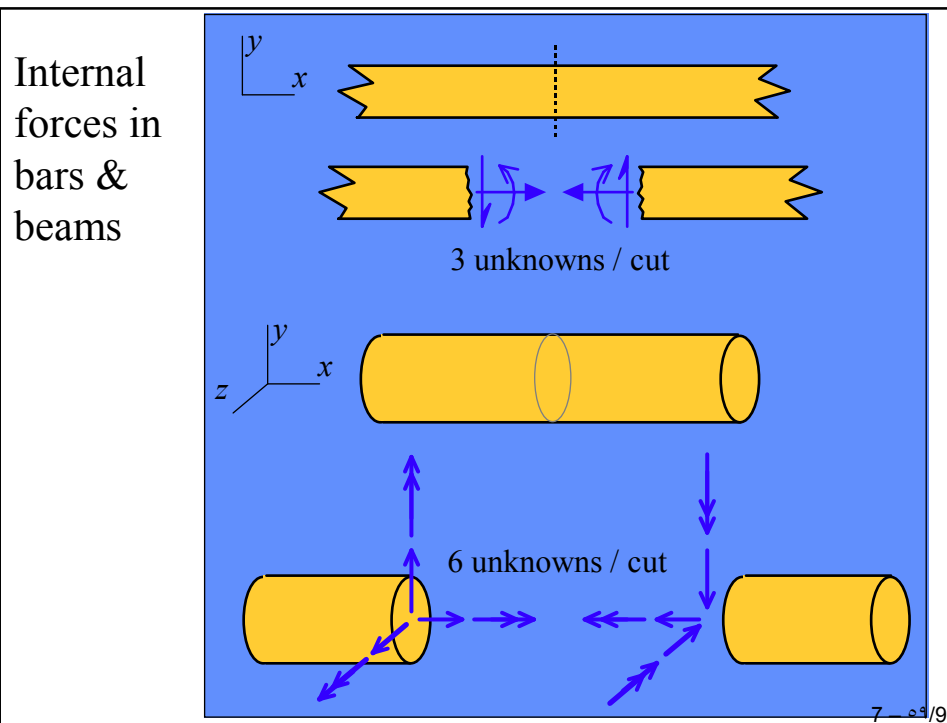
7 - 07/90

3-D: $\mathbf{F}$ and $\mathbf{M}$ are internal force vectors. In component form, these are:

F_a, F_b shear forces
 F_c normal force
 M_a, M_b moments (bending)
 M_c torque (twisting)

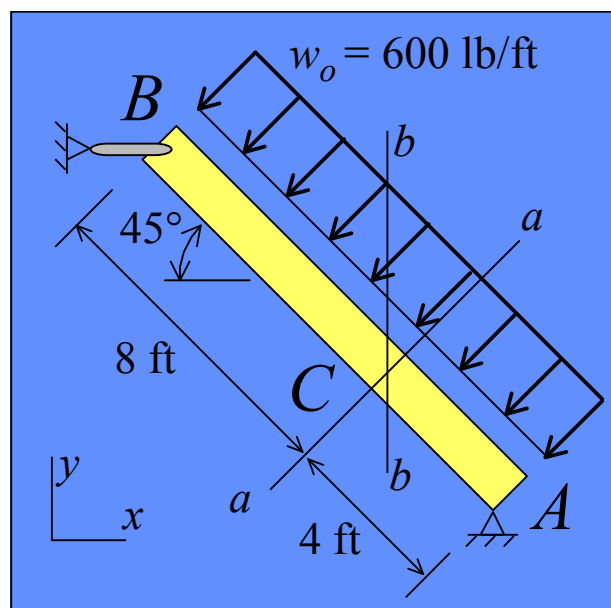


7 - 07/90

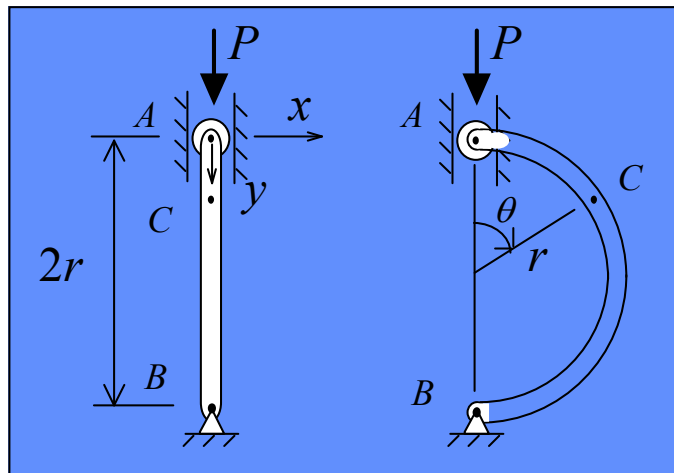


Example 1: Determine the internal forces on cross sections *aa* and *bb*.

