

بسم الله الرحمن الرحيم

Chapter 6 (or 4 in the 1st edition) Linear Programming Methods for Optimum Design

© M.H. Abolbashari, Ferdowsi University of Mashhad

مقدمه

هر مسئله طراحی بهین که توابع هزینه و قید آن بر حسب متغیرهای طراحی خطی باشند یک مسئله برنامه‌ریزی خطی یا بهینه‌سازی خطی نامیده می‌شود. مسائل برنامه‌ریزی خطی در بسیاری از زمینه‌های مهندسی مانند منابع آب، مهندسی سیستم‌ها، کنترل ترافیک، مدیریت منابع، مهندسی حمل‌ونقل و مهندسی برق کاربرد دارد. افزون بر این، یک روش حل مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی این است که به صورت رشته‌ای از برنامه‌های خطی تبدیل شوند.

Definition of a Standard Linear Programming Problem

- Minimization of a function
- Equality constraints
- Nonnegativity of design variables
- Nonnegativity of right hand of constraints

$$\min f(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n = \sum_{i=1}^n c_i x_i = C^T X$$

Linear Constraints

انواع قیدهای خطی

شکل استاندارد در برنامه ریزی خطی

$$a_{i1}y_1 + \dots + a_{ik}y_k \leq b_i \rightarrow \begin{cases} \text{nonnegative slack variable } s_i \geq 0 \\ a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \dots + a_{ik}y_k + s_i = b_i \end{cases} \quad \text{کمبود}$$

$$a_{i1}y_1 + \dots + a_{ik}y_k = b_i$$

$$a_{i1}y_1 + \dots + a_{ik}y_k \geq b_i \rightarrow \begin{cases} \text{surplus variable } s_i \geq 0 \\ a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \dots + a_{ik}y_k - s_i = b_i \end{cases} \quad \text{زیادتی}$$

Unrestricted Variables

We require all design variables to be **nonnegative** in the standard LP problem.

If a design variable y_j is unrestricted in sign, it can always be written as the difference of two nonnegative variables, as $y_j = y_j^+ - y_j^-$ with $y_j^+ \geq 0$ and $y_j^- \geq 0$

3/43

Standard LP Definition

Find an n -vector x to **minimize** a linear cost function

$$\begin{aligned} f &= c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \\ \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \quad \quad \quad \dots \quad \quad \quad \cdot \\ \dots \quad \quad \quad \dots \quad \quad \quad \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \end{aligned} \quad (6.5)$$

$$b_i \geq 0, i=1 \text{ to } m$$

$$x_j \geq 0, j=1 \text{ to } n$$

چهار شرط شکل استاندارد

or

$$\begin{aligned} \text{minimize } f &= \sum_{i=1}^n c_i x_i \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &= b_i; \quad b_i \geq 0, i=1 \text{ to } m \\ x_j &\geq 0, j=1 \text{ to } n \end{aligned} \quad \text{or} \quad \begin{aligned} \text{minimize } f &= C^T X \\ AX &= b; \quad b \geq 0 \\ X &\geq 0 \end{aligned}$$

4/43

Conversion to Standard LP Form

EXAMPLE 6.1

Convert the following problem into the standard LP form:

$$\begin{aligned} &\text{maximize} && z = 2y_1 + 5y_2 \\ &\text{subject to} && 3y_1 + 2y_2 \leq 12, \\ & && 2y_1 + 3y_2 \geq 6, \text{ and} \\ & && y_1 \geq 0, y_2 \text{ is unrestricted in sign} \end{aligned}$$

Solution. To transform the problem into the standard LP form, we take the following steps:

1. Since y_2 is unrestricted in sign, we split it into its positive and negative parts as $y_2 = y_2^+ - y_2^-$ with $y_2^+ \geq 0, y_2^- \geq 0$.
2. Substituting this definition of y_2 into the problem, we get:

$$\begin{aligned} &\text{maximize} && z = 2y_1 + 5(y_2^+ - y_2^-) \\ &\text{subject to} && 3y_1 + 2(y_2^+ - y_2^-) \leq 12, \\ & && 2y_1 + 3(y_2^+ - y_2^-) \geq 6, \text{ and} \\ & && y_1, y_2^+, y_2^- \geq 0. \end{aligned}$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

5/43

3. The right sides of both the constraints are nonnegative

4. Converting to a minimization problem subject to equality constraints, we get the problem in the standard form as

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && f = -2y_1 - 5(y_2^+ - y_2^-) \\ &\text{subject to} && 3y_1 + 2(y_2^+ - y_2^-) + s_1 = 12, \\ & && 2y_1 + 3(y_2^+ - y_2^-) - s_2 = 6, \\ & && y_1, y_2^+, y_2^-, s_1, s_2 \geq 0, \end{aligned}$$

where s_1 = slack variable for the first constraint and s_2 = surplus variable for the second constraint.

