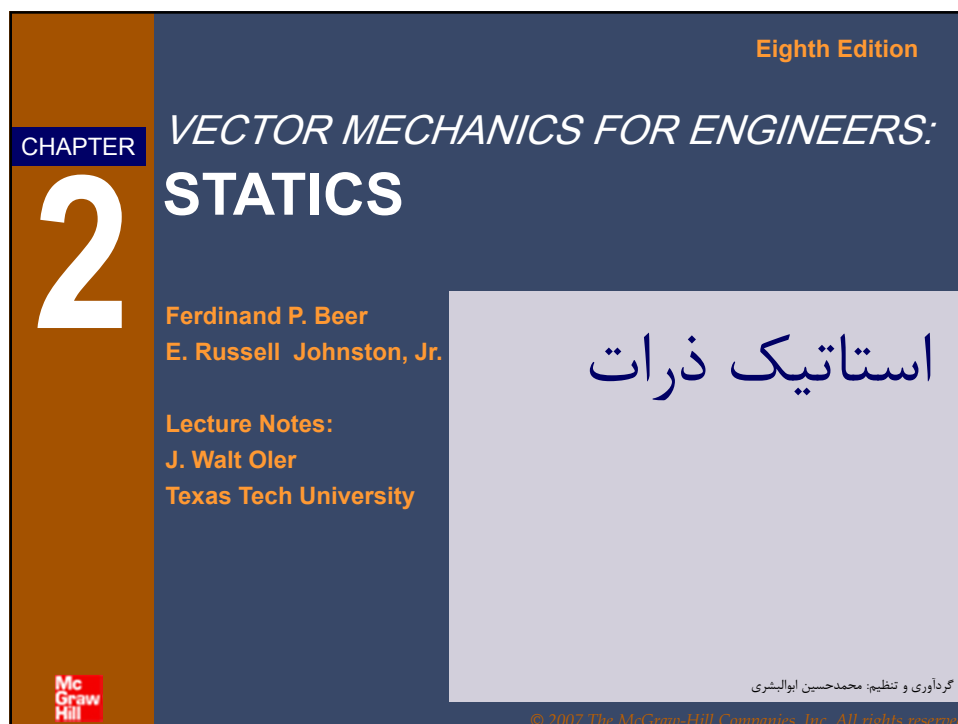




Vector Mechanics for Engineers: Statics

مقدمه

- هدف این فصل بحث در باره اثر نیروها روی ذرات است:
- جایگزینی چند نیروی مؤثر بر یک ذره با یک نیروی معادل یا برآیند
- ارتباط بین نیروهایی که بر یک ذره در حال تعادل اثر می کنند

تمرکز بر روی **ذرات** به معنی در نظر گرفتن اجسام خیلی کوچک نیست. بلکه بحث در این مرحله محدود به تحلیل هایی است که در آن اندازه و شکل اجسام قابل توجه نیست به گونه ای که می توان فرض کرد همه نیروها در یک نقطه اثر می کنند.

۲/۲۵

© 2007 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

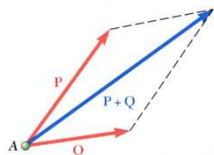
اسکالرها و بردارها

اسکالر: پارامترهایی که مقدار دارند ولی جهت ندارند یا پارامترهایی که تنها با یک عدد مثبت یا منفی کاملاً مشخص می‌شوند.

مثال: جرم، حجم، درجه حرارت و طول

بردار: کمیتی است که با مقدار (یا اندازه) و جهت مشخص می‌شود و بر اساس قانون متوازی‌الاضلاع جمع بسته می‌شود.

(تجربه نشان داده که اثر دو نیرو را می‌توان با برآیند آن‌دو که قطر متوازی‌الاضلاعی است که آن‌دو نیرو اضلاع مجاور آن است جایگزین شود.)

