

Third Edition

CHAPTER

5

MECHANICS OF MATERIALS

Ferdinand P. Beer
E. Russell Johnston, Jr.
John T. DeWolf

Lecture Notes:
J. Walt Oler
Texas Tech University

طراحی تیرها برای خمش

© M.H. Abolbashari, Ferdowsi University of Mashhad

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

Third Edition

MECHANICS OF MATERIALS

Beer • Johnston • DeWolf

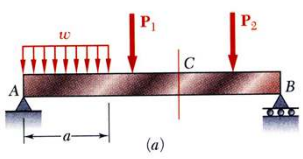
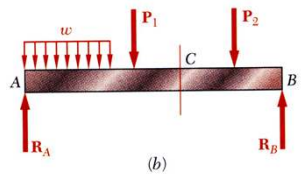
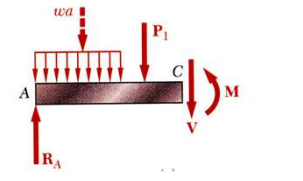
مقدمه

- هدف - تحلیل و طراحی تیرها
- تیرها - عضوهای سازه‌ای که بارها را در نقاط مختلف خود تحمل می‌کنند.
- بارهای عرضی تیرها به دو دسته متمرکز و گسترده تقسیم بندی می‌شوند.
- بارهای اعمال شده باعث بوجود آمدن نیروهای داخلی می‌شوند که عبارتند از نیروی برشی (در اثر توزیع تنش برشی) و کوپل خمشی (در اثر توزیع تنش قائم).
- اغلب تنش قائم معیار طراحی بحرانی است.

$$\sigma_x = -\frac{My}{I}$$

$$\sigma_m = \frac{|M|c}{I} = \frac{|M|}{S}$$

که باید محل و اندازه بیشترین ممان خمشی به دست آورده شود.

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشیری

5 - 2/22

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مقدمه (ادامه)

دسته بندی تکیه گاه های تیرها

	ساده	بالکن دار	یکسر گیر دار (طره، کنسول)
Statically Determinate Beams			
	(a) Simply supported beam	(b) Overhanging beam	(c) Cantilever beam
Statically Indeterminate Beams			
	(d) Continuous beam	(e) Beam fixed at one end and simply supported at the other end	(f) Fixed beam
	ممتد	یکسر گیر دار - یکسر ساده	دوسر گیر دار

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالشیری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

5 - 3/22

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

ترسیمه نیروی برشی و ممان خمشی (یادآوری از استاتیک)

(a)

(b)

- به دست آوردن تنش های ماکزیمم قائم و برشی در گرو مشخص کردن نیروی برشی و کوپل خمشی داخلی ماکزیمم است.
- نیروی برشی و کوپل خمشی در یک نقطه با مقطع زدن تیر و کاربرد تحلیل تعادل ایستایی یکی از دو طرف تیر به دست می آیند.
- علامت قراردادی برای نیروهای برشی مثبت V و V' و برای کوپل خمشی مثبت M و M' :

(a) Internal forces (positive shear and positive bending moment)

برش مثبت

خمش مثبت

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالشیری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

5 - 4/22

MECHANICS OF MATERIALS

Beer • Johnston • DeWolf

مسئله نمونه 5.1

حل:

- تیر را به عنوان یک جسم صلب در نظر بگیرید و نیروهای عکس‌العمل را به دست آورید.
- در نزدیکی تکیه‌گاه‌ها و محل اثر نیروها مقطع بزنید. تحلیل‌های ایستایی را برای ترسیم آزاد قطعه‌های تیر به کار ببرید و نیروهای برشی و کوپل‌های خمشی را به دست آورید.
- از ترسیمه‌ها و توزیع آن‌ها، نیروی برشی و ممان خمشی ماکزیمم را مشخص کنید.
- از رابطه تنش و ممان خمشی الاستیک، تنش قائم ماکزیمم را به دست آورید.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

5 – 5/22

MECHANICS OF MATERIALS

Beer • Johnston • DeWolf

مسئله نمونه 5.1 (ادامه)

حل:

- تیر را به عنوان یک جسم صلب در نظر بگیرید و نیروهای عکس‌العمل را به دست آورید.
- تیر را مقطع بزنید و ترسیمه آزادها را تحلیل ایستایی کنید.