5. We can redefine the solution variables as $x_1 = y_1, x_2 = y_2^+, x_3 = y_2^-, x_4 = s_1, x_5 = s_2$ and rewrite the problem in the standard form as

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && f = -2x_1 - 5x_2 + 5x_3 && \text{(a)} \\ &\text{subject to} && 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 12 && \text{(b)} \\ & && 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 - x_5 = 6 && \text{(c)} \\ & && x_i \geq 0, i = 1 \text{ to } 5 && \text{(d)} \end{aligned}$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

6/43

Comparing the preceding equations with Eqs. (6.9) to (6.11), we can define the following quantities:

$m=2$ (the number of equations)

$n=5$ (the number of variables)

$$X = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5]^T, \quad C = [-2 \ -5 \ 5 \ 0 \ 0]^T \quad (e)$$

$$b = [12 \ 6]^T, \quad A = [a_{ij}]_{2 \times 5} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -3 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T \quad (f)$$

مسائل زیر را حل کرده و تا دو هفته دیگر تحویل فرمایید:

4) 1,2,3, 9, 16

Basic Concepts

- Since all functions are linear in an LP problem, the feasible set defined by linear equalities or inequalities is **convex**. Also, the cost function is linear, so it is convex. Therefore, the LP problem is **convex**, and if an *optimum solution* exists, it is **global**.
- Note also that even when there are inequality constraints in an LP design problem, the **solution, if it exists, always lies on the boundary of the feasible set**; i.e., some constraints are always active at the optimum.

Proof: Necessary conditions for an **unconstrained** optimum:

$$\partial f / \partial x_i = 0, \quad f = \sum_{i=1}^n c_i x_i \rightarrow c_i = 0 \text{ for } i=1 \text{ to } n.$$

This is not possible, as all c_i are not zero. If all c_i were zero, there would be no cost function.

Therefore, by contradiction, **the optimum solution for any LP problem must lie on the boundary of the feasible set.**

9/43

Profit Maximization Problem— Characterization of Solution for LP Problems

$$\text{minimize } f = -400x_1 - 600x_2$$

$$x_1 + x_2 \leq 16$$

$$\frac{x_1}{28} + \frac{x_2}{14} \leq 1$$

$$\frac{x_1}{14} + \frac{x_2}{24} \leq 1$$

$$-x_1, -x_2 \leq 0$$

Standard form

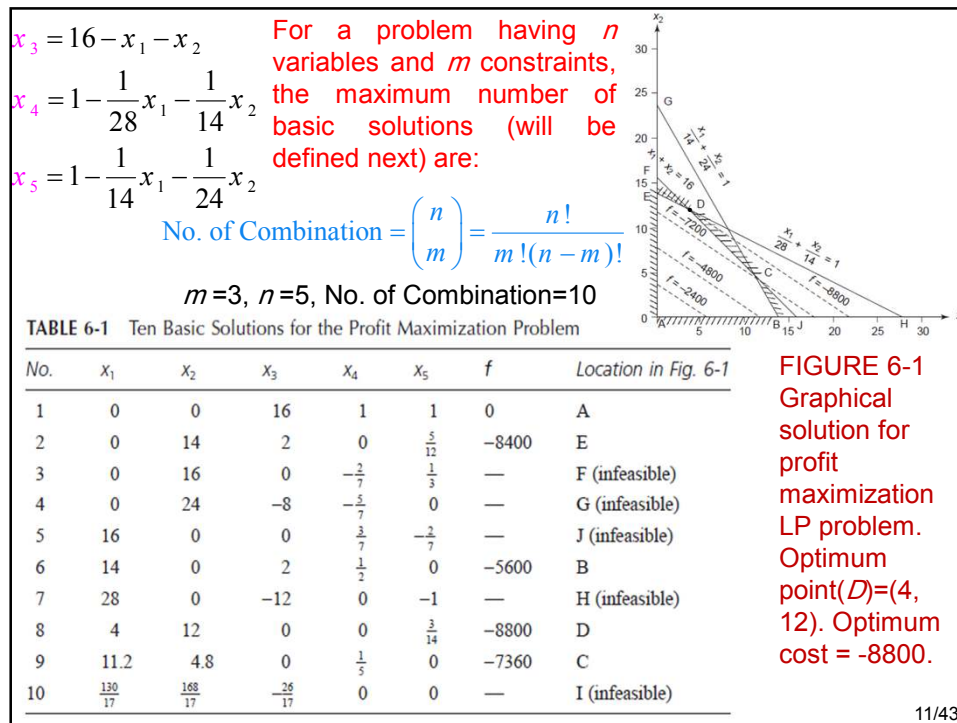
$$x_1 + x_2 + x_3 = 16$$

$$\frac{1}{28}x_1 + \frac{1}{14}x_2 + x_4 = 1$$

$$\frac{1}{14}x_1 + \frac{1}{24}x_2 + x_5 = 1$$

$$x_i \geq 0, \quad i=1 \text{ to } 5$$

Slack variables



11/43

LP Terminology

Vertex (Extreme) Point. This is a point of the feasible set that does not lie on a line segment joining two other points of the set. For example, every point on the circumference of a circle and each vertex of the polygon satisfy the requirements for an extreme point.