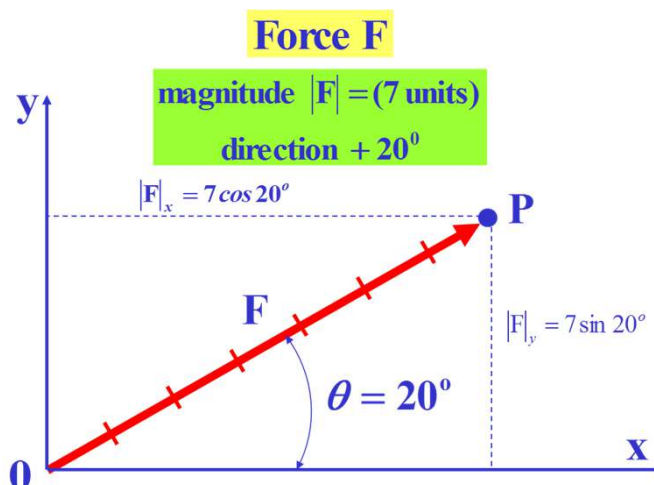


مثال: نیرو (به عنوان مثال وزن)، تغییر مکان،

سرعت و شتاب

۳/۲۵

نمایش بردار



Vector Mechanics for Engineers: Statics

بردارها

- بردار منفی یک بردار مقداری برابر با آن داشته ولی جهت آن مخالف بردار اصلی است.
- بردارهای مساوی مقدار و جهت یکسانی دارند.
- تقسیم‌بندی بردارها از نظر تأثیر بر تحلیل:

- بردارهای ثابت محل اثر مشخصی دارند که تغییر محل اثر آن تحلیل را متأثر می‌کند. (در استاتیک کاربردی ندارد)

مقدار	جهت	راستا	محل اثر

- بردارهای لغزنده می‌توانند در راستای خود بلغزند و نقطه اثر مشخصی ندارند. مشخص نبودن نقطه اثر آن‌ها اثری بر تحلیل ندارد. مانند اثر یک نیرو بر جسم صلب (بیشترین کاربرد را در استاتیک دارد)

مقدار	جهت	راستا

- بردارهای آزاد می‌توانند آزادانه در فضا جابجا شوند بدون آنکه بر تحلیل تأثیری داشته باشد. گشتاور کوپل یک بردار آزاد است. (در استاتیک کاربردی کمی دارد)

مقدار	جهت	راستاهای موازی

۵/۲۵

© 2007 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

عملیات بردارها - جمع بردارها

- برای جمع بردارها دو راه وجود دارد:
- جمع متوازی‌الاضلاع (برای بردارهای آزاد یا لغزنده غیر متناظر)
- جمع به شکل اتصال سر یک بردار به انتهای بردار دیگر: در این روش ترتیب جمع آن‌ها مهم نیست. (فقط برای بردارهای آزاد)

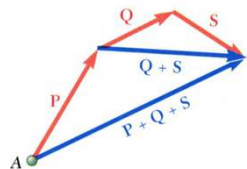
$R = A + B$

$R = B + A$

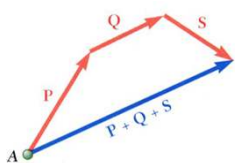
۶/۲۵

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

عملیات بردارها - جمع بردارها (ادامه)



- جمع ۳ بردار و بیشتر با تکرار کاربرد قانون مثلث انجام می‌شود.



- قانون چندضلعی برای جمع ۳ بردار و بیشتر

- جمع بردارها شرکت‌پذیر (associative) است.

$$\vec{P} + \vec{Q} + \vec{S} = (\vec{P} + \vec{Q}) + \vec{S} = \vec{P} + (\vec{Q} + \vec{S})$$

MF16

- جمع بردارها جابجایی‌پذیر (commutative) است.

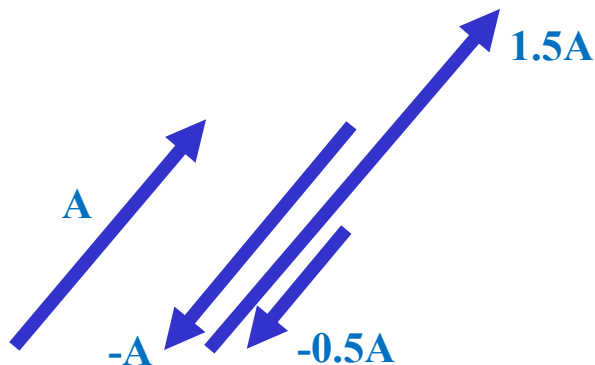
$$\vec{P} + \vec{Q} = \vec{Q} + \vec{P}$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

۷/۲۵

عملیات بردارها ضرب یا تقسیم بردارها با یک عدد اسکالر

- ضرب یک بردار در یک عدد اسکالر مقدار آن را تغییر می‌دهد و جهت بردار حاصل بستگی به مثبت یا منفی بودن آن عدد دارد.



گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

۸/۲۵

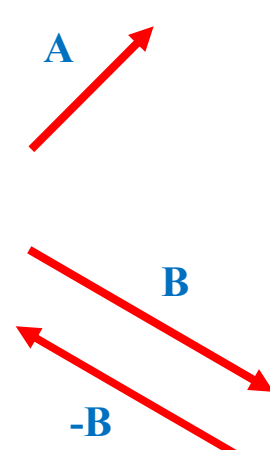
Slide 7

MF16 Associative: شرکت پذیری
commutative: جایجائی پذیر
My Friend ۱۵/۰۶/۲۰۱۰ ؛

عملیات بردارها

تفریق بردارها

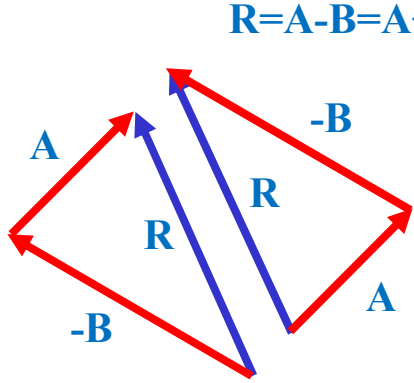
- معادل است با ضرب برداری که می‌خواهد کسر گردد در -1 و جمع با بردار دیگر.



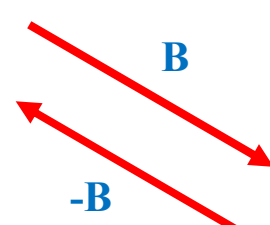
A

B

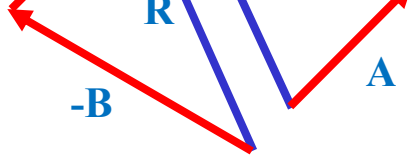
$-B$



$R = A - B = A + (-B)$



$R = A - B = (-B) + A$



$R = A - B = (-B) + A$

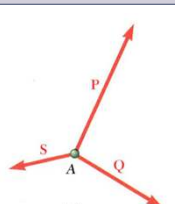
۹/۲۵

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

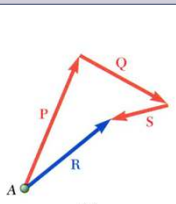
Vector Mechanics for Engineers: Statics

برآیند چند نیروی متقاطع (هم‌صفحه)

- نیروهای متقاطع: مجموعه نیروهایی که از یک نقطه می‌گذرد.



(a)



(b)

مجموعه‌ای از نیروهای متقاطع که بر یک ذره اثر می‌کنند را می‌توان با یک نیروی برآیند که جمع برداری آنهاست جایگزین کرد.

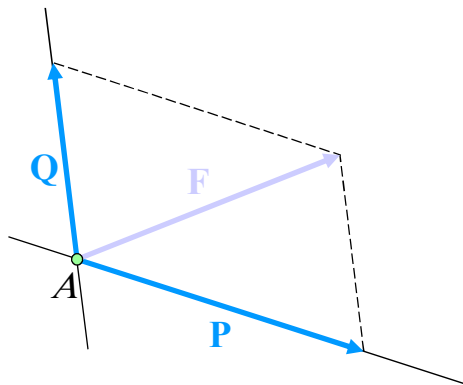
۱۰/۲۵

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2007 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