from $\sum F_y = 0$ and $\sum M_B = 0$: $R_B = 46 \text{ kN}$ $R_D = 14 \text{ kN}$

• بین نقاط A و B، شامل مقاطع ۱ و ۲

$$\sum F_y = 0 \quad -20 - V = 0 \quad V = -20 \text{ kN} \quad V_1 = V_2 = -20 \text{ kN}$$

$$\sum M = 0 \quad 20x + M = 0 \quad M = -20x \quad M_1 = 0, M_2 = -50 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

• بین نقاط B و C، شامل مقاطع ۳ و ۴

$$\sum F_y = 0 \quad -20 + 46 - V = 0 \quad V = 26 \text{ kN}$$

$$\sum M = 0 \quad 20x - 46(x - 2.5) + M = 0 \quad M = 26x - 115$$

$$V_3 = V_4 = +26 \text{ kN} \quad M_3 = -50 \text{ kN}\cdot\text{m}, M_4 = 28 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

• بین نقاط C و D، شامل مقاطع ۵ و ۶

$$\sum F_y = 0 \quad -20 + 46 - 40 - V = 0, \quad V = -14 \text{ kN}$$

$$\sum M = 0 \quad 20x - 46(x - 2.5) + 40(x - 5.5) + M = 0, M = -14x + 105$$

$$V_5 = V_6 = -14 \text{ kN} \quad M_5 = 28 \text{ kN}\cdot\text{m}, M_6 = 0$$

5 – 6/22

MECHANICS OF MATERIALS

Beer • Johnston • DeWolf

مسئله نمونه 5.1 (ادامه)

- از ترسیمه‌ها و توزیع آن‌ها، نیروی برشی و ممان خمشی ماکزیمم را مشخص کنید.

$$V_m = 26 \text{ kN} \quad M_m = |M_B| = 50 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

- از رابطه تنش و ممان خمشی الاستیک، تنش قائم ماکزیمم را به دست آورید.

$$S = \frac{1}{6} b h^2 = \frac{1}{6} (0.080 \text{ m}) (0.250 \text{ m})^2 = 833.33 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

$$\sigma_m = \frac{|M_B|}{S} = \frac{50 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}}{833.33 \times 10^{-6} \text{ m}^3}$$

$\sigma_m = 60.0 \times 10^6 \text{ Pa}$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشیری
© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 5 - 7/22

MECHANICS OF MATERIALS

Beer • Johnston • DeWolf

مسئله نمونه 5.2

حل:

- بار 10 kip را با یک نیرو و کوپل در نقطه D جایگزین کنید. با در نظر گرفتن تیر به عنوان یک جسم صلب عکس‌العمل در B را به دست آورید.
- در نزدیکی تکیه‌گاه‌ها و بارها تیر را مقطع بزنید. با تحلیل ایستایی ترسیمه‌های آزاد، نیروهای برشی و کوپل‌های خمشی را به دست آورید.
- با استفاده از رابطه خمشی الاستیک، تنش قائم ماکزیمم را در طرف راست و چپ نقطه D به دست آورید.

سازه فوق از یک تیر فولادی نورد شده W10×112 ساخته شده است. الف) نمودار نیروی برشی و ممان خمشی تیر را برای بار نشان داده شده به دست آورید. ب) تنش قائم را در مقاطعی در طرف راست و چپ نقطه D به دست آورید.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشیری
© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 5 - 8/22

Beer • Johnston • DeWolf

مسئله نمونه 5.2 (ادامه)

حل:

- بار 10 kip را با یک نیرو و کوپل در نقطه D جایگزین کنید. عکس العمل در B را به دست آورید.
- تیر را مقطع بزنید و ترسیمه‌های آزاد را تحلیل ایستایی نمایید.