Feasible Solution. Any solution of the constraint Eq. satisfying the nonnegativity conditions is a feasible solution. In the profit maximization example of [Fig. 6-1](#), every point bounded by the polygon $ABCDE$ (convex set) is a feasible solution.

Basic Solution. A basic solution is a solution of the constraint Eq. (6.5) obtained by setting the “redundant number” ($n-m$) of the variables to zero and solving the equations simultaneously for the remaining variables. The variables set to zero are called nonbasic, and the remaining ones are called basic. In the profit maximization example, each of the 10 solutions in [Table 6-1](#) is basic, but only A, B, C, D, and E are basic and feasible.

12/43

Basic Feasible Solution. A basic solution satisfying the nonnegativity conditions on the variables is called a basic feasible solution. Note that solutions 1, 2, 6, 8, and 9 in [Table 6-1](#) are the basic feasible solutions.

Degenerate Basic Solution.

If a basic variable has zero value in a basic solution, the solution is called a degenerate basic solution.

Degenerate Basic Feasible Solution. If a basic variable has zero value in a basic feasible solution, the solution is called degenerate basic feasible solution.

Optimum Solution. A feasible solution minimizing the cost function is called an optimum solution. The point *D* in [Fig. 6-1](#) corresponds to the optimum solution.

Optimum Basic Solution. It is a basic feasible solution that has optimum cost function value. From [Table 6-1](#) and [Fig. 6-1](#) it is clear that only solution number 8 is the optimum basic solution.

13/43

Determination of Basic Solutions

maximize $Z = 4x_1 + 5x_2$ subject to $-x_1 + x_2 \leq 4$, $x_1 + x_2 \leq 6$, $x_1, x_2 \geq 0$,

minimize $f = -4x_1 - 5x_2$
subject to $-x_1 + x_2 + x_3 = 4$
 $x_1 + x_2 + x_4 = 6$
 $x_i, i=1 \text{ to } 4$

$$\text{No. of Combination} = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

$m=2$, $n=4$, No. of Combination=6

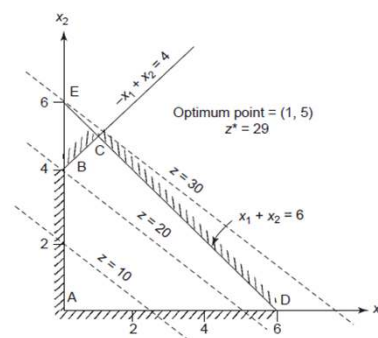


TABLE 6-2 Basic Solutions for Example 6-3

No.	x_1	x_2	x_3	x_4	f	Location in Fig. 6-2
1	0	0	4	6	0	A
2	0	4	0	2	-20	B
3	0	6	-2	0	—	infeasible
4	-4	0	0	10	—	infeasible
5	6	0	10	0	-24	D
6	1	5	0	0	-29	C

14/43

Theorem 6.1 Extreme Points and Basic Feasible Solutions

The collection of feasible solutions for an LP problem constitutes a convex set whose extreme points correspond to basic feasible solutions.

Theorem 6.2 Basic Theorem of Linear Programming

Let the $m \times n$ coefficient matrix A of the constraint equations have full row rank, i.e., $\text{rank}(A) = m$. Then

1. If there is a feasible solution, there is a basic feasible solution.
2. If there is an optimum feasible solution, there is an optimum basic feasible solution.

مسائل زیر را حل کرده و تا دو هفته دیگر تحویل فرمایید:

4) 20, 21, 26

4) 1, 2, 3, 9, 16

تمرین‌های قبلی:

پنداره‌های اساسی و گام‌های روش سیمپلکس

اساس روش سیمپلکس حرکت از یک جواب قابل قبول اصلی به طرف یک نقطه قابل قبول اصلی دیگر است به نحوی که تابع هزینه به طور پیوسته کاهش یابد. در واقع جستجو در میان جواب‌های قابل قبول اصلی، اساس کار این روش است.

در این روش از فرآیند حذفی گوس - جردن استفاده می‌شود.