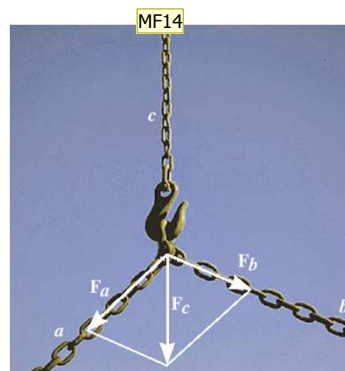
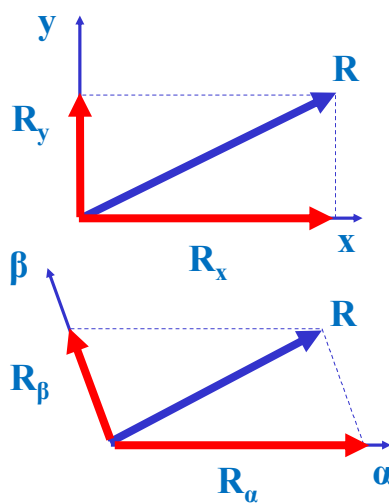
عملیات بردارها - تجزیه یک بردار

هر بردار نیرو که به یک ذره تأثیر می‌کند را می‌توان به دو یا چند مؤلفه تجزیه کرد. یعنی می‌توان آن را با دو یا چند مؤلفه که همان اثر را بر ذره دارند جایگزین کرد.



نیروی F را می‌توان $MF12$ با ترسیم متوازی‌الاضلاع که F قطر آن است به دو مؤلفه P و Q تجزیه کرد. مؤلفه‌های P و Q دو ضلع مجاور متوازی‌الاضلاع هستند و مقدار آن‌ها از ترسیم و یا هندسه به دست می‌آید.

عملیات بردارها - تجزیه یک بردار (ادامه)



Slide 11

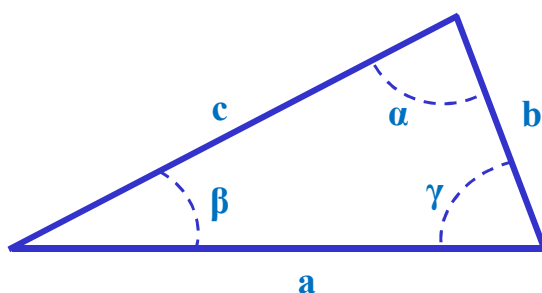
MF12 resolution: تجزيه
My Friend ١٥/٠٢/٢٠١٠ ؛

Slide 12

MF14 resolution: تجزيه
My Friend ١٥/٠٢/٢٠١٠ ؛

عملیات بردارها - قانون سینوس ها

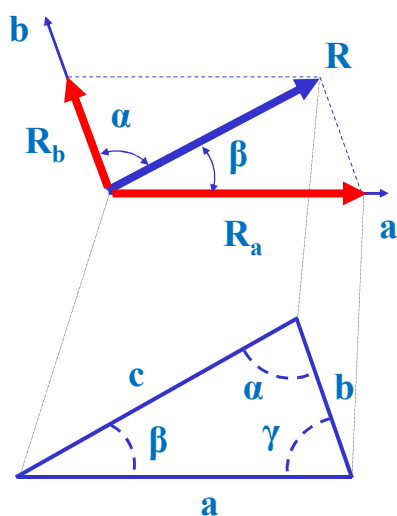
$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$$



گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

۱۳/۲۵

عملیات بردارها - قانون سینوس ها



$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$$

Given : R, α, β

Find : R_a, R_b

Solution :

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \quad \text{or} \quad \gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$$

$$\text{Then} \quad \frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \gamma}{c}$$

$$a = \frac{c \sin \alpha}{\sin \gamma}$$

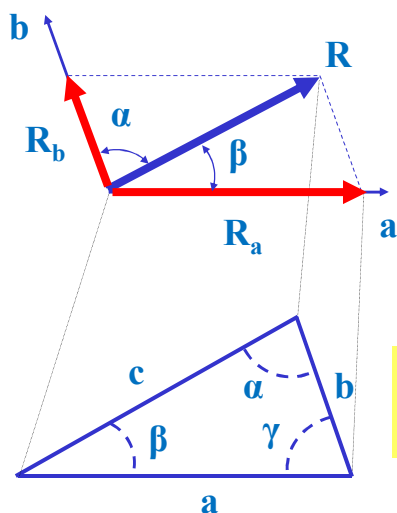
$$\frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$$

$$b = \frac{c \sin \beta}{\sin \gamma}$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