A:
on section *aa*:
 $M = 9600 \text{ ft-lb}$
 $N = -3600 \text{ lb}$
 $V = -1200 \text{ lb}$
on section *bb*:
 $M = 9600 \text{ ft-lb}$
 $N = -1697 \text{ lb}$
 $V = -3394 \text{ lb}$



example: For the straight bar, point C is located at position y from point A, and for the curved bar, point C is located at position θ from point A. Determine the internal forces at point C for each case.



absolute values
of answers:

straight bar

$$V = 0$$

$$N = P$$

$$M = 0$$

curved bar

$$V = P \cos \theta$$

$$N = P \sin \theta$$

$$M = Pr \sin \theta$$

7 - ٦١/90

Example 2: Write expressions for the internal forces on the cross section located at position (r, θ) in the curved quarter-circular beam under tip loading P . Use a cut consistent with a cylindrical r, θ, z coordinate system.

A:

$$F_r = 0$$

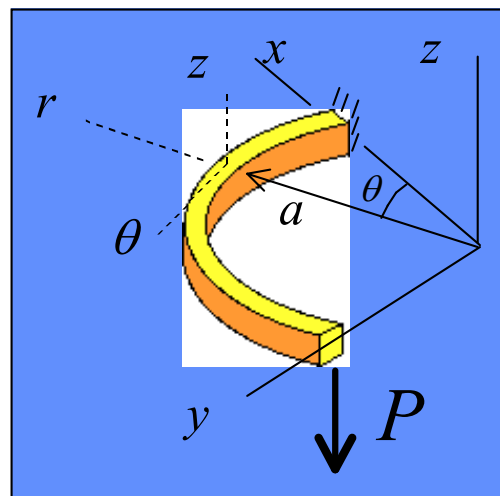
$$F_\theta = 0$$

$$F_z = -P$$

$$M_r = -Pa \sin \theta$$

$$M_\theta = -Pa (1 - \cos \theta)$$

$$M_z = 0$$



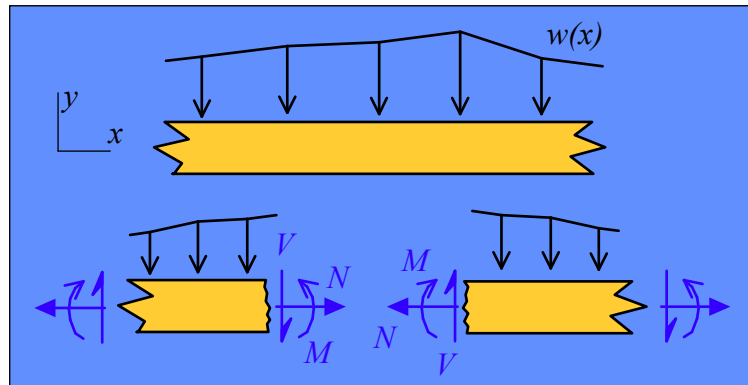
گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالشیری

7 - ٦١/90

§ 7.3-7.5 Shear & moment in beams

In the analysis and design of beams, knowledge of the shear and moment as functions of position is useful.

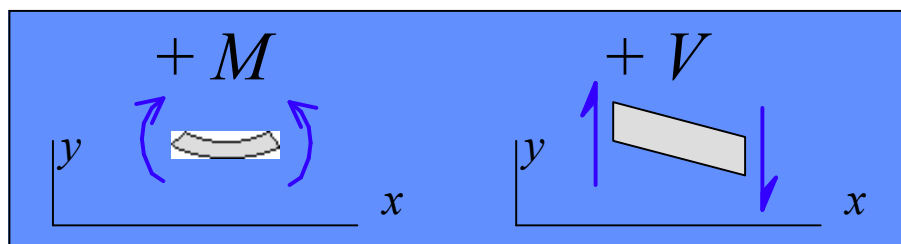
Sign convention:



7 - ٦٣/٩٠

To draw shear and moment diagrams (as well as for finding V & M by integration as in §7.6), it is important to have a consistent sign convention:

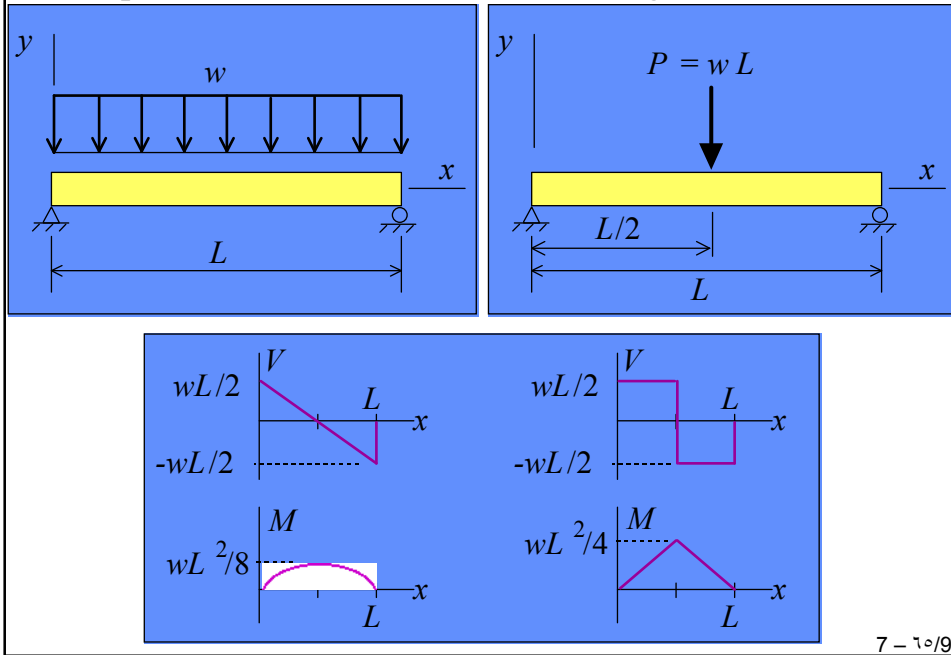
- Distributed load $w(x)$ is positive downward ($-y$ direction).
- Positive moment M gives positive curvature.
- Shear V is positive as shown:



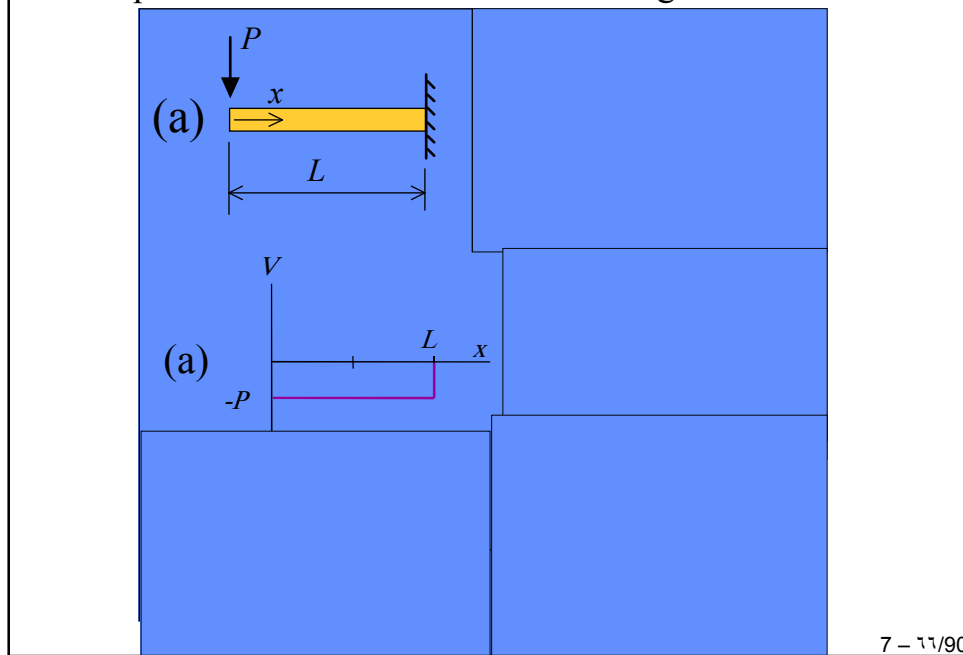
گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالشیری

7 - ٦٤/٩٠

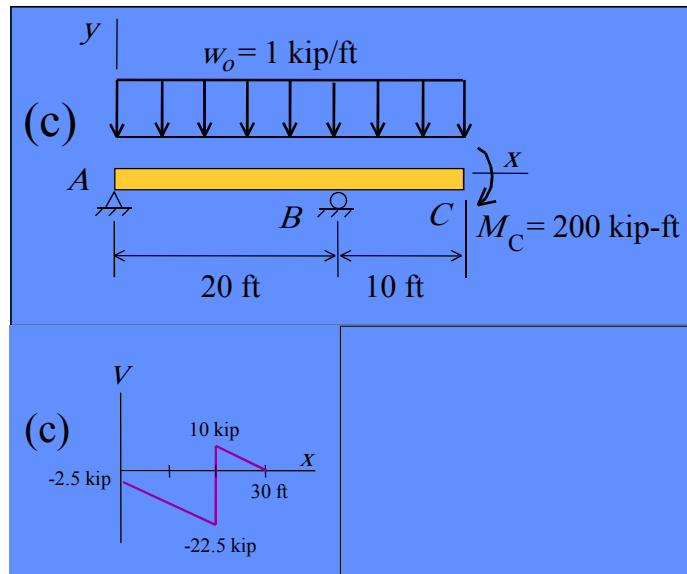
Example 3: Draw shear and moment diagrams for:



Example 4: Draw shear and moment diagrams for:



Example 4: Draw shear and moment diagrams for:

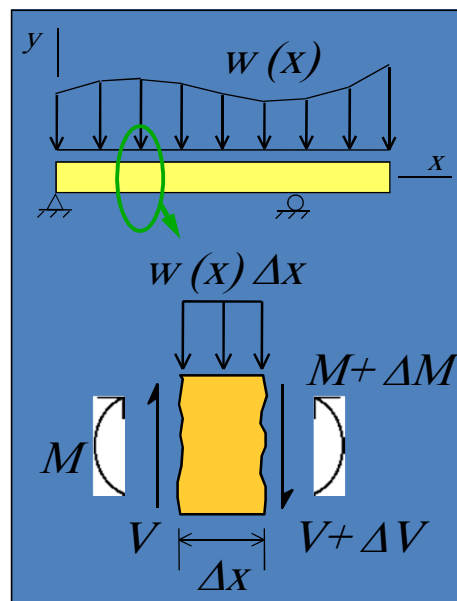


گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالشیری

7 - ۶۷/۹۰

§ 7.6 Relations between $w(x)$, $V(x)$ & $M(x)$

Equilibrium of a small piece of beam:



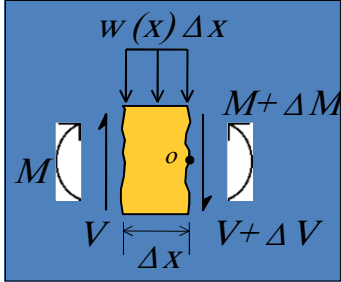
گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالشیری

7 - ۶۸/۹۰

$$\sum F_y = 0 = V - V - \Delta V - w\Delta x$$

$$\frac{\Delta V}{\Delta x} = -w$$

take $\lim_{\Delta x \rightarrow 0}$ for $\boxed{\frac{dV}{dx} = -w}$



$$\sum M_o = 0 = -M + M + \Delta M - V\Delta x + w\Delta x \frac{\Delta x}{2}$$

$$\frac{\Delta M}{\Delta x} = V - w \frac{\Delta x}{2}$$

take $\lim_{\Delta x \rightarrow 0}$ for $\boxed{\frac{dM}{dx} = V}$ So ... $\boxed{\frac{d^2 M}{dx^2} = -w}$

7 - 11/90

$$\frac{dV}{dx} = -w$$

$$\frac{dM}{dx} = V$$

The slope of the shear $V(x)$ is equal to the negative of the distributed load $w(x)$.

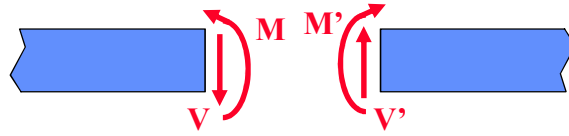
The slope of the moment $M(x)$ is equal to the shear $V(x)$.

