

فصل ۱۱ - کار مجازی

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مقدمه

- **اصل کار مجازی** - اگر ذره‌ای، جسم صلبی و یا سیستمی از اجسام صلب که تحت تأثیر چند نیرو در حال **تعادل** است را **تغییر مکان مجازی کوچکی** بدهیم، کار خالص نیروهای خارجی هنگام آن تغییر مکان **صفر** است.
- **اصل کار مجازی** به ویژه برای مسائل تعادل ماشین‌ها یا مکانیزم‌ها که از چندین عضو تشکیل شده‌اند مفید است. اگر یک سیستم از چندین **جسم صلب متصل به هم** تشکیل شده باشد و **حین تغییر مکان مجازی متصل بماند**، تنها باید کار نیروهای خارجی را در نظر گرفت.
- اگر ذره‌ای، جسم صلبی و یا سیستمی از اجسام صلب در حال **تعادل** باشند، مشتق **انرژی پتانسیل** نسبت به متغیری که موقعیت آن را تعیین می‌کند **صفر** است.
- **پایداری** یک موقعیت **تعادل** را می‌توان از مشتق دوم انرژی پتانسیل نسبت به متغیر موقعیت تعیین کرد.

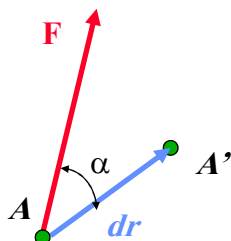
گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2003 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

10 - 2

روش کار مجاری

کار نیروی F در یک تغییر مکان کوچک dr به شکل زیر تعریف می‌شود.



$$dU = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

این ضرب اسکالر را می‌توان به شکل زیر نوشت.

$$dU = F ds \cos \alpha$$

که ds مقدار (بردار) تغییر مکان است. اگر $\alpha < 90^\circ$ باشد، کار dU مثبت خواهد بود. اگر $\alpha = 90^\circ$ باشد، کار صفر و اگر $\alpha > 90^\circ$ باشد کار منفی است.

کار کوپل یک ممان M که بر روی یک جسم صلب اثر می‌کند برابر است با: که $d\theta$ زاویه کوچکی است بر حسب رادیان که جسم چرخیده. $dU = M d\theta$

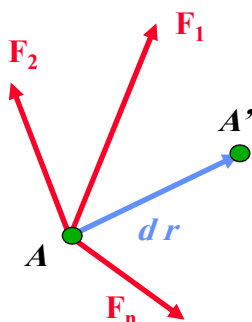
نکته: ۱- کار، U یک کمیت اسکالر است و می‌تواند مثبت و منفی یا صفر باشد.

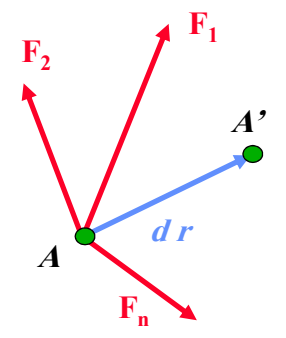
۲- ممان یک نیرو، $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ یک کمیت برداری است.

۱۰ - ۳

ذره‌ای را که در نقطه A قرار دارد را در نظر بگیرید که تحت تأثیر نیروهای مختلف $F_1, F_2, \dots, F_n$ قرار دارد. فرض می‌کنیم ذره حرکت کرده و به نقطه جدید A' می‌رسد.

از آنجا که چنین تغییر مکانی به طور واقعی صورت نپذیرفته به آن **تغییر مکان مجازی** می‌گویند و به صورت $\delta \mathbf{r}$ نمایش می‌دهند.





کار انجام شده توسط نیروها را **کار مجازی** می‌گویند و با δU نشان می‌دهند و به شکل زیر نوشته می‌شود.

$$\begin{aligned}\delta U &= \vec{F}_1 \cdot \delta \vec{r} + \vec{F}_2 \cdot \delta \vec{r} + \dots + \vec{F}_n \cdot \delta \vec{r} \\ &= (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n) \cdot \delta \vec{r} \\ &= \vec{R} \cdot \delta \vec{r}\end{aligned}$$

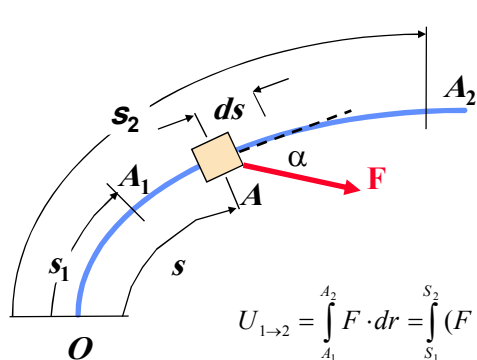
اصل **کار مجازی** می‌گوید: اگر ذره‌ای در حال تعادل باشد، **کار مجازی** کلی δU نیروهایی که به آن اثر می‌کند برای هر تغییر مکان مجازی ذره صفر است.

اصل **کار مجازی** را می‌توان برای اجسام صلب و سیستم اجسام صلب تعمیم داد.

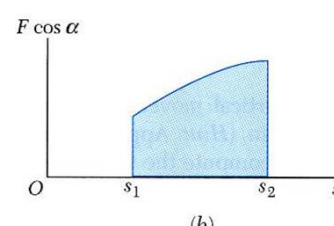
10 - °

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

کار یک نیرو برای یک تغییر مکان محدود



کار یک نیرو برای یک تغییر مکان محدود از محل اثرش را به شکل $U_{1 \rightarrow 2}$ نشان می‌دهند.

$$U_{1 \rightarrow 2} = \int_{A_1}^{A_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{s_1}^{s_2} (F \cos \alpha) ds$$


(b)

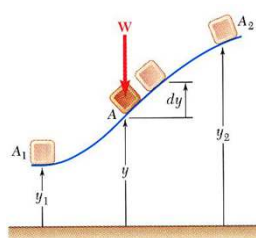
به طور مشابه، کار یک کوپل ممان M برای چرخش جسم صلب از θ_1 به θ_2 عبارت است از:

$$U_{1 \rightarrow 2} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta = M (\theta_2 - \theta_1)$$

اگر جهت چرخش θ و M یکی باشد U مثبت است.

10 - °

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری



کار نیروی وزن W یک جسم وقتی مرکز ثقل آن از y_1 به y_2 تغییر مکان بیابد عبارت است از:

$$dU = -Wdy$$

$$\begin{aligned} U_{1 \rightarrow 2} &= - \int_{y_1}^{y_2} W dy \\ &= Wy_1 - Wy_2 \\ &= -W\Delta y \end{aligned}$$

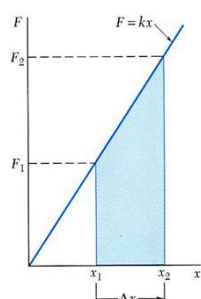
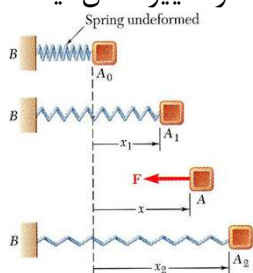
اگر طراز (فاصله از زمین) افزایش یابد کار **مثبت** و اگر کاهش یابد کار **منفی** خواهد بود.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

10 - ۷

کار یک فنر

فنر تغییر شکل نیافته:



$$U_{1 \rightarrow 2} = -\frac{1}{2}(F_1 + F_2)\Delta x \quad \text{سطح دوزنقه}$$

کار نیروی F که از یک فنر به جسم A اثر می کند باعث کشیده شدن آن از $(x=x_1)A_1$ به $(x=x_2)A_2$ می شود و از $F=kx$ به دست می آید.

$$dU = -Fdx = -(kx)dx$$

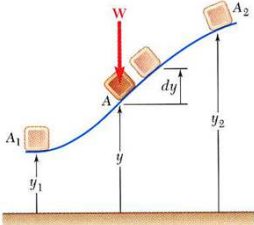
$$\begin{aligned} U_{1 \rightarrow 2} &= - \int_{x_1}^{x_2} kx dx \\ &= \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2 \end{aligned}$$

وقتی فنر به حالت اولیه برمی گردد کار **مثبت** است.