قبل از اینکه روش سیمپلکس ارائه شود، مفاهیم سیمپلکس، شکل‌های کانونی و گام لولایی که اساس تدوین روش هستند معرفی می‌شوند.

سیمپلکس

- در فضای دو بعدی اگر سه نقطه روی یک خط نباشند تشکیل یک سیمپلکس می‌دهند.
- در فضای سه بعدی اگر چهار نقطه روی یک صفحه نباشند تشکیل یک سیمپلکس می‌دهند.
- در حالت کلی، یک سیمپلکس در فضای n بعدی یک پوسته محدب از هر $n+1$ نقطه‌ای است که روی یک سطح قرار نداشته باشند. سیمپلکس نشان دهنده مجموعه محدب است.

شکل کانونی: Canonical Form

- نوعی نوشتن دستگاه معادلات که در آن در هر معادله‌ای یک متغیر با ضریب واحد وجود دارد که در بقیه معادلات ظاهر نشده است. (که اینها همان متغیرهای کمبود هستند)

$$\begin{aligned} x_1 + a_{1,m+1}x_{m+1} + a_{1,m+2}x_{m+2} + \dots + a_{1,n}x_n &= b_1 \\ x_2 + a_{2,m+1}x_{m+1} + a_{2,m+2}x_{m+2} + \dots + a_{2,n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ x_m + a_{m,m+1}x_{m+1} + a_{m,m+2}x_{m+2} + \dots + a_{m,n}x_n &= b_m \end{aligned}$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

19/43

- شکل کانونی را می‌توان با یک معادله ماتریسی نشان داد:

$$I_{(m)}X_{(m)} + Q_{(m \times (n-m))}X_{(n-m)} = b$$

در حالی که:

$I_{(m)}$ = ماتریس واحد m -بعدی

$X_{(m)} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_m]^T$ بردار m -بعدی

$X_{(n-m)} = [x_{m+1} \ x_{m+2} \ \dots \ x_n]^T$ بردار $(n-m)$ بعدی

$Q =$ ماتریس $m \times (n-m)$ که از ضرایب متغیرهای x_{m+1} تا x_n در معادلات صفحه پیش تشکیل شده است.

$$b = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_m]^T$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

20/43

جدول شکل کانونی

TABLE 6-3 Representation of a Canonical Form in a Tableau

#	Basic↓	x_1	x_2	•	•	•	x_m	x_{m+1}	x_{m+2}	•	•	•	x_n	RS
1	x_1	1	0	•	•	•	0	$a_{1,m+1}$	$a_{1,m+2}$	•	•	•	$a_{1,n}$	b_1
2	x_2	0	1	•	•	•	0	$a_{2,m+1}$	$a_{2,m+2}$	•	•	•	$a_{2,n}$	b_2
3	x_3	0	0	•	•	•	0	$a_{3,m+1}$	$a_{3,m+2}$	•	•	•	$a_{3,n}$	b_3
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
m	x_m	0	0	•	•	•	1	$a_{m,m+1}$	$a_{m,m+2}$	•	•	•	$a_{m,n}$	b_m

خصوصیات جدول کانونی

- متغیرهای غیراصلی صفر هستند.
- هر ستون جدول مربوط به یک متغیر است.
- هر سطر مربوط به یک متغیر اصلی است.
- مقدار متغیر اصلی در ستون آخر آمده است.
- ستون‌های مربوط به متغیرهای اصلی را ستون اصلی می‌نامند و بقیه را غیراصلی می‌نامند.
- ستون‌های اصلی پایه‌ای برای فضای برداری m بعدی تشکیل می‌دهند.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

21/43

گام لولایی

- فرآیند انتخاب متغیر غیراصلی که باید اصلی شود.
(ستون غیراصلی)
- فرآیند انتخاب متغیر اصلی که باید غیراصلی شود.
(سطر لولا)
- محل تلاقی سطر و ستون لولا را عنصر لولا می‌گویند.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

22/43

مثال ۴.۶ : شکل کانونی مثال زیر را در جدول بنویسید.

$$\begin{cases} \max z = 2x_1 + x_2 \\ 4x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \min f = -2x_1 - x_2 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 12 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + x_5 = 4 \\ x_i \geq 0; i = 1 \text{ to } 5 \end{cases}$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

23/43

جدول اول

اصلی	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	$b/a, a>0$
$4x_1 + 3x_2 + x_3 = 12$	4	3	1	0	0	12	3
$2x_1 + x_2 + x_4 = 4$	2	1	0	1	0	4	2
$x_1 + 2x_2 + x_5 = 4$	1	2	0	0	1	4	4
$f = -2x_1 - x_2$	-2	-1	0	0	0	$f-0$	

- منفی ترین ضریب هزینه (بدیهی است که در ستون های غیر اصلی) (ستون لولا)
- برای a های مثبت، کوچکترین b/a (ردیف لولا)
- عنصر لولا