From A to C: $0 \leq x \leq 8$

$$\sum F_y = 0 \quad -3x - V = 0 \quad V = -3x \text{ kips}$$

$$\sum M_1 = 0 \quad (3x)\left(\frac{1}{2}x\right) + M = 0 \quad M = -1.5x^2 \text{ kip} \cdot \text{ft}$$

From C to D: $8 \leq x \leq 11$

$$\sum F_y = 0 \quad -24 - V = 0 \quad V = -24 \text{ kips}$$

$$\sum M_2 = 0 \quad 24(x-4) + M = 0 \quad M = (96 - 24x) \text{ kip} \cdot \text{ft}$$

From D to B: $11 \leq x \leq 16$

$$V = -34 \text{ kips} \quad M + 24(x-4) + 10(x-11) - 20 = 0$$

$$M = (226 - 34x) \text{ kip} \cdot \text{ft}$$

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 5 - 9/22

Beer • Johnston • DeWolf

مسئله نمونه 5.2 (ادامه)

هر گاه در نقطه‌ای (مانند A) مشتق M یعنی V صفر باشد، در آن نقطه ماکزیمم یا مینیمم است و مماس بر محور x .

- با استفاده از رابطه خمش الاستیک، تنش قائم ماکزیمم را در طرف راست و چپ نقطه D به دست آورید.

انتگرال

از پیوست C برای تیر W10×112 داریم:

حول محور X-X $S = 126 \text{ in}^3$

To the left of D:

$$\sigma_m = \frac{|M|}{S} = \frac{168 \times 12 \text{ kip} \cdot \text{in}}{126 \text{ in}^3} = \frac{2016 \text{ kip} \cdot \text{in}}{126 \text{ in}^3}$$

$\sigma_m = 16.0 \text{ ksi}$

To the right of D:

$$\sigma_m = \frac{|M|}{S} = \frac{148 \times 12 \text{ kip} \cdot \text{in}}{126 \text{ in}^3} = \frac{1776 \text{ kip} \cdot \text{in}}{126 \text{ in}^3}$$

$\sigma_m = 14.1 \text{ ksi}$

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 5 - 10/22

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

رابطه بین بار، نیروی برشی، و ممان خمشی (یادآوری از استاتیک)

- روش قبلی در صورتی که تعداد نیروهای متمرکز زیاد و یا بار توزیع شده باشد طولانی و خسته کننده است.
- رابطه بین بار و نیروی برشی:

$$\sum F_y = 0: V - (V + \Delta V) - w \Delta x = 0 \rightarrow \Delta V = -w \Delta x$$

اگر $\Delta x \rightarrow 0$ داریم:

$$\frac{dV}{dx} = -w$$

یا:

$$V_D - V_C = -\int_{x_C}^{x_D} w dx$$

سطح زیر منحنی بار بین C و D

- رابطه دیفرانسیلی برای نقطه اعمال نیروی متمرکز صحت ندارد زیرا منحنی نیروی برشی در آن نقطه ناپیوسته است.
- رابطه بین نیروی برشی و ممان خمشی

$$\sum M_{C'} = 0: (M + \Delta M) - M - V \Delta x + w \Delta x \frac{\Delta x}{2} = 0$$

$$\Delta M = V \Delta x - \frac{1}{2} w (\Delta x)^2$$

اگر $\Delta x \rightarrow 0$ داریم:

$$\frac{dM}{dx} = V$$

یا

(سطح زیر منحنی نیروی برشی بین C و D)

$$M_D - M_C = \int_{x_C}^{x_D} V dx$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

5 - 11/22 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مسئله نمونه 5.3

حل:

- کل تیر را به عنوان یک جسم صلب در نظر بگیرید و عکس‌العمل‌ها را در A و D به دست آورید.

- با استفاده از رابطه بین نیروی برشی و بار، نمودار نیروی برشی را ترسیم کنید.
- با استفاده از رابطه بین نیروی برشی و ممان خمشی، نمودار ممان خمشی را ترسیم کنید.

نمودار نیروی برش و ممان خمشی را برای تیر و بار نشان داده شده ترسیم کنید.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

5 - 12/22

Beer • Johnston • DeWolf

مسئله نمونه 5.3 (ادامه)

حل:

- کل تیر را به عنوان یک جسم صلب در نظر بگیرید و عکس‌العمل‌ها را در A و D به دست آورید.

$$\sum M_A = 0$$

$$0 = D(24 \text{ ft}) - (20 \text{ kips})(6 \text{ ft}) - (12 \text{ kips})(14 \text{ ft}) - (12 \text{ kips})(28 \text{ ft})$$

$$D = 26 \text{ kips}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$0 = A_y - 20 \text{ kips} - 12 \text{ kips} + 26 \text{ kips} - 12 \text{ kips}$$

$$A_y = 18 \text{ kips}$$

- با استفاده از رابطه بین نیروی برشی و بار، نمودار نیروی برشی را ترسیم کنید.

$$\frac{dV}{dx} = -w \quad dV = -w dx$$

- بین نیروهای متمرکز که نیرویی نیست ($w=0$) منحنی نیروی برشی شیب صفر دارد (ثابت است)
- در قطاع بار یکنواخت منحنی نیروی برشی تغییرات خطی دارد.