10 - ۸

Vector Mechanics for Engineers: Statics

انرژی پتانسیل

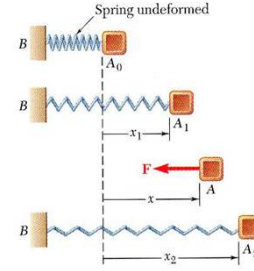


• وقتی که کار نیروی وزن W از مسیری که بین نقطه A_1 و A_2 طی می‌شود مستقل است، نیرو را (conservative) محافظه کار (پایستار) می‌گویند. کار به شکل زیر بیان می‌شود:

$$U_{1 \rightarrow 2} = Wy_1 - Wy_2 = v_1 - v_2$$

که V انرژی پتانسیل مربوط به W و V_1 و V_2 نشانگر مقدار V در A_1 و A_2 است. انرژی پتانسیل مربوط به نیروی ثقل W عبارت است از:

$$U_{1 \rightarrow 2} = (V_g)_1 - (V_g)_2$$



کار فنر:

$$U_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{2} kx_1^2 - \frac{1}{2} kx_2^2 = (V_e)_1 - (V_e)_2$$

انرژی پتانسیل جسم نسبت به نیروی الاستیک $\vec{F}$

$$V_e = \frac{1}{2} KX^2 =$$

© 2003 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 10 - 9

هنگامی که موقعیت یک سیستم مکانیک به یک متغیر مستقل θ وابسته است، انرژی پتانسیل تابعی از $V(\theta)$ آن متغیر است. داریم:

$$\delta U = -\delta V = -(dV/d\theta) \delta\theta.$$

یک سیستم باید برقرار باشد می‌تواند با شرط زیر نیز بیان شود.

$$\frac{dV}{d\theta} = 0$$

مشتق دوم V اطلاعات مفیدی در ارتباط با سیستم به ما می‌دهد:

V **مینیمم** است و شرایط تعادل **پایدار** است.

V **ماکزیمم** است و شرایط تعادل **ناپایدار** است.

مشتقات مرتبه بالاتر را باید بررسی کرد.

$$d^2 V/d\theta^2 > 0$$

$$d^2 V/d\theta^2 < 0$$

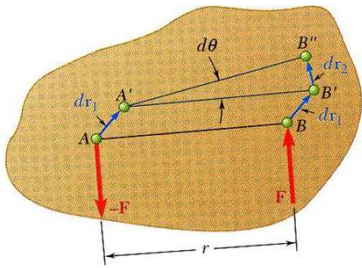
$$d^2 V/d\theta^2 = 0$$

Vector Mechanics for Engineers: Statics

کار یک کوپل

تغییر مکان کوچک یک جسم صلب:

- انتقال به $A'B'$
- چرخش B' حول A' به B''



$$\begin{aligned}
 W &= -\vec{F} \cdot d\vec{r}_1 + \vec{F} \cdot (d\vec{r}_1 + d\vec{r}_2) \\
 &= \vec{F} \cdot d\vec{r}_2 = F ds_2 = F r d\theta \\
 &= M d\theta
 \end{aligned}$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

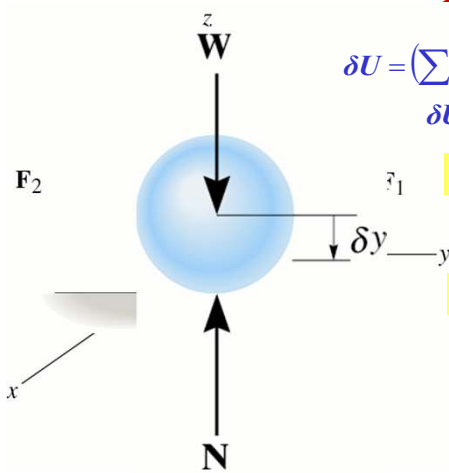
© 2003 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

10 - 11

Virtual Work

اصل کار مجازی

ذره



$$\begin{aligned}
 \delta U &= \sum \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{r} \\
 \delta U &= (\sum F_x \mathbf{i} + \sum F_y \mathbf{j} + \sum F_z \mathbf{k}) \cdot (\delta x \mathbf{i} + \delta y \mathbf{j} + \delta z \mathbf{k}) \\
 \delta U &= \sum F_x \delta x + \sum F_y \delta y + \sum F_z \delta z
 \end{aligned}$$

برای تعادل $\sum F_x = 0, \sum F_y = 0, \sum F_z = 0$

$\delta U = 0$

برای توپی که روی یک سطح قرار گرفته:

$$\begin{aligned}
 \delta U &= W \delta y - N \delta y \\
 \delta U &= (W - N) \delta y = 0 \\
 W &= N
 \end{aligned}$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

10 - ۱۲

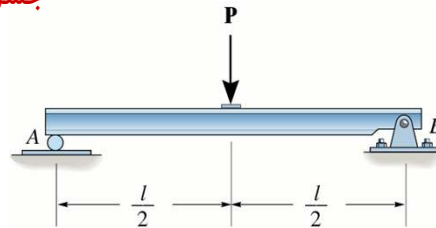
Virtual Work

اصل کار مجازی

جسم صلب

برای تعادل یک جسم صلب داریم: $\delta U = 0$

(این معادله باید برای انتقال در جهت x و y و چرخش مجازی حول هر نقطه‌ای نوشته و حل شود.)



y - direction

$$\delta U = P\delta y - B_y\delta y - A_y\delta y = 0$$

$$P\delta y - B_y\delta y - A_y\delta y = 0$$

$$(P - B_y - A_y)\delta y = 0$$

$$P - B_y - A_y = 0$$

این همان معادله $\sum F_y = 0$ است.

x - direction

$$\delta U = -B_x\delta x = 0$$

$$B_x = 0$$

این همان معادله $\sum F_x = 0$ است.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

10 - ۱۳

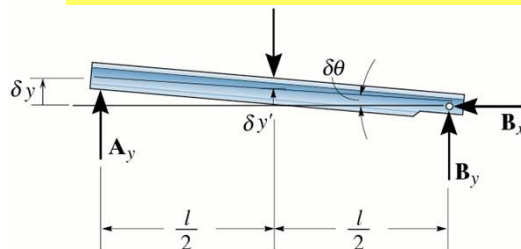
Virtual Work

اصل کار مجازی

جسم صلب

برای تعادل یک جسم صلب داریم: $\delta U = 0$

(این معادله باید برای انتقال در جهت x و y و چرخش مجازی حول هر نقطه‌ای نوشته و حل شود.)



$$\delta y = l\delta\theta$$

$$\delta y' = \frac{l}{2}\delta\theta$$

$$\delta U = A_y(l\delta\theta) - P\left(\frac{l}{2}\right)\delta\theta$$

$$\delta U = \left(A_y - \frac{P}{2}\right)l\delta\theta = 0$$

$$A_y = \frac{P}{2}$$

این همان معادله $\sum M_B = 0$ است.

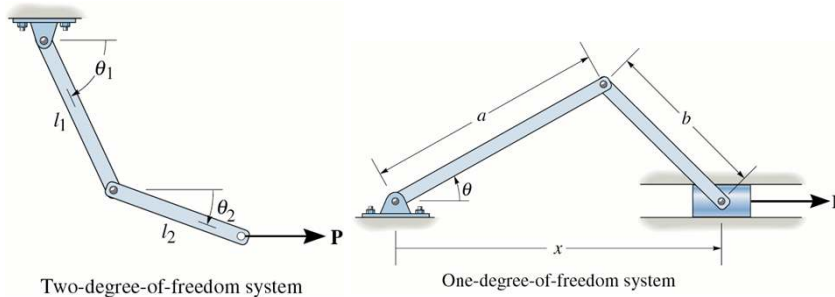
گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

10 - ۱۴

Virtual Work

کار مجازی برای سیستم‌هایی که از اتصال چند جسم بوجود آمده‌اند
درجات آزادی

اصل کار مجازی برای سیستم‌های چند درجه آزادی مفید است.



درجات آزادی به تعداد مختصات مستقلی که برای تعریف موقعیت همه اعضای یک سیستم اجسام صلب نیاز است گویند.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

10 - ۱۰

Virtual Work

کار مجازی برای سیستمی که از اتصال چند جسم صلب تشکیل شده است
اصل کار مجازی



سیستمی که از اتصال چند جسم صلب تشکیل شده در صورتی در حال تعادل است که کار مجازی کلیه نیروها و ممان‌های خارجی مؤثر بر سیستم برای هر تغییر مکان مجازی مستقل صفر باشد.

$$\delta U = 0$$

n معادله مستقل، یک معادله برای هر درجه آزادی سیستم وقتی که بقیه $n-1$ درجات آزادی سیستم ثابت در نظر گرفته شده‌اند.