If $w(x)$ is known, then the shear V and moment M can be easily found by integration:

$$dV = -w dx \Rightarrow V = \int -w dx \quad \text{or} \quad V_2 - V_1 = \int_{x_1}^{x_2} -w dx$$

$$dM = V dx \Rightarrow M = \int V dx \quad \text{or} \quad M_2 - M_1 = \int_{x_1}^{x_2} V dx$$

7 - 12/90



Constructing these diagrams is generally facilitated by using the relationships

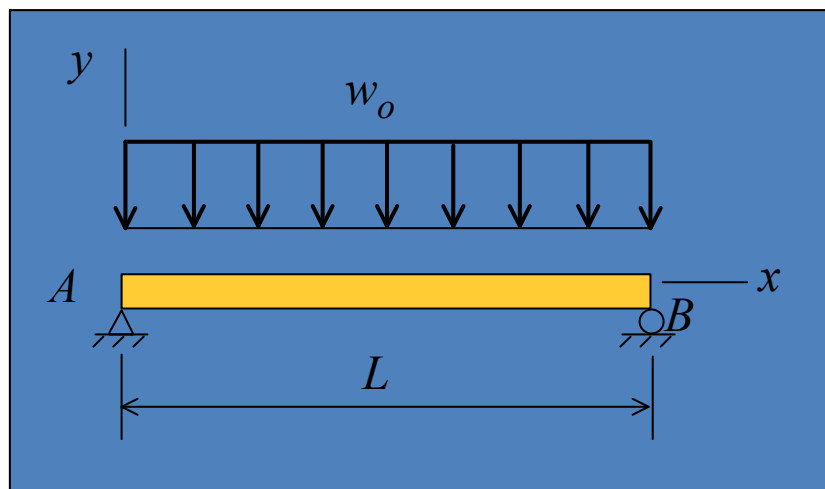
$$\frac{dV}{dx} = -w \quad \frac{dM}{dx} = V$$

Integrating these, we find

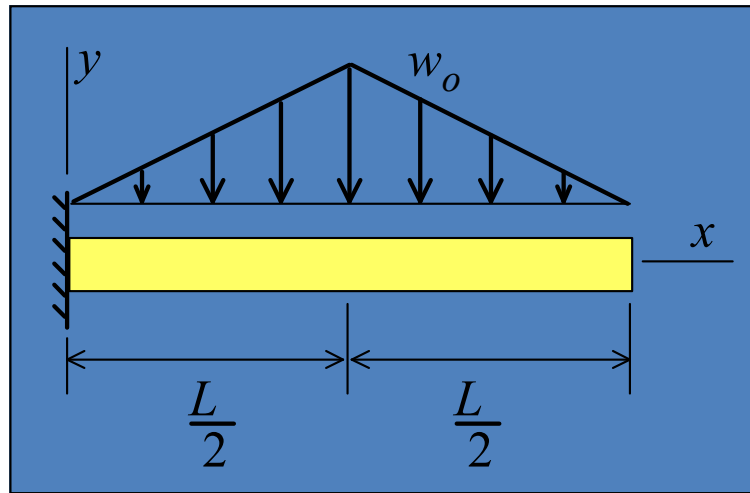
$$V_D - V_C = -(\text{area under the load curve between } C \text{ and } D)$$

$$M_D - M_C = \text{area under the shear curve between } C \text{ and } D$$

Example 1: Using integration, determine $V(x)$ and $M(x)$ for the uniformly loaded simply supported beam shown.



Example 2: Using integration, determine $V(x)$ and $M(x)$ for the cantilever beam and loading shown.



گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

7 - ۷۳/۹۰

How do we use these procedures when there are discrete forces and moments (external forces or reactions) that appear on the beam? Discrete forces and moments result in “jump conditions.”

Discrete
Force F :

$$\begin{aligned} V_+ - V_- &= F \\ M_+ - M_- &= 0 \end{aligned}$$

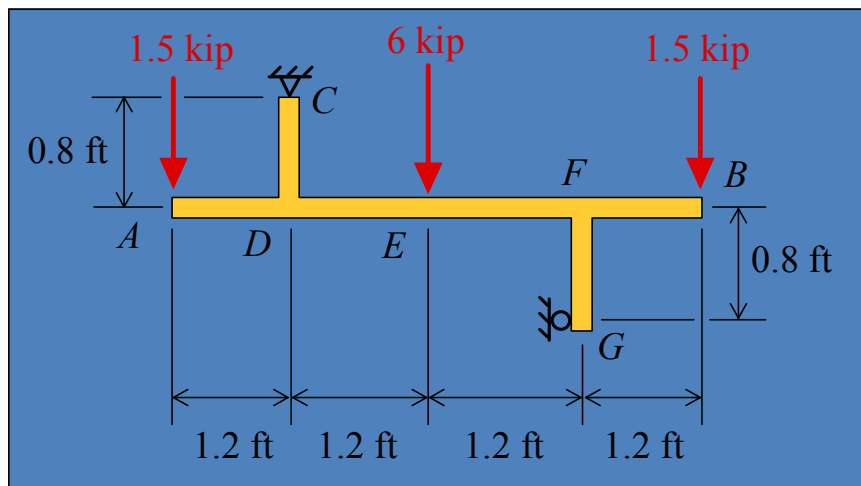
Discrete
Couple C :

$$\begin{aligned} V_+ - V_- &= 0 \\ M_+ - M_- &= -C \end{aligned}$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