۱۴/۲۵

عملیات بردارها - قانون کسینوسها



$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma}$$

Given : R_a, R_b, γ

Find : R

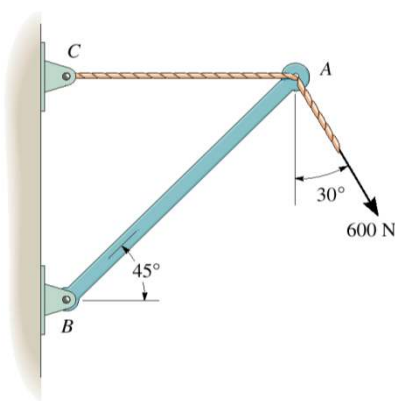
Solution :

Then

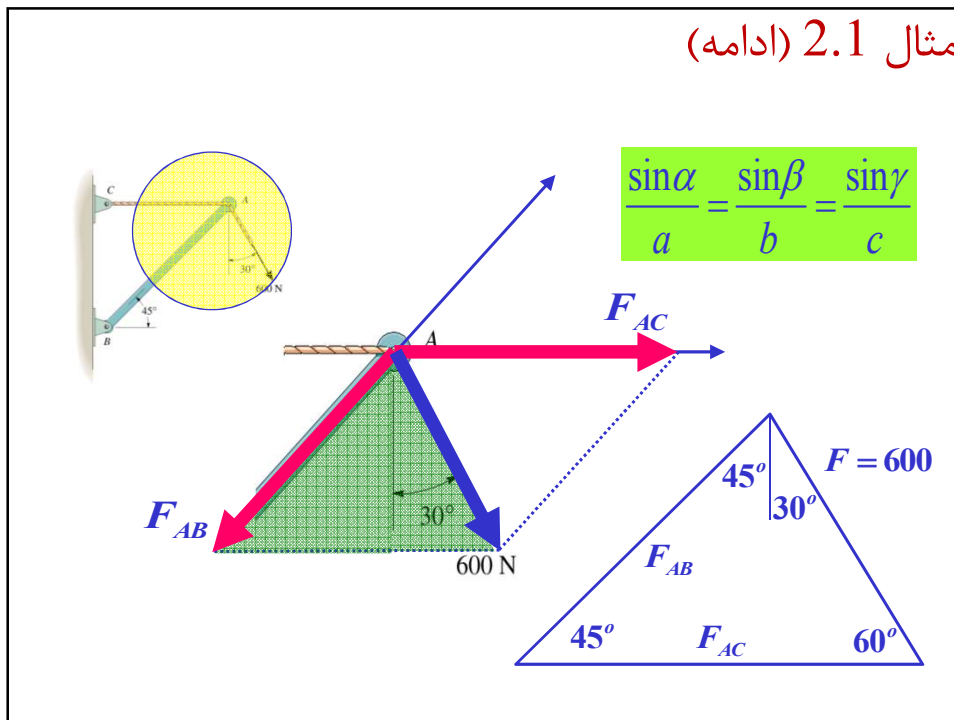
$$R = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma}$$

مثال 2.1

مقدار دو مؤلفه نیروی ۶۰۰ نیوتن را که در راستاهای AC و AB قرار دارند به دست آورید.



مثال 2.1 (ادامه)



مثال 2.1 (ادامه)

Given: $\theta = 30^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $F = 600 \text{ N}$

Find: F_{AB} , F_{AC}

حل:
با استفاده قانون سینوس ها

$$\frac{F_{AB}}{\sin 60^\circ} = \frac{F}{\sin 45^\circ} \text{ or } F_{AB} = \frac{\sin 60^\circ}{\sin 45^\circ} F = \frac{\sin 60^\circ}{\sin 45^\circ} 600 \text{ N}$$