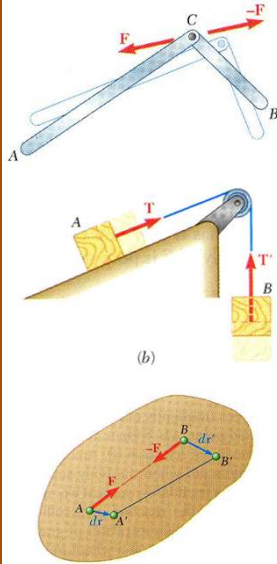
گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

10 - ۱۱

Vector Mechanics for Engineers: Statics

کار نیروها

نیروهایی که کار انجام نمی‌دهند:



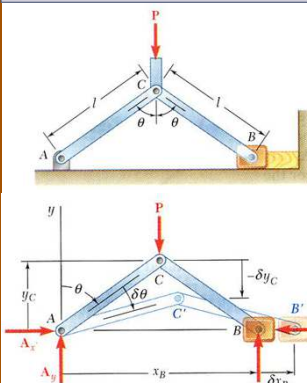
- عکس‌العمل در یک مفصل بدون اصطکاک وقتی جسم حول آن می‌چرخد.
- عکس‌العمل یک سطح بدون اصطکاک وقتی جسمی روی آن حرکت می‌کند.
- وزن یک جسم که مرکز ثقل آن حرکت افقی دارد.
- نیروی اصطکاک برای چرخشی که بدون لغزش حرکت می‌کند.
- مجموع کاری که چندین نیرو انجام می‌دهند و صفر است:
- اجسامی که به یک مفصل بدون اصطکاک متصل شده‌اند.
- اجسامی که با یک طناب بدون کشیدگی به هم متصل شده‌اند.
- نیروهای داخلی که اجزای یک جسم صلب را به هم متصل نگه می‌دارد.

© 2003 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

10 - 17

Vector Mechanics for Engineers: Statics

کاربردهای اصل کار مجازی



- می‌خواهیم در گیره نشان داده شده، نیروی بستن بلوک را بر حسب نیروی P بدون در نظر گرفتن اصطکاک به دست آوریم.
- کار انجام شده نیروهای خارجی برای یک تغییر مکان مجازی $\delta\theta$ را در نظر می‌گیریم. تنها نیروهای P و Q کار غیر صفر دارند. دقت شود که نیروهای در جهت منفی محورها هستند.

$$\delta U = 0 = \delta U_Q + \delta U_P = -Q \delta x_B - P \delta y_C$$

$$x_B = 2l \sin \theta$$

$$y_C = l \cos \theta$$

$$0 = -2Ql \cos \theta \delta \theta + Pl \sin \theta \delta \theta$$

$$\delta x_B = 2l \cos \theta \delta \theta$$

$$\delta y_C = -l \sin \theta \delta \theta$$

$$Q = \frac{1}{2} P \tan \theta$$

- اگر تغییر مکان مجازی با قیود تکیه‌گاه‌ها و اتصالات هماهنگ باشد، تمام عکس‌العمل‌ها و نیروهای داخلی حذف می‌شوند و تنها کار بار، نیروهای اعمال شده، و نیروهای اصطکاک باید در نظر گرفته شوند. این از امتیازات روش کار مجازی نسبت به معادلات تعادل است.

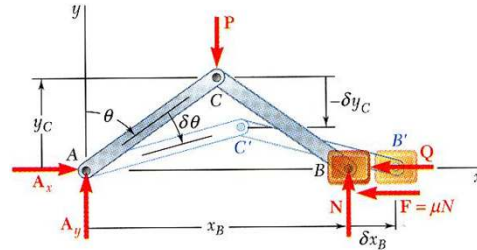
گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2003 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

10 - 18

Vector Mechanics for Engineers: Statics

ماشین های واقعی. راندمان مکانیکی



راندمان مکانیکی $\eta =$

$$\eta = \frac{\text{کار خروجی ماشین واقعی}}{\text{کار خروجی ماشین ایده آل}}$$

$$\begin{aligned}\eta &= \frac{2Ql \cos \theta \delta \theta}{Pl \sin \theta \delta \theta} \\ &= \frac{2Q \cos \theta}{P \sin \theta} = \frac{2Q}{P} \cot \theta = \\ &= (\tan \theta - \mu) \cot \theta = 1 - \mu \cot \theta\end{aligned}$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالشیری

© 2003 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

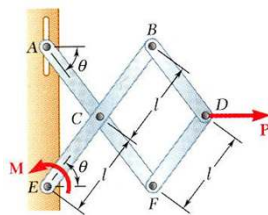
10 - 19

- برای یک ماشین ایده آل بدون اصطکاک، کار خروجی باید برابر با کار ورودی باشد.
- وقتی اثر اصطکاک در نظر گرفته شود، کار خروجی کاهش می یابد.

$$\begin{aligned}\delta U &= -Q \delta x_B - P \delta y_C - F \delta x_B = 0 \\ 0 &= -2Ql \cos \theta \delta \theta + Pl \sin \theta \delta \theta - \mu Pl \cos \theta \delta \theta \\ Q &= \frac{1}{2} P (\tan \theta - \mu)\end{aligned}$$

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مسئله نمونه 10.1



مقدار کوپل M مورد نیاز برای تعادل مکانیزم را بیابید.

حل:

- اصل کار مجازی را به کار می بریم.

$$\delta U = 0 = \delta U_M + \delta U_P$$

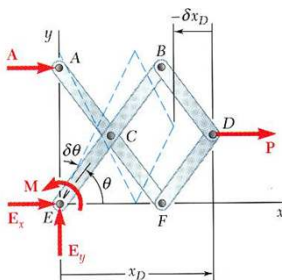
$$0 = M \delta \theta + P \delta x_D$$

$$x_D = 3l \cos \theta$$

$$\delta x_D = -3l \sin \theta \delta \theta$$

$$0 = M \delta \theta + P(-3l \sin \theta \delta \theta)$$

$$\boxed{M = 3Pl \sin \theta}$$



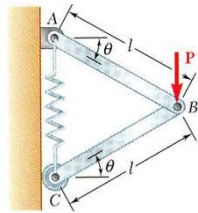
گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالشیری

© 2003 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

10 - 20

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مسئله نمونه 10.2



برای حالت تعادل مکانیزم، رابطه بین θ و کشش فنر را بیابید. طول آزاد فنر h و ثابت فنر k است. از وزن مکانیزم صرفنظر کنید.

حل:

- اصل کار مجازی را به کار می‌بریم. نیروی P در جهت مثبت y و نیروی F در جهت منفی y است.

$$\delta U = \delta U_B + \delta U_F = 0$$

$$0 = P \delta y_B - F \delta y_C$$

$$y_B = l \sin \theta$$

$$y_C = 2l \sin \theta$$

$$F = ks$$

$$\delta y_B = l \cos \theta \delta \theta$$

$$\delta y_C = 2l \cos \theta \delta \theta$$

$$= k(y_C - h)$$

$$= k(2l \sin \theta - h)$$

$$\sin \theta = \frac{P + 2kh}{4kl}$$

$$F = \frac{1}{2}P$$

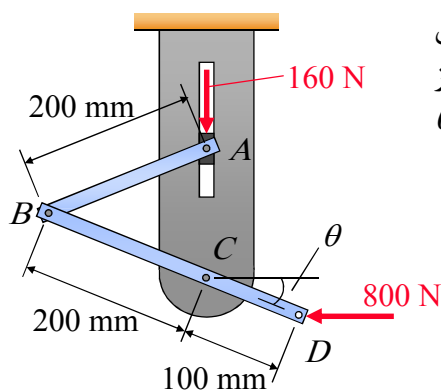
$$0 = P(l \cos \theta \delta \theta) - k(2l \sin \theta - h)(2l \cos \theta \delta \theta)$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