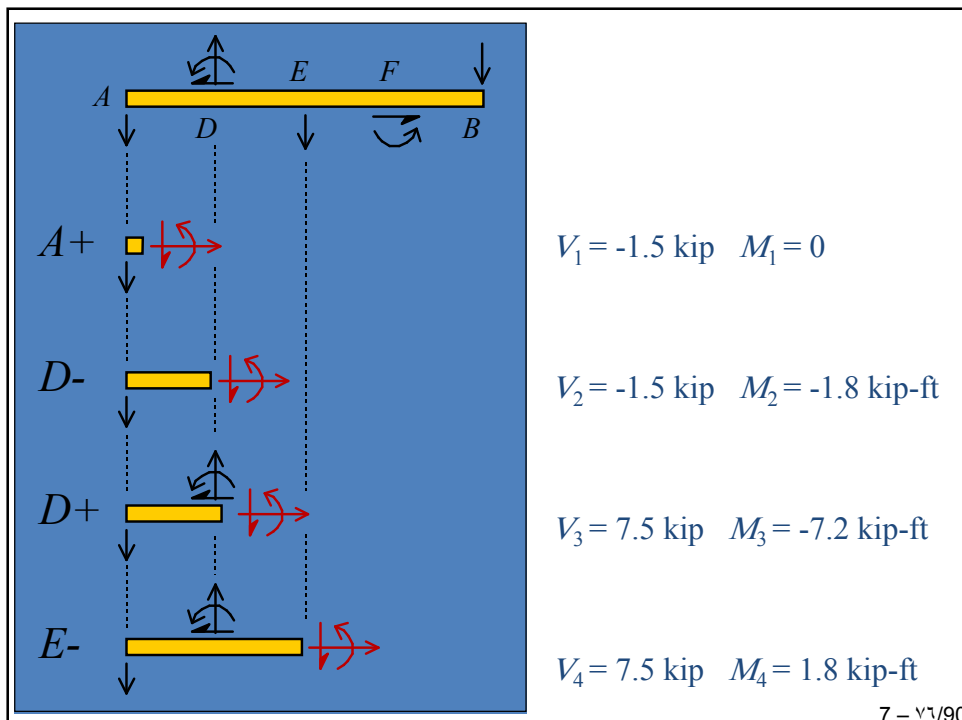
7 - ۷۴/۹۰

Example 3: Determine $V(x)$ and $M(x)$ for the beam AB .