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

24/43

گام‌های لولایی:

- بعد از انتخاب عنصر لولا، تمام سطر مربوطه را بر عنصر لولا تقسیم کرده و با افزودن ضربی از سطر لولای جدید به سطرهای دیگر، تمام عناصر ستون لولا بجز عنصر لولا را صفر می‌کنیم.
- جدول دوم

اصلی	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	b/a
x_3	0	1	1	-2	0	4	
x_1	1	1/2	0	1/2	0	2	
x_5	0	3/2	0	-1/2	1	2	
هزینه	0	0	0	1	0	$f+4$	

25/43

جدول دوم	اصلی	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	$b/a, a>0$
	x_3	0	1	1	-2	0	4	
	x_1	1	1/2	0	1/2	0	2	
	x_5	0	3/2	0	-1/2	1	2	
	هزینه	0	0	0	1	0	$f+4$	

- در نهایت اگر تمام ضرایب هزینه مربوط به ستون‌های غیراصلی نامنفی بودند کار تمام شده است و جواب بهین: $f + 4 = 0 \Rightarrow f = -4$ or $z = +4$
 $x_3 = 4, x_1 = 2, x_5 = 2, x_2 = 0, x_4 = 0$
- هرگاه حداقل یک ضریب هزینه مربوط به متغیرهای غیراصلی صفر بود، احتمال دارد جواب بهین دیگری داشته باشیم. (جواب چندگانه)

26/43

مگ داوری و تنظیم: محمد حسین ابوالشیری

27/43

مگر دآء، ۛ، ۛ تنظیم: محمد حسن، ابوالبشر، ۛ

28/43

مثال ۴.۶ : گام‌های روش سیمپلکس

- تابع زیر را مشروط به قيود داده شده ماکزیمم نمایید.

$$\begin{cases} \max & z = 2x_1 + x_2 \\ & 4x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

29/43

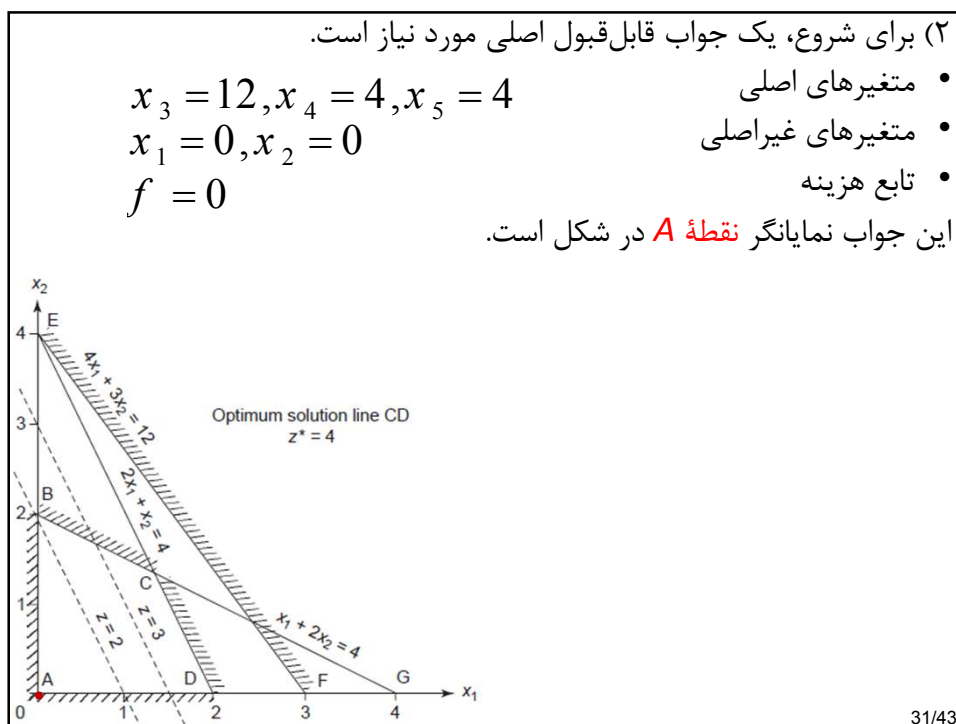
مراحل روش سیمپلکس:

(۱) مسئله را به شکل استاندارد LP می‌نویسیم.

$$\begin{cases} \max & z = 2x_1 + x_2 \\ & 4x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \min & f = -2x_1 - x_2 \\ & 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 12 \\ & 2x_1 + x_2 + x_4 = 4 \\ & x_1 + 2x_2 + x_5 = 4 \\ & x_i \geq 0; \quad i = 1 \text{ to } 5 \end{cases}$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