© 2003 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

10 - 21

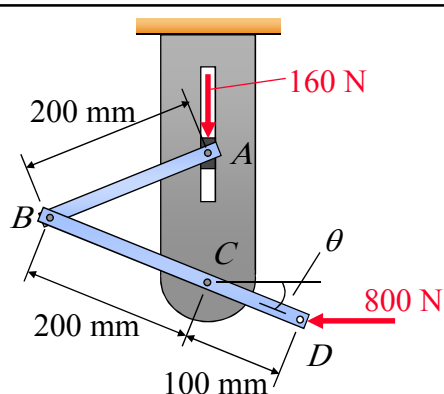
مسئله 10.103



میله AB در A به بلوکی متصل است که می‌تواند در شیار به طور عمودی آزادانه حرکت کند. با صرفنظر کردن از اصطکاک و وزن میله‌ها، مقدار زاویه θ مربوط به حالت تعادل را بیابید.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

10 - 22

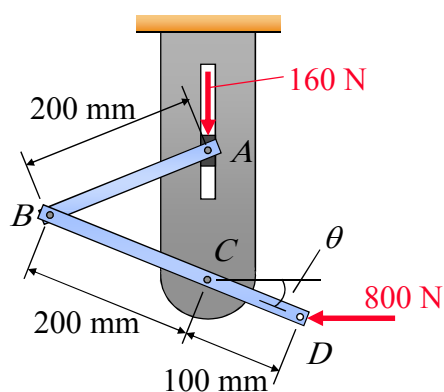


۱. اصل کار مجازی را به کار ببرید. اگر سیستمی متشکل از چند جسم صلب در حال تعادل باشد، کار مجازی کل نیروهای خارجی که به سیستم وارد می‌شود برای هر تغییر مکان مجازی سیستم صفر است.

۱-۱- یک تغییر مکان مجازی تعریف کنید. با استفاده از یک متغیر یک تغییر مکان مجازی برای تمام نیروهایی که کار انجام می‌دهند تعریف کنید.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

10 - 23



۲-۱- کل کار مجازی که توسط نیروها و گشتاورها در یک تغییر مکان مجازی انجام می‌گیرد را بنویسید.

$$\delta U = \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{r} \quad \text{و} \quad \delta U = M \delta \theta$$

که δU کار مجازی، $\mathbf{F}$ نیرویی است که تغییر مکان مجازی آن $\delta \mathbf{r}$ است و M کوپلی است که چرخش مجازی $\delta \theta$ دارد.

۳-۱- کار مجازی را برابر صفر قرار داده و معادله را حل کنید.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

10 - 24

تغییر مکان مجازی را تعریف کنید.

$y_A = 400 \sin \theta$
 $\delta y_A = 400 \cos \theta \delta \theta$
 $x_D = 100 \cos \theta$
 $\delta x_D = -100 \sin \theta \delta \theta$

10 - 25

کل کار مجازی که توسط نیروها در یک تغییر مکان مجازی انجام می‌گیرد را می‌نویسیم.

کار مجازی را برابر صفر قرار داده و معادله را حل می‌کنیم.

کار مجازی: $\delta U = - (160 \text{ N}) \delta y_A - (800 \text{ N}) \delta x_D = 0$

$-(160)(400 \cos \theta \delta \theta) - (800)(-100 \sin \theta \delta \theta) = 0$

$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = 0.8 ; \quad \tan \theta = 0.8 \quad \boxed{\theta = 38.7^\circ}$

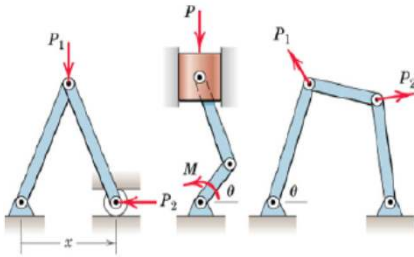
گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

10 - 26

Vector Mechanics for Engineers: Statics

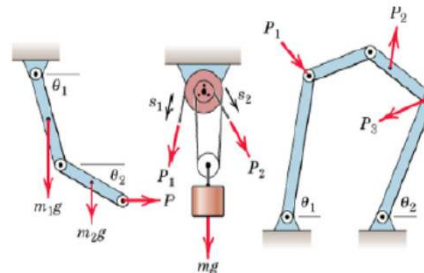
Degrees of Freedom (DOF)

- Number of independent coordinates needed to specify completely the configuration of system



(a) Examples of one-degree-of-freedom systems

Only one coordinate (displacement or rotation) is needed to establish position of every part of the system



(b) Examples of two-degree-of-freedom systems

Two independent coordinates are needed to establish position of every part of the system

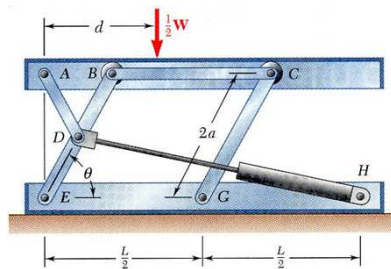
گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

© 2003 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

10 - 27

Vector Mechanics for Engineers: Statics

Sample Problem 10.3

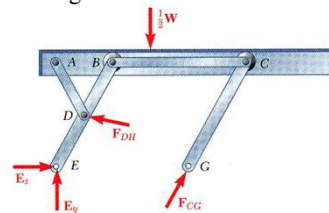


A hydraulic lift table consisting of two identical linkages and hydraulic cylinders is used to raise a 1000-kg crate. Members EDB and CG are each of length $2a$ and member AD is pinned to the midpoint of EDB .

Determine the force exerted by each cylinder in raising the crate for $\theta = 60^\circ$, $a = 0.70$ m, and $L = 3.20$ m.

SOLUTION:

- Create a free-body diagram for the platform and linkage.



- Apply the principle of virtual work for a virtual displacement $\delta\theta$ recognizing that only the weight and hydraulic cylinder do work.

$$\delta U = 0 = \delta Q_W + \delta Q_{F_{DH}}$$

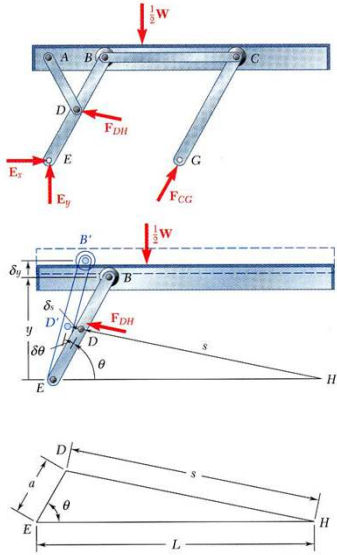
- Based on the geometry, substitute expressions for the virtual displacements and solve for the force in the hydraulic cylinder.

© 2003 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

10 - 28

Vector Mechanics for Engineers: Statics

Sample Problem 10.3



SOLUTION:

- Create a free-body diagram for the platform.
- Apply the principle of virtual work for a virtual displacement $\delta\theta$

$$\delta U = 0 = \delta Q_W + \delta Q_{F_{DH}}$$

$$0 = -\frac{1}{2}W\delta y + F_{DH}\delta s$$

- Based on the geometry, substitute expressions for the virtual displacements and solve for the force in the hydraulic cylinder.

$$y = 2a \sin \theta$$

$$s^2 = a^2 + L^2 - 2aL \cos \theta$$

$$\delta y = 2a \cos \theta \delta \theta$$

$$2s \delta s = -2aL(-\sin \theta) \delta \theta$$

$$\delta s = \frac{aL \sin \theta}{s} \delta \theta$$

$$0 = \left(-\frac{1}{2}W\right)2a \cos \theta \delta \theta + F_{DH} \frac{aL \sin \theta}{s} \delta \theta$$

$$F_{DH} = W \frac{s}{L} \cot \theta$$

$$F_{DH} = 5.15 \text{ kN}$$

© 2003 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

10 - 29

Vector Mechanics for Engineers: Statics

انرژی پتانسیل

- When the differential work is a force is given by an exact differential,

$$dU = -dV$$

$$U_{1 \rightarrow 2} = V_1 - V_2$$

= negative of change in potential energy

- Forces for which the work can be calculated from a change in potential energy are *conservative forces*.