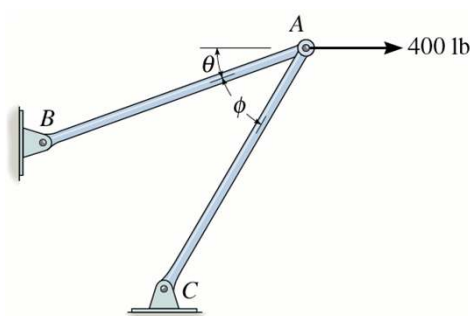
$$F_{AB} = 735 \text{ N}$$

$$\frac{F_{AC}}{\sin 75^\circ} = \frac{F}{\sin 45^\circ} \text{ or } F_{AC} = \frac{\sin 75^\circ}{\sin 45^\circ} F = \frac{\sin 75^\circ}{\sin 45^\circ} 600 \text{ N}$$

$$F_{AC} = 820 \text{ N}$$

مثال 2.2

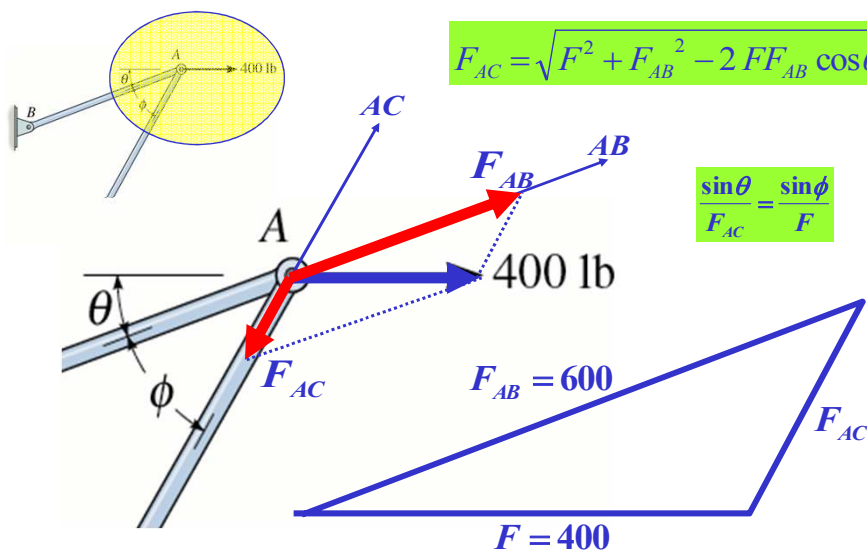
زاویه طراحی ($0^\circ \leq \phi \leq 90^\circ$) بین دو عضو AB و AC را چنان بیابید که نیروی افقی 400 lb مؤلفه‌ای به اندازه 600 lb به طرف بالا و راست در راستای B به A داشته باشد. همچنین نیروی در راستای AC را بیابید. فرض کنید $\theta = 30^\circ$.



گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

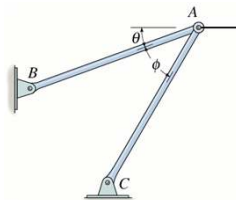
۱۹/۲۵

مثال 2.2 (ادامه)



۲۰/۲۵

مثال 2.2 (ادامه)



Given: $F = 400 \text{ lb}$, $F_{AB} = 600 \text{ lb}$, $\theta = 30^\circ$

Find: F_{AC} , ϕ

حل:

با استفاده از قانون کسینوسها

$$F_{AC} = \sqrt{F^2 + F_{AB}^2 - 2(F)(F_{AB})\cos(\theta)}$$

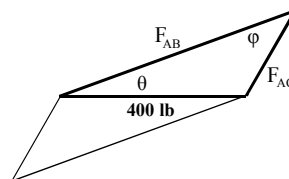
$$F_{AC} = \sqrt{(400)^2 + (600)^2 - 2(400)(600)\cos(30^\circ)}$$

$$F_{AC} = 323 \text{ lb}$$

با استفاده از قانون سینوسها

$$\frac{F_{AC}}{\sin(\theta)} = \frac{F}{\sin(\phi)} \quad \text{or} \quad \sin(\phi) = \frac{F}{F_{AC}} \sin(\theta) = \frac{400}{323} \sin(30^\circ)$$