5 – 13/22

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

Beer • Johnston • DeWolf

مسئله نمونه 5.3 (ادامه)

- با استفاده از رابطه نیروی برشی و ممان خمشی، نمودار ممان خمشی را ترسیم کنید.

$$\frac{dM}{dx} = V \quad dM = V dx$$

- ممان خمشی در A و E صفر است.
- تغییرات ممان خمشی بین A، B، C، D و E خطی است.
- تغییرات ممان خمشی بین D و E منحنی درجه دو است.
- تغییرات خالص ممان خمشی برابر است با سطح زیر توزیع نیروی برشی در همان قطعه.
- جمع کلی تغییرات ممان خمشی در امتداد تیر باید صفر شود؛ زیرا در دو سر A و E تیر ممان صفر است.

5 – 14/22

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

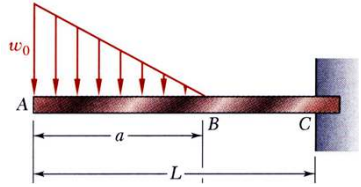
MECHANICS OF MATERIALS

Beer • Johnston • DeWolf

مسئله نمونه 5.5

حل:

- کل تیر را به عنوان یک جسم آزاد بگیرید و عکس العمل را در C به دست آورید.
- با استفاده از رابطه بین نیروی برشی و بار، نمودار نیروی برشی را ترسیم کنید.
- با استفاده از رابطه بین نیروی برشی و ممان خمشی، نمودار ممان خمشی را ترسیم کنید.



ترسیمه نیروی برش و ممان خمشی را برای تیر و بار نشان داده شده ترسیم کنید.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

5 – 15/22

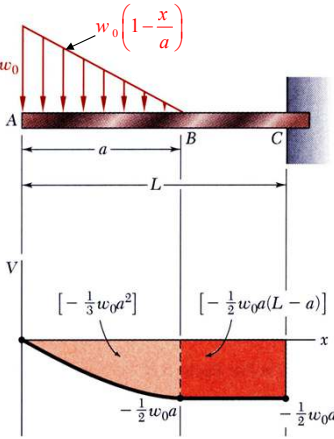
MECHANICS OF MATERIALS

Beer • Johnston • DeWolf

مسئله نمونه 5.5 (ادامه)

حل:

- کل تیر را به عنوان یک جسم صلب در نظر بگیرید و عکس العملها را در C به دست آورید.
- با استفاده از رابطه بین نیروی برشی و بار، نمودار نیروی برشی را ترسیم کنید.



نتیجه حاصل از انتگرال گیری از توزیع بار و نیروی برشی باید یکسان باشد.

• با استفاده از رابطه بین نیروی برشی و بار، نمودار نیروی برشی را ترسیم کنید.

$$\sum F_y = 0 = -\frac{1}{2}w_0 a + R_C \quad R_C = \frac{1}{2}w_0 a$$

$$\sum M_C = 0 = \frac{1}{2}w_0 a \left(L - \frac{a}{3} \right) + M_C \quad M_C = -\frac{1}{2}w_0 a \left(L - \frac{a}{3} \right)$$

نتیجه حاصل از انتگرال گیری از توزیع بار و نیروی برشی باید یکسان باشد.

• با استفاده از رابطه بین نیروی برشی و بار، نمودار نیروی برشی را ترسیم کنید.

$$V_B - V_A = -\int_0^a w_0 \left(1 - \frac{x}{a} \right) dx = -\left[w_0 \left(x - \frac{x^2}{2a} \right) \right]_0^a$$

$$V_B = -\frac{1}{2}w_0 a = -(\text{سطح زیر منحنی بار})$$

- نیروی برشی بین B و C تغییر نمی کند.