30/43



جدول اول: **نقطه A**

اصلی	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	$b/a, a>0$
x_3	4	3	1	0	0	12	3
x_4	2	1	0	1	0	4	2
x_5	1	2	0	0	1	4	4
هزینه	-2	-1	0	0	0	$f-0$	

عنصر لولا

سطر لولا

ستون لولا

32/43

جدول دوم:	b/a a>0	b	x ₅	x ₄	x ₃	x ₂	x ₁	اصلی
		4	0	-2	1	1	0	x ₃
		2	0	0.5	0	0.5	1	x ₁
		2	1	-0.5	0	1.5	0	x ₅
		f+4	0	1	0	0	0	هزینه

تمام ضرایب هزینه مربوط به $x_3 = 4, x_1 = 2, x_5 = 2$ به ستون‌های غیراصلی نامنفی‌اند و به جواب بهین رسیده‌ایم.

این جواب در شکل نقطه D است.

$f + 4 = 0 \Rightarrow f = -4$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری 33/43

• اگر سطر را درست انتخاب نکنیم (به عنوان مثال در جدول اول به جای سطر ۲ سطر ۳ انتخاب شود)، ممکن است به جواب قابل قبول دست نیابیم.

در این جدول داریم: $x_1 = 4, x_2 = 0$ (نقطه G که قابل قبول نیست)

اصلی	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	b	
x ₃	0	-5	1	0	-4	-4	x ₃ = -4
x ₄	0	-3	0	1	-2	-4	x ₄ = -4
x ₁	1	2	0	0	1	4	x ₁ = 4
هزینه	0	3	0	0	2	f+8	x ₂ =x ₅ =0

■ اگر ستون لولا را درست انتخاب نکنیم از مسیر دیگر به جواب بهین خواهیم رسید ولی مسیر طولانی‌تر می‌شود.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری 34/43

• قضیه 4.3 : بهبود جواب قابل قبول اصلی

اگر یک جواب قابل قبول اصلی مفید با تابع هزینه مربوطه f_0 داشته باشیم و فرض کنیم که برای بعضی از j ها $c'_j < 0$ است؛ آن گاه جواب قابل قبولی با $f < f_0$ وجود خواهد داشت. اگر ستون j ام نتواند با جایگزینی، یک جواب قابل قبول اصلی بدهد، آن گاه ناحیه قابل قبول **بیکران** بوده و تابع هزینه می تواند تا بینهایت کوچک شود.

• قضیه 4.4 : جواب بهین مسائل LP

اگر یک جواب قابل قبول اصلی برای همه j ها ضرایب هزینه کاهش یافته $c'_j \geq 0$ داشته باشد، آن گاه آن **جواب بهین** است.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

35/43

Solution by the Simplex Method

maximize $Z = 4x_1 + 5x_2$ subject to $-x_1 + x_2 \leq 4$, $x_1 + x_2 \leq 6$, $x_1, x_2 \geq 0$,

minimize $f = -4x_1 - 5x_2$

subject to $-x_1 + x_2 + x_3 = 4$

$x_1 + x_2 + x_4 = 6$

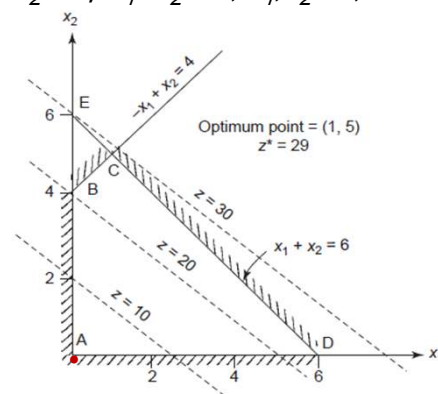
$x_i, i=1$ to 4

From the initial tableau, the basic feasible solution is:

basic variables: $x_3=4$, $x_4=6$

nonbasic variables: $x_1=x_2=0$ (Point A)

cost function: $f=0$ from the last row of the tableau



Initial tableau: x_3 is identified to be replaced with x_2 in the basic set.

Basic ↓	x_1	x_2	x_3	x_4	b	Ratio: b_i/a_{iq}
x_3	-1	1	1	0	4	$\frac{4}{1} = 4 \leftarrow$ smallest
x_4	1	1	0	1	6	$\frac{6}{1} = 6$
Cost	-4	-5	0	0	$f = 0$	

36/43

TABLE 6-10 Solution of Example 6.7 by the Simplex Method

Initial tableau: x_3 is identified to be replaced with x_2 in the basic set.

Basic↓	x_1	x_2	x_3	x_4	b	Ratio: b_i/a_{iq}
x_3	-1	1	1	0	4	$\frac{4}{1} = 4 \leftarrow$ smallest
x_4	1	1	0	1	6	$\frac{6}{1} = 6$
Cost	-4	-5	0	0	$f - 0$	

Second tableau: x_4 is identified to be replaced with x_1 in the basic set.