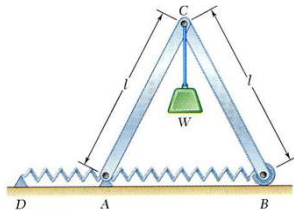
گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2003 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

10 - 30

Vector Mechanics for Engineers: Statics

انرژی پتانسیل و تعادل



- When the potential energy of a system is known, the principle of virtual work becomes

$$\delta U = 0 = -\delta V = -\frac{dV}{d\theta} \delta\theta$$

$$0 = \frac{dV}{d\theta}$$

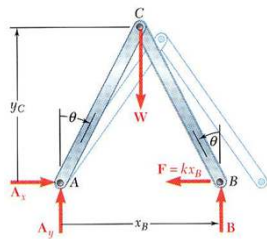
- For the structure shown,

$$\begin{aligned} V &= V_e + V_g = \frac{1}{2} kx_B^2 + Wy_C \\ &= \frac{1}{2} k(2l \sin \theta)^2 + W(l \cos \theta) \end{aligned}$$

- At the position of equilibrium,

$$\frac{dV}{d\theta} = 0 = l \sin \theta (4kl \cos \theta - W)$$

indicating two positions of equilibrium.



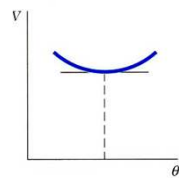
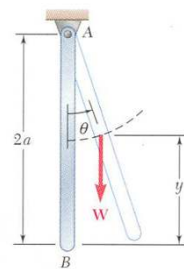
گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

© 2003 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

10 - 31

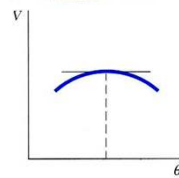
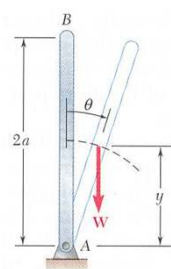
Vector Mechanics for Engineers: Statics

پایداری و تعادل



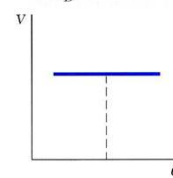
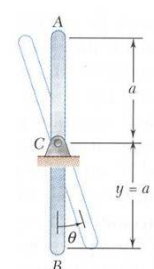
(a) Stable equilibrium

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} > 0$$



(b) Unstable equilibrium

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} < 0$$



(c) Neutral equilibrium

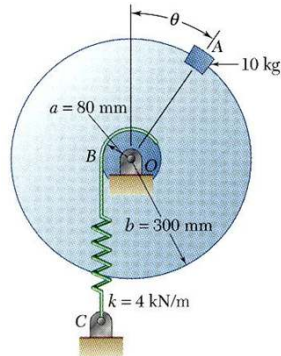
$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = 0$$

© 2003 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

10 - 32

Vector Mechanics for Engineers: Statics

Sample Problem 10.4



Knowing that the spring BC is unstretched when $\theta = 0$, determine the position or positions of equilibrium and state whether the equilibrium is stable, unstable, or neutral.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

© 2003 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

10 - 33

SOLUTION:

- Derive an expression for the total potential energy of the system.

$$V = V_e + V_g$$

- Determine the positions of equilibrium by setting the derivative of the potential energy to zero.

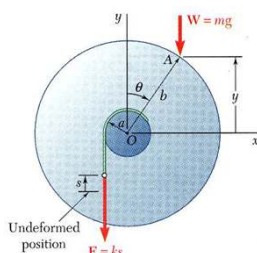
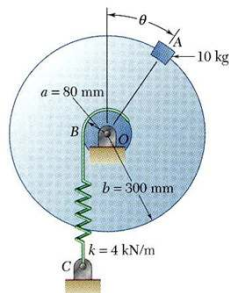
$$\frac{dV}{d\theta} = 0$$

- Evaluate the stability of the equilibrium positions by determining the sign of the second derivative of the potential energy.

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} \begin{matrix} ? \\ > < 0 \end{matrix}$$

Vector Mechanics for Engineers: Statics

Sample Problem 10.4



SOLUTION:

- Derive an expression for the total potential energy of the system.

$$V = V_e + V_g$$

$$= \frac{1}{2}ks^2 + mgy$$

$$= \frac{1}{2}k(a\theta)^2 + mg(b\cos\theta)$$

- Determine the positions of equilibrium by setting the derivative of the potential energy to zero.

$$\frac{dV}{d\theta} = 0 = ka^2\theta - mgb\sin\theta$$

$$\sin\theta = \frac{ka^2}{mgb}\theta = \frac{(4\text{ kN/m})(0.08\text{ m})^2}{(10\text{ kg})(9.81\text{ m/s}^2)(0.3\text{ m})}\theta$$

$$= 0.8699\theta$$

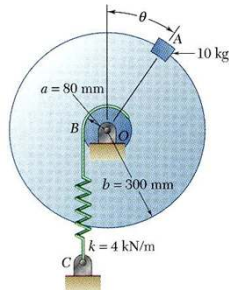
$$\theta = 0 \quad \theta = 0.902\text{ rad} = 51.7^\circ$$

© 2003 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

10 - 34

Vector Mechanics for Engineers: Statics

Sample Problem 10.4



- Evaluate the stability of the equilibrium positions by determining the sign of the second derivative of the potential energy.

$$V = \frac{1}{2}k(a\theta)^2 + mg(b\cos\theta)$$

$$\frac{dV}{d\theta} = 0 = ka^2\theta - mgb\sin\theta \quad \begin{array}{l} \theta = 0 \\ \theta = 0.902\text{ rad} = 51.7^\circ \end{array}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2V}{d\theta^2} &= ka^2 - mgb\cos\theta \\ &= (4\text{ kN/m})(0.08\text{ m})^2 - (10\text{ kg})(9.81\text{ m/s}^2)(0.3\text{ m})\cos\theta \\ &= 25.6 - 29.43\cos\theta \end{aligned}$$

$$\text{at } \theta = 0: \quad \frac{d^2V}{d\theta^2} = -3.83 < 0 \quad \boxed{\text{unstable}}$$

$$\text{at } \theta = 51.7^\circ: \quad \frac{d^2V}{d\theta^2} = +7.36 > 0 \quad \boxed{\text{stable}}$$

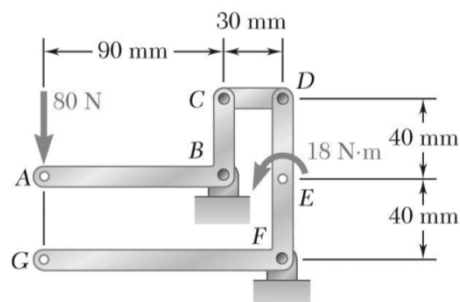
© 2003 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

10 - 35

Vector Mechanics for Engineers: Statics

Some Numericals

Determine the vertical force **P** that must be applied at G to maintain the equilibrium of the linkage.



گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2003 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

10 - 36

Vector Mechanics for Engineers: Statics

$$\delta y_C = \frac{0.04}{0.09} \delta y_A = \frac{4}{9} \delta y_A \leftarrow, \quad \delta y_D = \delta y_C = \frac{4}{9} \delta y_A \leftarrow$$

$$\delta y_G = \frac{0.12 \text{ m}}{0.08 \text{ m}} \delta y_D = 1.5 \left(\frac{4}{9} \delta y_A \right) = \frac{2}{3} \delta y_A \downarrow$$

$$\delta \phi = \frac{\delta y_D}{0.08} = \frac{4}{9} \delta y_A / 0.08 = \frac{4}{0.72} \delta y_A = \frac{50}{9} \delta y_A \curvearrowright$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2003 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

10 - 37

Vector Mechanics for Engineers: Statics

Virtual Work:

$$\delta U = 0: \quad (80 \text{ N}) \delta y_A + (18 \text{ N} \cdot \text{m}) \delta \phi + P \delta y_G = 0$$

$$80 \delta y_A + 18 \left(\frac{50}{9} \delta y_A \right) + P \left(\frac{2}{3} \delta y_A \right) = 0$$

$$80 + 100 + \frac{2}{3} P = 0$$

$$P = -270 \text{ N}$$

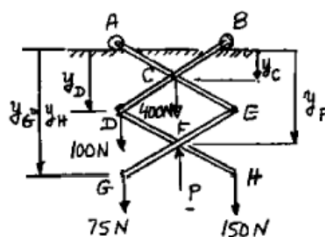
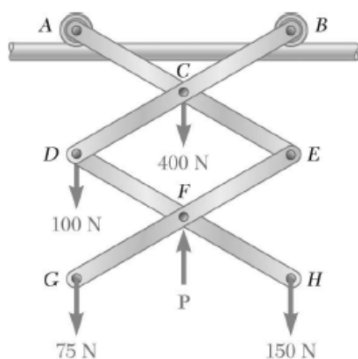
گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2003 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

10 - 38

Vector Mechanics for Engineers: Statics

Determine the force P required to maintain the equilibrium of the linkage shown. All members are of the same length and the wheels at A and B roll freely on the horizontal rod.



گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2003 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

10 - 39

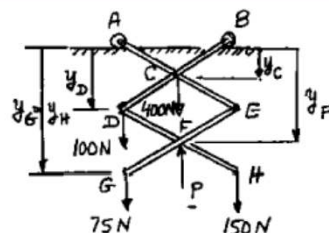
Vector Mechanics for Engineers: Statics

$$y_D = 2y_C \quad \delta y_D = 2\delta y_C$$

$$y_F = 3y_C \quad \delta y_F = 3\delta y_C$$

$$y_G = y_H = 4y_C$$

$$\delta y_G = \delta y_H = 4\delta y_C$$



$$\delta U = (400 \text{ N})\delta y_C + (100 \text{ N})\delta y_D - P\delta y_F + (75 \text{ N})\delta y_G + (150 \text{ N})\delta y_H = 0$$

$$400\delta y_C + 100(2\delta y_C) - P(3\delta y_C) + (75 + 150)(4\delta y_C) = 0$$

$$3P = 400 + 200 + 900$$

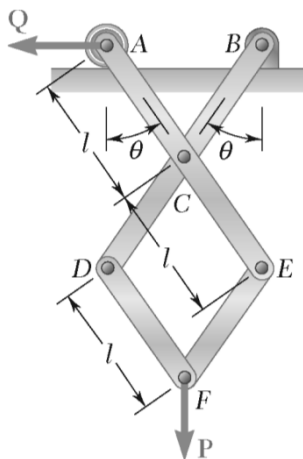
$$P = +500 \text{ N}$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2003 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

10 - 40

Vector Mechanics for Engineers: Statics



The mechanism shown is acted upon by the force **P**; derive an expression for the magnitude of the force **Q** required to maintain equilibrium

گرآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2003 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

10 - 41

Vector Mechanics for Engineers: Statics

SOLUTION

Virtual Work:

We have

$$x_A = 2l \sin \theta$$

$$\delta x_A = 2l \cos \theta \delta \theta$$

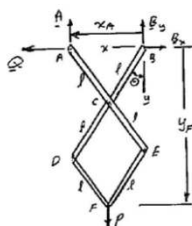
and

$$y_F = 3l \cos \theta$$

$$\delta y_F = -3l \sin \theta \delta \theta$$

Virtual Work:

$$\delta U = 0: Q \delta x_A + P \delta y_F = 0$$

$$Q(2l \cos \theta \delta \theta) + P(-3l \sin \theta \delta \theta) = 0$$


$$Q = \frac{3}{2} P \tan \theta \quad \blacktriangleleft$$

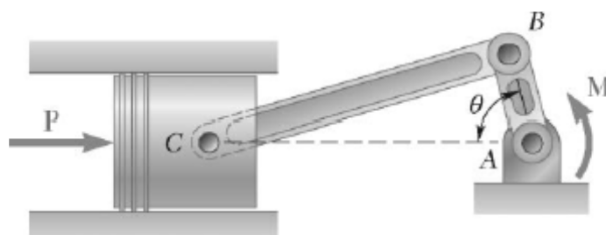
گرآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2003 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

10 - 42

Vector Mechanics for Engineers: Statics

A 4-kN force $\mathbf{P}$ is applied as shown to the piston of the engine system. Knowing that $AB = 50$ mm and $BC = 200$ mm, determine the couple $\mathbf{M}$ required to maintain the equilibrium of the system when (a) $\theta = 30^\circ$, (b) $\theta = 150^\circ$.

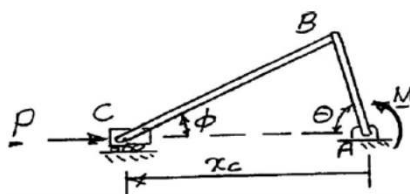


گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2003 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

10 - 43

Vector Mechanics for Engineers: Statics



$$\frac{\sin \phi}{AB} = \frac{\sin \theta}{BC}$$

$$\sin \phi = \frac{AB}{BC} \sin \theta \quad (1)$$

$$x_C = AB \cos \theta + BC \cos \phi$$

$$\delta x_C = -AB \sin \theta \delta \theta - BC \sin \phi \delta \phi \quad (2)$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2003 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

10 - 44

Vector Mechanics for Engineers: Statics

Now, from Equation (1) $\cos \phi \delta \phi = \frac{AB}{BC} \cos \theta \delta \theta$

or $\delta \phi = \frac{AB \cos \theta}{BC \cos \phi} \delta \theta$

From Equation (2)

$$\delta x_C = -AB \sin \theta \delta \theta - BC \sin \phi \left(\frac{AB \cos \theta}{BC \cos \phi} \delta \theta \right)$$

or $\delta x_C = -\frac{AB}{\cos \phi} (\sin \theta \cos \phi + \sin \phi \cos \theta) \delta \theta$

Then $\delta x_C = -\frac{AB \sin(\theta + \phi)}{\cos \phi} \delta \theta$

گرآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2003 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 10 - 45

Vector Mechanics for Engineers: Statics

Virtual Work: $\delta U = 0: -P \delta x_C - M \delta \theta = 0$

$$-P \left[-\frac{AB \sin(\theta + \phi)}{\cos \phi} \delta \theta \right] - M \delta \theta = 0$$

Thus, $M = AB \frac{\sin(\theta + \phi)}{\cos \phi} P$ (4)

(a) $P = 4 \text{ kN}, \theta = 30^\circ$

Eq. (1): $\sin \phi = \frac{50 \text{ mm}}{200 \text{ mm}} \sin 30^\circ \quad \phi = 7.181^\circ$

Eq. (4): $M = (0.05 \text{ m}) \frac{\sin(30^\circ + 7.181^\circ)}{\cos 7.181^\circ} (4 \text{ kN}) \quad M = 121.8 \text{ N} \cdot \text{m} \curvearrowright$

(b) $P = 4 \text{ kN}, \theta = 150^\circ$

Eq. (1): $\sin \phi = \frac{50 \text{ mm}}{200 \text{ mm}} \sin 160^\circ \quad \phi = 7.181^\circ$

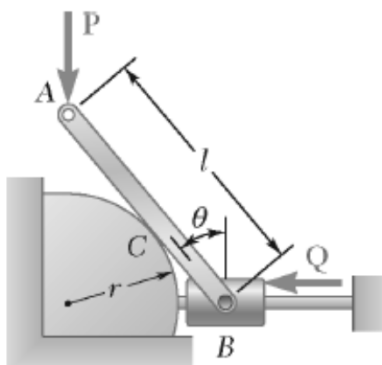
Eq. (4): $M = (0.05 \text{ m}) \frac{\sin(150^\circ + 7.181^\circ)}{\cos 7.181^\circ} (4 \text{ kN}) \quad M = 78.2 \text{ N} \cdot \text{m} \curvearrowleft$

گرآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2003 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 10 - 46

Vector Mechanics for Engineers: Statics

A slender rod of length l is attached to a collar at B and rests on a portion of a circular cylinder of radius r . Neglecting the effect of friction, determine the value of θ corresponding to the equilibrium position of the mechanism when $l = 200$ mm, $r = 60$ mm, $P = 40$ N, and $Q = 80$ N.



گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2003 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

10 - 47

Vector Mechanics for Engineers: Statics

$$OC = r$$

$$\cos \theta = \frac{OC}{OB} = \frac{r}{x_B}$$

$$x_B = \frac{r}{\cos \theta}$$

$$\delta x_B = \frac{r \sin \theta}{\cos^2 \theta} \delta \theta$$

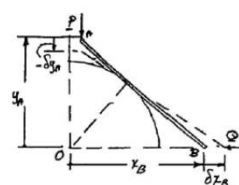
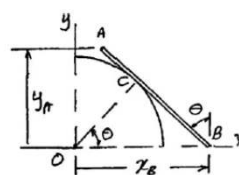
$$y_A = l \cos \theta$$

$$\delta y_A = -l \sin \theta \delta \theta$$

$$\delta U = 0: P(-\delta y_A) - Q \delta x_B = 0$$

$$Pl \sin \theta \delta \theta - Q \frac{r \sin \theta}{\cos^2 \theta} \delta \theta = 0$$

$$\cos^2 \theta = \frac{Qr}{Pl}$$



(1)

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2003 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

10 - 48

Vector Mechanics for Engineers: Statics

Then, with $l = 200$ mm, $r = 60$ mm, $P = 40$ N, and $Q = 80$ N

$$\cos^2 \theta = \frac{(80 \text{ N})(60 \text{ mm})}{(40 \text{ N})(200 \text{ mm})} = 0.6$$

or

$$\theta = 39.231^\circ$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2003 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

10 - 49

Vector Mechanics for Engineers: Statics

Determine the value of θ corresponding to the equilibrium position of the mechanism of Problem 10.12 when $P = 80$ N and $Q = 100$ N.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2003 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

10 - 50

Vector Mechanics for Engineers: Statics

$$y_A = 2l \cos \theta, \quad \delta y_A = -2l \sin \theta \delta \theta$$

$$CD = 2l \sin \frac{\theta}{2}, \quad \delta(CD) = l \cos \frac{\theta}{2} \delta \theta$$

$$\delta U = 0: \quad -P \delta y_A - Q \delta(CD) = 0$$

$$-P(-2l \sin \theta \delta \theta) - Q \left(l \cos \frac{\theta}{2} \delta \theta \right) = 0 \quad Q = 2P \frac{\sin \theta}{\cos(\frac{\theta}{2})}$$

$$P = 80 \text{ N}, \quad Q = 100 \text{ N}$$

$$(100 \text{ N}) = 2(80 \text{ N}) \frac{\sin \theta}{\cos(\frac{\theta}{2})}$$

$$\frac{\sin \theta}{\cos(\frac{\theta}{2})} = 0.625$$

$$\frac{2 \sin(\frac{\theta}{2}) \cos(\frac{\theta}{2})}{\cos(\frac{\theta}{2})} = 0.625$$

$$\theta = 36.42^\circ$$

© 2003 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 10 - 51

Vector Mechanics for Engineers: Statics

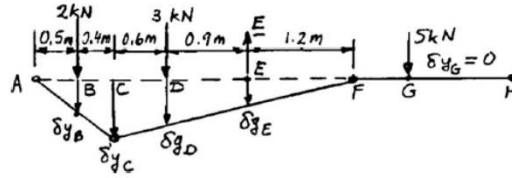
Using the method of virtual work, determine the reaction at E.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2003 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 10 - 52

Vector Mechanics for Engineers: Statics

We release the support at E and assume a virtual displacement δy_E for Point E .



From similar triangles:

$$\delta y_D = \frac{2.1}{1.2} \delta y_E = 1.75 \delta y_E$$

$$\delta y_C = \frac{2.7}{1.2} \delta y_E = 2.25 \delta y_E$$

$$\delta y_B = \frac{0.5}{0.9} \delta y_C = \frac{0.5}{0.9} (2.25 \delta y_E) = 1.25 \delta y_E$$

Virtual Work:

$$\delta U = (2 \text{ kN}) \delta y_B + (3 \text{ kN}) \delta y_D - E \delta y_E = 0$$

$$2(1.25 \delta y_E) + 3(1.75 \delta y_E) - E \delta y_E = 0$$

$$E = +7.75 \text{ kN}$$

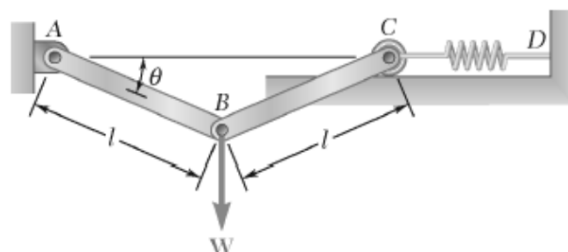
گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2003 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

10 - 53

Vector Mechanics for Engineers: Statics

PROBLEM 10.30 A vertical load W is applied to the linkage at B . The constant of the spring is k , and the spring is unstretched when AB and BC are horizontal. Neglect the weight of the linkage, derive an equation in θ , W , l , and k that must be satisfied when the linkage is in equilibrium.

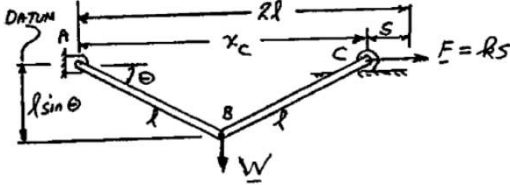


گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2003 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

10 - 54

Vector Mechanics for Engineers: Statics



$$V = \frac{1}{2}ks^2 + Wy_B$$

$$V = \frac{1}{2}k(2l - x_C)^2 + Wy_B$$

$$x_C = 2l \cos \theta \quad \text{and} \quad y_B = -l \sin \theta$$

$$V = \frac{1}{2}k(2l - 2l \cos \theta)^2 - Wl \sin \theta$$

$$= 2kl^2(1 - \cos \theta)^2 - Wl \sin \theta$$

$$\frac{dV}{d\theta} = 2kl^2 2(1 - \cos \theta) \sin \theta - Wl \cos \theta = 0 \qquad (1 - \cos \theta) \tan \theta = \frac{W}{4kl}$$

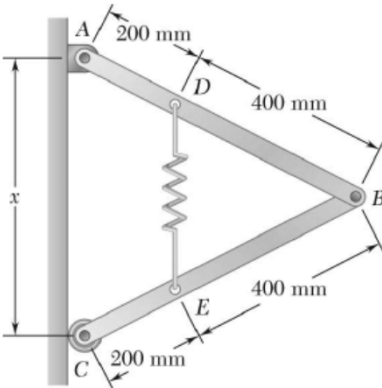
گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2003 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

10 - 55

Vector Mechanics for Engineers: Statics

PROBLEM 10.33 Two 5-kg bars AB and BC are connected by a pin at B and by a spring DE . Knowing that the spring is 150 mm long when unstretched and that the constant of the spring is 1 kN/m, determine the value of x corresponding to equilibrium.



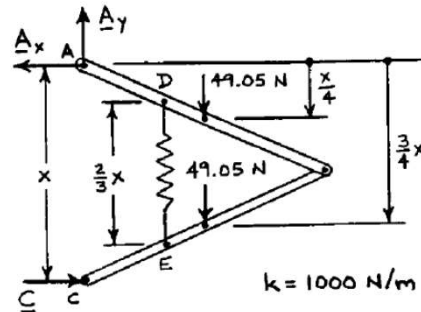
گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2003 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

10 - 56

Vector Mechanics for Engineers: Statics

First note: $W_{\text{bar}} = (5 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) = 49.05 \text{ N}$



Since unstretched length of spring is 150 mm, or 0.15 m, we have

$$\Delta_s = \frac{2}{3}x - 0.15$$

$$V = \frac{1}{2}k\Delta_s^2 - (49.05 \text{ N})\frac{x}{4} - (49.05 \text{ N})\frac{3x}{4}$$

$$V = \frac{1}{2}(1000 \text{ N/m})\left(\frac{2}{3}x - 0.15\right)^2 - 12.2625x - 36.7875x$$

$$\frac{dV}{dx} = 1000\left(\frac{2}{3}x - 0.15\right)\frac{2}{3} - 12.2625 - 36.7875 = 0$$

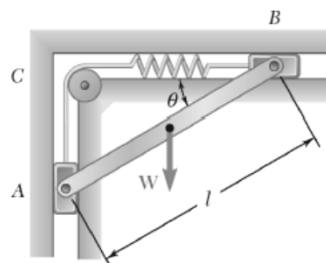
گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری $x = 0.335 \text{ m}$

© 2003 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

10 - 57

Vector Mechanics for Engineers: Statics

A slender rod AB , of weight W , is attached to two blocks A and B that can move freely in the guides shown. The constant of the spring is k , and the spring is unstretched when AB is horizontal. Neglect the weight of the blocks, derive an equation in θ , W , l , and k that must be satisfied when the rod is in equilibrium.