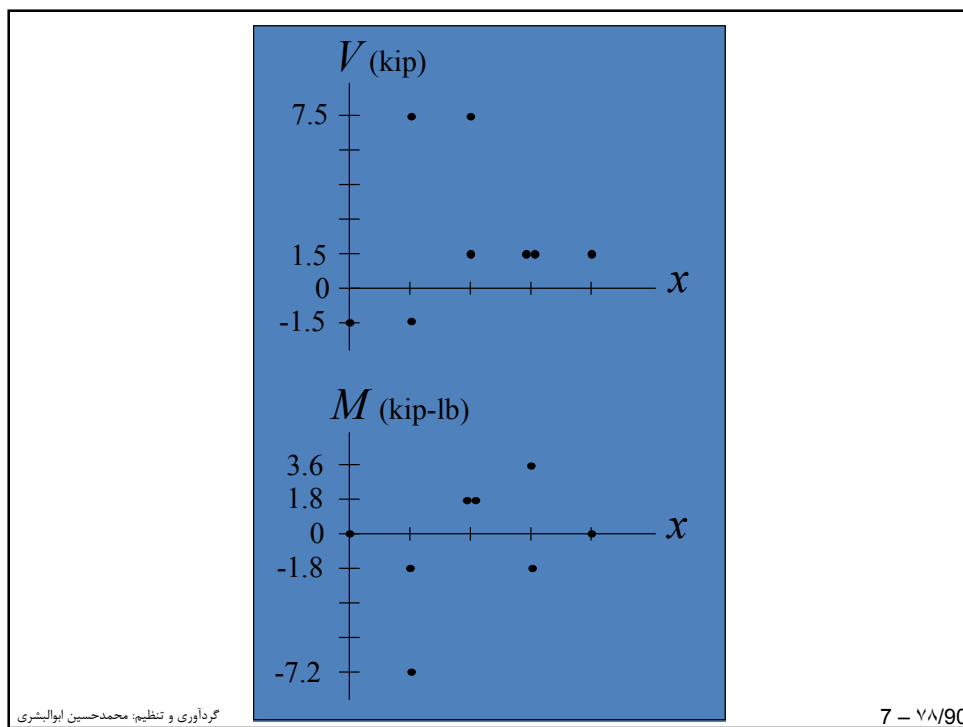
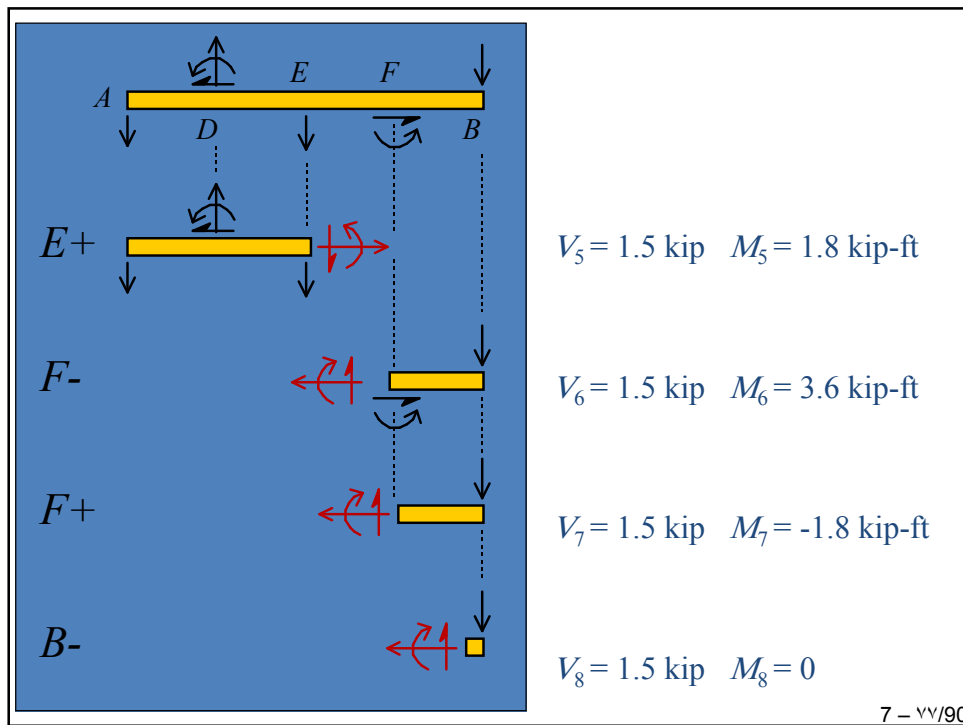


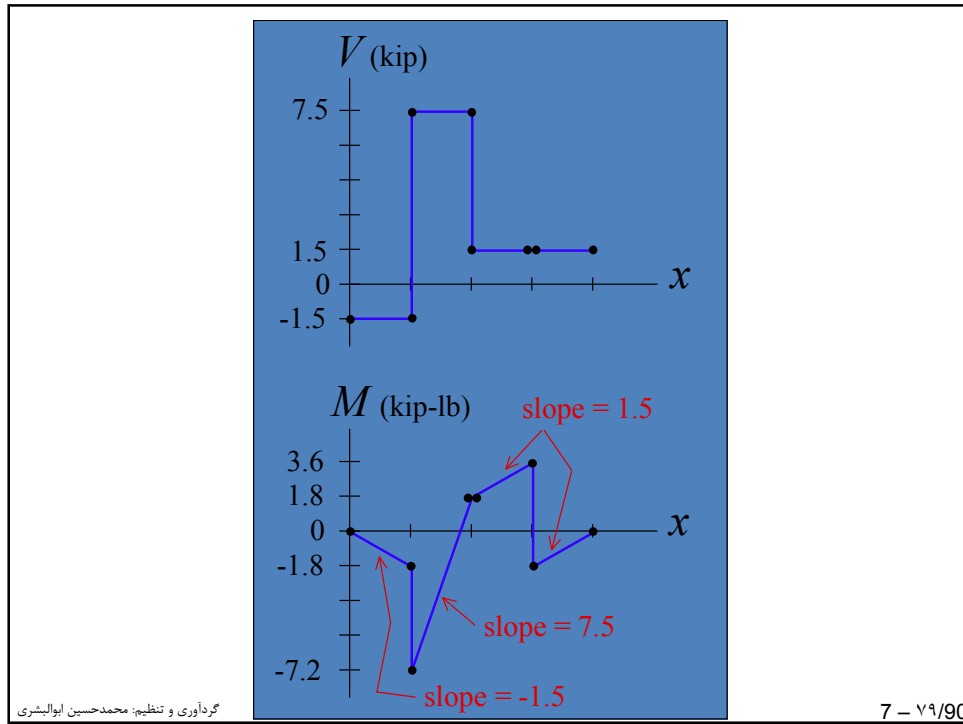
گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