Basic↓	x_1	x_2	x_3	x_4	b	Ratio: b_i/a_{iq}
x_2	-1	1	1	0	4	Negative
x_4	2	0	-1	1	2	$\frac{2}{2} = 1$
Cost	-9	0	5	0	$f + 20$	

Third tableau: Reduced cost coefficients in nonbasic columns are nonnegative; the tableau gives optimum point.

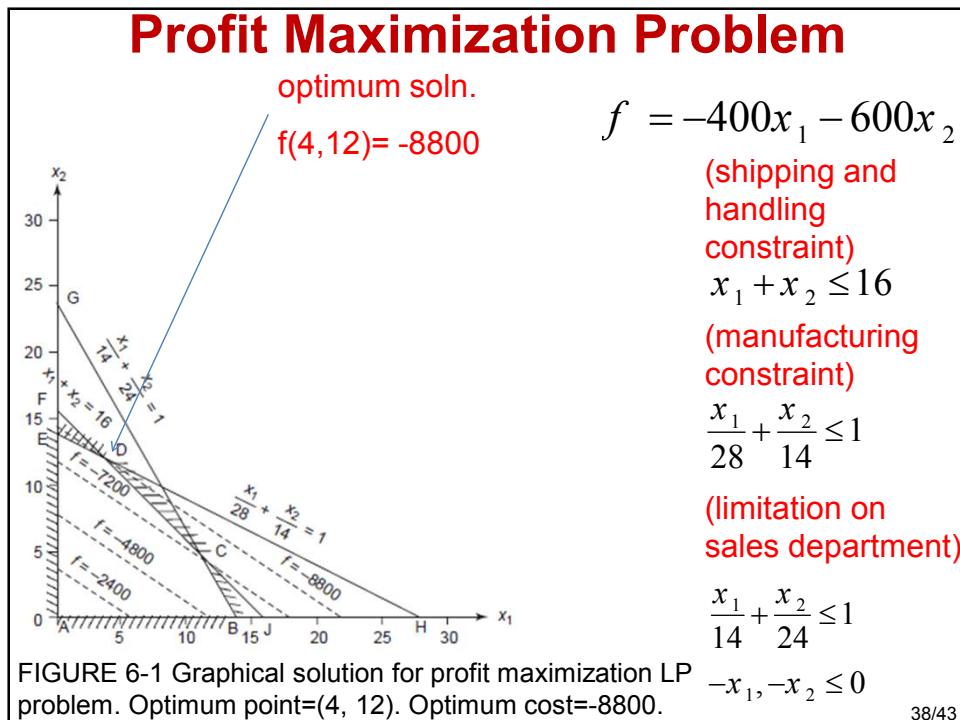
Basic↓	x_1	x_2	x_3	x_4	b	Ratio: b_i/a_{iq}
x_2	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	5	Not needed
x_1	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	Not needed
Cost	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{2}$	$f + 29$	

37/43

Point
A

Point
B

Point
C



$x_1 + x_2 + x_3 = 16$
 $\frac{1}{28}x_1 + \frac{1}{14}x_2 + x_4 = 1$
 $\frac{1}{14}x_1 + \frac{1}{28}x_2 + x_5 = 1$
 $f = -400x_1 - 600x_2$

TABLE 6-11 Solution of Example 6.8 by the Simplex Method

Initial tableau: x_4 is identified to be replaced with x_2 in the basic set.

Basic	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	Ratio: b_i/a_{iq}
x_3	1	1	1	0	0	16	$\frac{16}{1} = 16$
x_4	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{14}$	0	1	0	1	$\frac{1}{1/14} = 14 \leftarrow$ smallest
x_5	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{28}$	0	0	1	1	$\frac{1}{1/24} = 24$
Cost	-400	-600	0	0	0	$f - 0$	

Second tableau: x_3 is identified to be replaced with x_1 in the basic set.