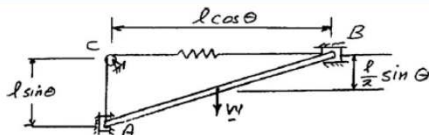


گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2003 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

10 - 58

Vector Mechanics for Engineers: Statics



Elongation of spring:

$$s = l \sin \theta + l \cos \theta - l$$

$$s = l(\sin \theta + \cos \theta - 1)$$

Potential energy:

$$V = \frac{1}{2} k s^2 - W \frac{l}{2} \sin \theta \quad W = mg$$

$$= \frac{1}{2} k l^2 (\sin \theta + \cos \theta - 1)^2 - mg \frac{l}{2} \sin \theta$$

$$\frac{dV}{d\theta} = k l^2 (\sin \theta + \cos \theta - 1)(\cos \theta - \sin \theta) - \frac{1}{2} m g l \cos \theta \quad (1)$$

Equilibrium:

$$\frac{dV}{d\theta} = 0: (\sin \theta + \cos \theta - 1)(\cos \theta - \sin \theta) - \frac{mg}{2kl} \cos \theta = 0$$

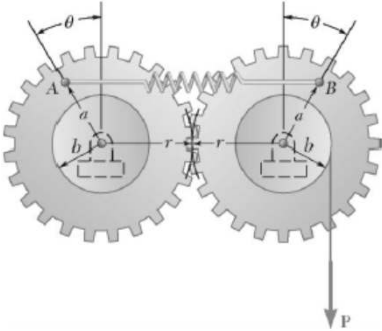
$$\text{or } \cos \theta \left[(\sin \theta + \cos \theta - 1)(1 - \tan \theta) - \frac{mg}{2kl} \right] = 0 \quad \blacktriangleleft$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2003 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 10 - 59

Vector Mechanics for Engineers: Statics

A spring AB of constant k is attached to two identical gears as shown. Knowing that the spring is undeformed when $\theta = 0$, and given that $a = 60 \text{ mm}$, $b = 45 \text{ mm}$, $r = 90 \text{ mm}$, and $k = 6 \text{ kN/m}$, determine (a) the range of values of P for which a position of equilibrium exists, (b) two values of θ corresponding to equilibrium if the value of P is equal to half the upper limit of the range found in part a.



گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2003 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 10 - 60

Vector Mechanics for Engineers: Statics

SOLUTION

Elongation of spring

$$s = 2(a \sin \theta) = 2a \sin \theta$$

Potential energy

$$V = \frac{1}{2}ks^2 - Pb\theta = \frac{1}{2}k(2a \sin \theta)^2 - Pb\theta$$

$$V = 2ka^2 \sin^2 \theta - Pb\theta$$

Equilibrium

$$\frac{dV}{d\theta} = 0: \quad \frac{dV}{d\theta} = 4ka^2 \sin \theta \cos \theta - Pb$$

$$= 2ka^2 \sin 2\theta - Pb = 0 \quad (1)$$

$$\sin 2\theta = \frac{Pb}{2ka^2}; \quad \text{For } P_{\max}; \quad \frac{P_{\max}b}{2ka^2} = 1$$

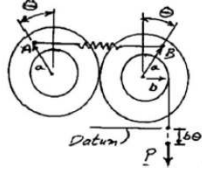
(a)
$$\frac{P_{\max}(0.045 \text{ m})}{2(6000 \text{ N/m})(0.06 \text{ m})^2} = 1 \quad P_{\max} = 960 \text{ N} \blacktriangleleft$$

(b) For $P = \frac{1}{2}P_{\max}$, $\sin 2\theta = \frac{1}{2}; 2\theta = 30^\circ \text{ and } 150^\circ$

$\theta = 15.00^\circ \text{ and } 75.0^\circ \blacktriangleleft$

گرادآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

© 2003 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 10 - 61



Virtual Work

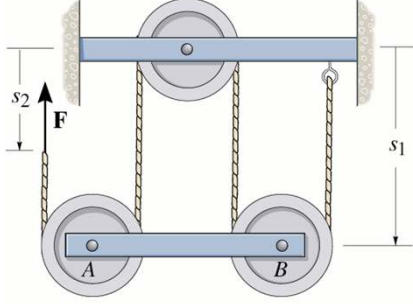
Sample Problem 11.1

Determine the force F acting on the cord which is required to maintain equilibrium on the horizontal 10 kg bar AB. (Hint: express the total constant vertical length of the cord in terms of position coordinates s_1 and s_2 . The derivative of this equation yields a relationship between s_1 and s_2 .)

Given:

Find:

Solution:



گرادآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

10 - 62

Virtual Work

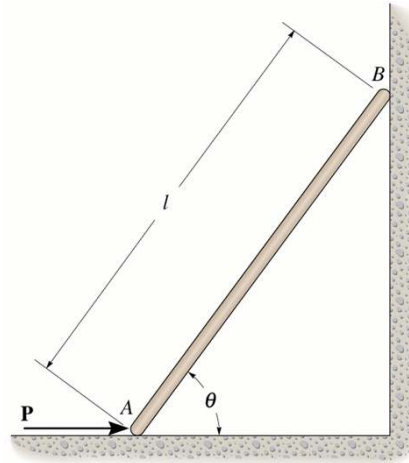
Sample Problem 11.2

A thin rod of weight W rests against the smooth wall and floor. Determine the magnitude of the force P needed to hold it in equilibrium for a given angle θ .

Given:

Find: —

Solution:



گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

10 - ۶۳

Virtual Work

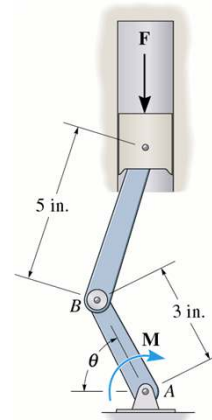
Sample Problem 11.3

The crankshaft is subjected to a torque of $M = 50 \text{ ft}\cdot\text{lb}$. Determine the vertical compressive force F applied to the piston for equilibrium when $\theta = 60^\circ$.

Given: rod, ρ

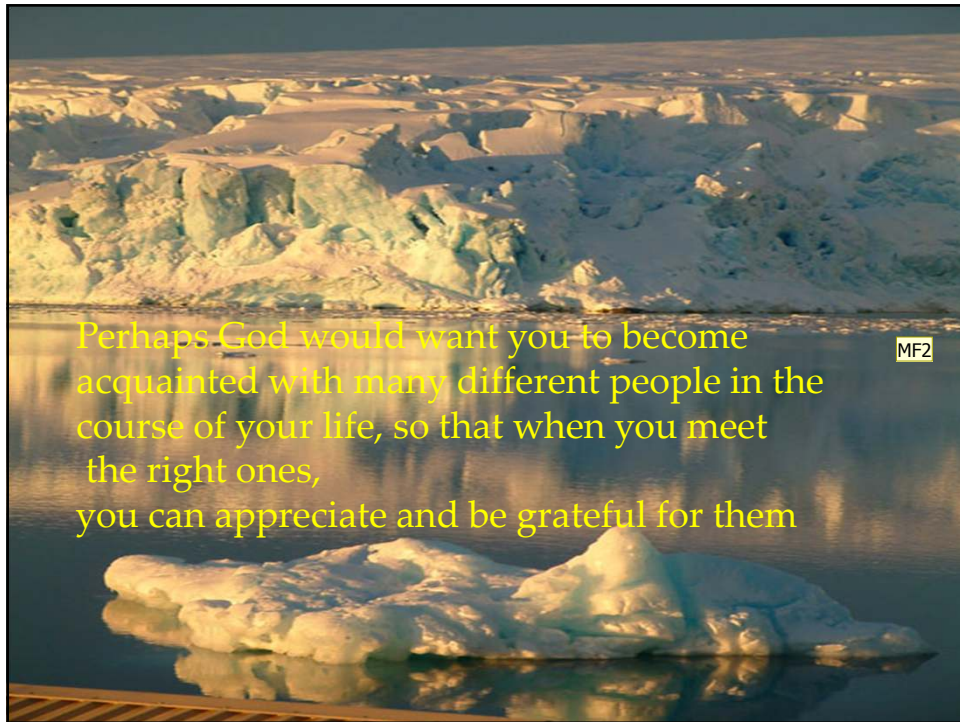
Find: $\bar{x}$, Reactions at O

Solution:



گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

10 - ۶۴



Perhaps God would want you to become acquainted with many different people in the course of your life, so that when you meet the right ones, you can appreciate and be grateful for them

MF2

Slide 65

MF2 آشنا، اگاه، مسبوق، باخبر acquainted
My Friend ۰۲/۰۲/۲۰۱۰ ؛