7 - ۷۰/۹۰

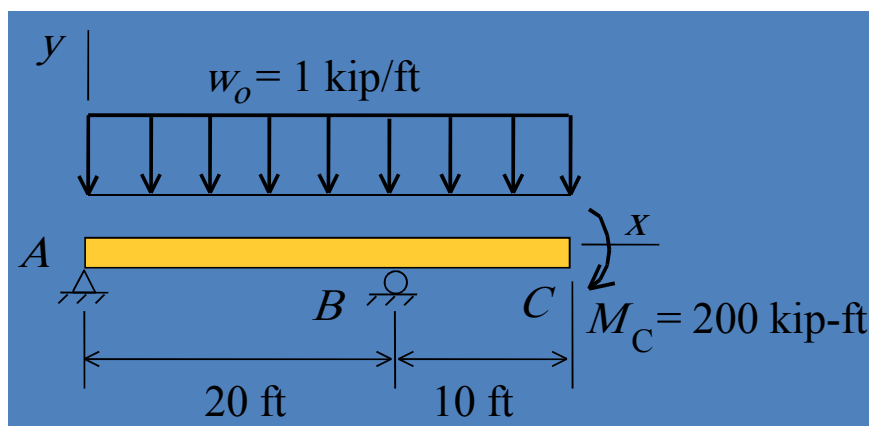


7 - ۷۱/۹۰

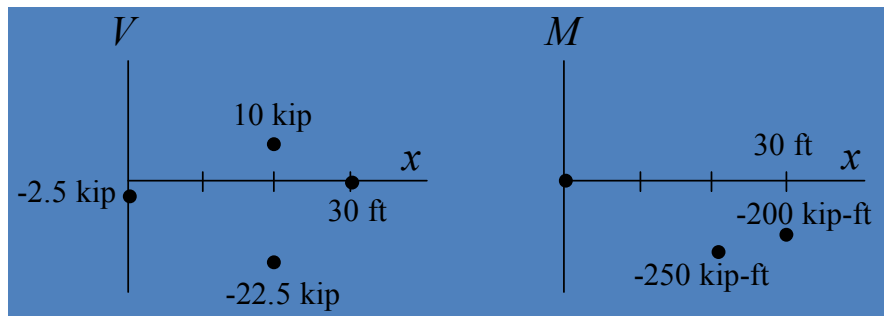




example: Draw V and M diagrams for beam ABC .



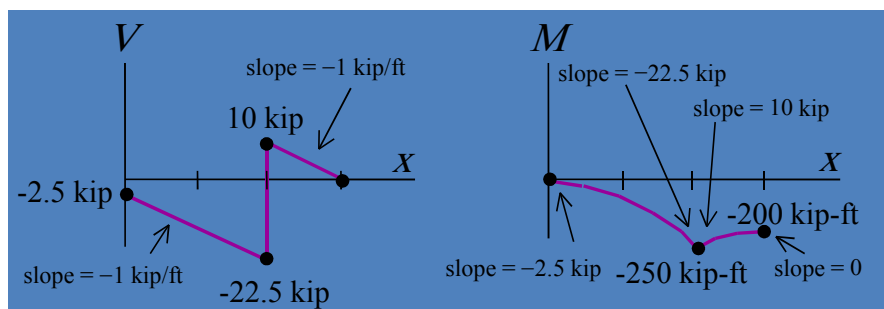
step 1: Compute V and M at *key* points along the beam.



گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

7 - ۸۱/۹۰

step 2: Use knowledge of $dV/dx = -w$ and $dM/dx = V$ to sketch curves between key points.



گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

7 - ۸۲/۹۰