Basic	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	Ratio: b_i/a_{iq}
x_3	$\frac{1}{2}$	0	1	-14	0	2	$\frac{2}{1/2} = 4 \leftarrow$ smallest
x_2	$\frac{1}{2}$	1	0	14	0	14	$\frac{14}{1/2} = 28$
x_5	$\frac{17}{336}$	0	0	$-\frac{7}{12}$	1	$\frac{5}{12}$	$\frac{5/12}{17/336} = \frac{140}{17}$
Cost	-100	0	0	8400	0	$f + 8400$	

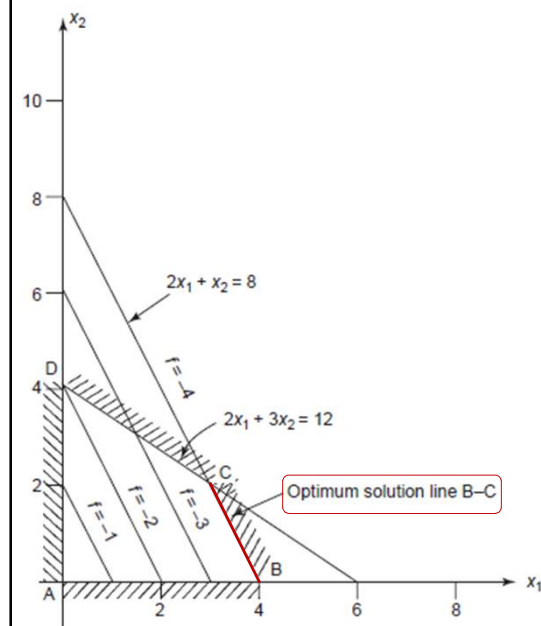
Third tableau: Reduced cost coefficients in the nonbasic columns are nonnegative; the tableau gives optimum solution

Basic	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	Ratio: b_i/a_{iq}
x_1	1	0	2	-28	0	4	Not needed
x_2	0	1	-1	28	0	12	Not needed
x_5	0	0	$-\frac{17}{168}$	$\frac{5}{6}$	1	$\frac{3}{14}$	Not needed
Cost	0	0	200	5600	0	$f + 8800$	

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

39/43

LP Problem with Multiple Solutions



$$\begin{aligned} \min f &= -x_1 - 0.5x_2 \\ 2x_1 + 3x_2 &\leq 12 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 8 \\ -x_1 &\leq 0, -x_2 \leq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 12 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 &= 8 \\ x_i &\geq 0; \quad i = 1 \text{ to } 4 \end{aligned}$$

40/43

TABLE 6-12 Solution by the Simplex Method for Example 6.9

Initial tableau: x_4 is identified to be replaced with x_1 in the basic set.

Basic↓	x_1	x_2	x_3	x_4	b	Ratio: b_i/a_{iq}
x_3	2	3	1	0	12	$\frac{12}{2} = 6$
x_4	2	1	0	1	8	$\frac{8}{2} = 4 \leftarrow$ smallest
Cost	-1	-0.5	0	0	$f - 0$	

Second tableau: First optimum point; reduced cost coefficients in nonbasic columns are nonnegative; the tableau gives optimum solution. $c'_2 = 0$ indicates the possibility of multiple solutions. x_3 is identified to be replaced with x_2 in the basic set to obtain another optimum point.

Basic↓	x_1	x_2	x_3	x_4	b	Ratio: b_i/a_{iq}
x_3	0	2	1	-1	4	$\frac{4}{2} = 2 \leftarrow$ smallest
x_1	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	4	$\frac{4}{1/2} = 8$
Cost	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$f + 4$	Point B

Third tableau: Second optimum point.

Basic↓	x_1	x_2	x_3	x_4	b	Ratio: b_i/a_{iq}
x_2	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	2	Not needed
x_1	1	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	3	Not needed
Cost	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$f + 4$	Point C

In general, if a reduced cost coefficient corresponding to a nonbasic variable is zero in the final tableau, there is a possibility of multiple optimum solutions.

Note that all optimum design points are global solutions as opposed to local solutions.

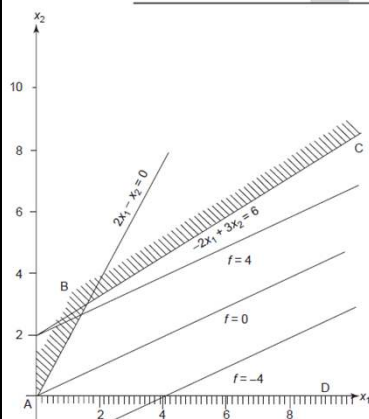
41/43

Example of an Unbounded Solution

maximize $Z = x_1 - 2x_2$ subject to $2x_1 - x_2 \geq 0$, $-2x_1 + 3x_2 \leq 6$, $x_1, x_2 \geq 0$

TABLE 6-13 Initial Canonical form for Example 6.10 (Unbounded Problem)

Basic↓	x_1	x_2	x_3	x_4	b
x_3	-2	1	1	0	0
x_4	-2	3	0	1	6
Cost	-1	2	0	0	$f - 0$



For unbounded problems, there will be negative reduced cost coefficients for nonbasic variables but no possibility of pivot steps.

42/43

مسائل زیر را حل کرده و تا دو هفته دیگر تحویل فرمایید:

4) 34,37

تمرین‌های قبلی: 4) 1,2,3, 9, 16, 20, 21, 26