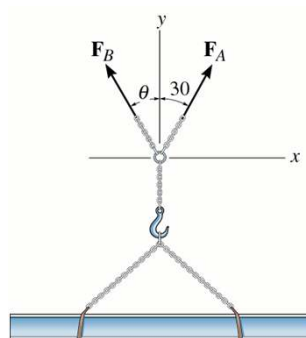
$$\phi = 38.3^\circ$$



۲۱/۲۵

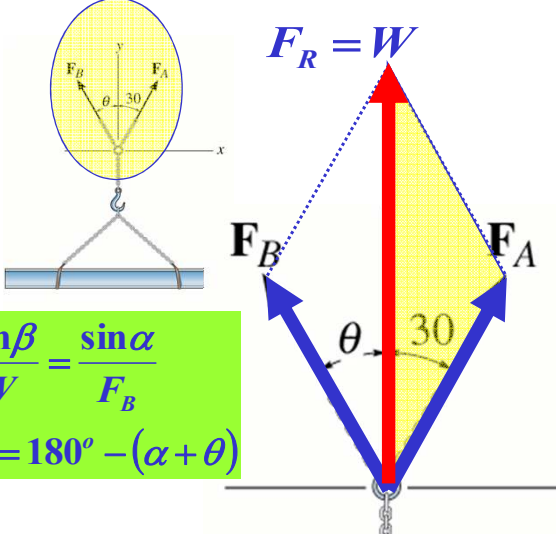
مثال 2.3

تیری به وسیله دو زنجیر بلند شده است. اگر وزن تیر 600 N در راستای محور y باشد، مقدار نیروهای F_A و F_B را که بر هر یک از زنجیرها اثر می کنند و همچنین زاویه θ نیروی F_B را چنان بیابید که مقدار F_B مینیمم باشد. F_A در زاویه 30° از محور y است همچنانکه در شکل نمایش داده شده است.



۲۲/۲۵

مثال 2.3 (ادامه)



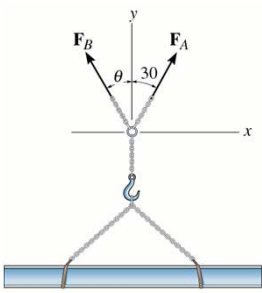
$F_R = W$

$\frac{\sin \beta}{W} = \frac{\sin \alpha}{F_B}$

$\beta = 180^\circ - (\alpha + \theta)$

$\alpha = 30^\circ$

۲۳/۲۵



Given: $W = 600 \text{ N}, \alpha = 30^\circ$
Find: F_A, F_B, θ

از هندسه داریم:

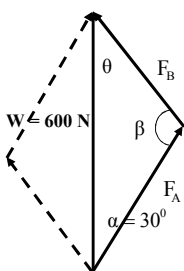
یا

با استفاده از قانون سینوس‌ها

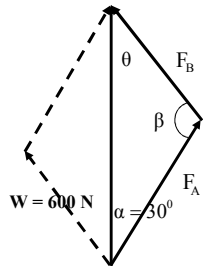
$\alpha + \beta + \theta = 180^\circ$
 $\beta = 180^\circ - (\alpha + \theta)$

$\frac{F_B}{\sin \alpha} = \frac{W}{\sin \beta}$ or $F_B = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} W$

برای به دست آوردن مینیمم مشتق گرفته و برابر صفر قرار می‌دهیم:



۲۴/۲۵



$$\frac{d}{d\theta}[F_B] = \frac{d}{d\theta} \left[\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} W \right] = \frac{d}{d\theta} \left[\frac{\sin\alpha}{\sin\{180^\circ - (\alpha + \theta)\}} W \right] = 0$$

$$\frac{d}{d\theta}[F_B] = W \sin\alpha \frac{d}{d\theta} [\sin^{-1}(\alpha + \theta)] = 0$$

$$(-1) \sin^{-2}(\alpha + \theta) \cos(\alpha + \theta) \frac{d\theta}{d\theta} = 0$$

$$\frac{\cos(\alpha + \theta)}{\sin^2(\alpha + \theta)} = 0$$

$$\cos(\alpha + \theta) = 0 \text{ implies that } \alpha + \theta = 90^\circ \text{ and}$$

$$\theta = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$$

$$F_B = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} W = \frac{\sin 30^\circ}{\sin 90^\circ} W = .5(600 \text{ N})$$

$$F_B = 300 \text{ N}$$

$$F_A = \frac{\sin\theta}{\sin\beta} W = \frac{\sin 60^\circ}{\sin 90^\circ} W = .667(600 \text{ N})$$

$$F_B = 400.2 \text{ N}$$