- با تحلیل ترسیمه آزاد جسم سازگار است.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

5 – 16/22

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مسئله نمونه 5.5 (ادامه)

- با استفاده از رابطه نیروی برشی و ممان خمشی، نمودار ممان خمشی را ترسیم کنید.

$$M_B - M_A = \int_0^a \left(-w_0 \left(x - \frac{x^2}{2a} \right) \right) dx = \left[-w_0 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6a} \right) \right]_0^a$$

$$M_B = -\frac{1}{3} w_0 a^2$$

$$M_C - M_B = \int_a^L \left(-\frac{1}{2} w_0 a \right) dx = -\frac{1}{2} w_0 a (L - a)$$

$$M_C = -\frac{1}{2} w_0 a (L - a) + M_B = -\frac{1}{2} w_0 a (L - a) - \frac{1}{3} w_0 a^2 = -\frac{1}{6} w_0 a (3L - a) = \frac{aw_0}{2} \left(L - \frac{a}{3} \right)$$

- نتایج در نقطه C با تحلیل ترسیمه آزاد سازگار است.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 5 - 17/22

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

طراحی تیرهای منشوری برای خمش

- بیشترین تنش قائم در سطح اتفاق می‌افتد و در جایی که ممان خمشی ماکزیمم است.

$$\sigma_m = \frac{|M|_{\max} c}{I} = \frac{|M|_{\max}}{S}$$

- یک طراحی ایمن طراحی است که در آن تنش قائم کمتر از تنش مجاز مصالح تیر باشد. این معیار به ما امکان به دست آوردن مینیمم مدول سطح مقطع را می‌دهد.

$$\sigma_m \leq \sigma_{all}$$

$$S_{\min} = \frac{|M|_{\max}}{\sigma_{all}}$$

- از میان انتخاب‌های مختلف سطح مقطع که مدول مقطع قابل قبولی دارند، آن که **کمترین وزن بر واحد طول** و یا **کمترین مساحت سطح مقطع** را دارد از همه ارزانتر و بهترین انتخاب است.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 5 - 18/22

MECHANICS OF MATERIALS

Beer • Johnston • DeWolf

مسئله نمونه 5.8

حل:

- با فرض صلب بودن تیر، ترسیمه آزاد کل تیر را در نظر گرفته و عکس‌العمل‌ها را در A و D به دست آورید.
- نمودار نیروی برشی را برای تیر و بارگذاری آن رسم کنید. از نمودار، ممان خمشی ماکزیمم را به دست آورید (هر نقطه‌ای که در آن نیروی برشی صفر باشد، ممان خمشی ماکزیمم است).
- مدول مقطع قابل قبول مینیمم را به دست آورید. بهترین مقطع استاندارد که این معیار را برآورده می‌سازد انتخاب کنید.

یک تیر فولادی با دو تکیه گاه مفصلی بار متمرکز و گسترده‌ای را مطابق شکل تحمل می‌کند. با دانستن تنش قائم مجاز آن دسته از فولادها که 160 MPa است، نوع و شماره بال پهن که باید انتخاب شود را مشخص نمایید.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

5 – 19/22

MECHANICS OF MATERIALS

Beer • Johnston • DeWolf

مسئله نمونه 5.8 (ادامه)

- کل تیر را به عنوان جسم آزاد در نظر گرفته و عکس‌العمل‌ها را در A و D به دست آورید.
- نمودار نیروی برشی را رسم کنید. از نمودار، ممان خمشی ماکزیمم را به دست آورید.

$$\sum M_A = 0 = D(5\text{ m}) - (60\text{ kN})(1.5\text{ m}) - (50\text{ kN})(4\text{ m})$$

$$D = 58.0\text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 = A_y + 58.0\text{ kN} - 60\text{ kN} - 50\text{ kN}$$

$$A_y = 52.0\text{ kN}$$

- ممان خمشی ماکزیمم در جایی است که: $V = 0$ or $x = 2.6\text{ m}$.

$$|M|_{\max} = \text{(سطح زیر منحنی نیروی برشی، از A تا E)} = 67.6\text{ kN}$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

5 – 20/22

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مسئله نمونه 5.8 (ادامه)

- مدول مقطع قابل قبول مینیمم را به دست آورید.

$$S_{\min} = \frac{|M|_{\max}}{\sigma_{\text{all}}} = \frac{67.6 \text{ kN} \cdot \text{m}}{160 \text{ MPa}}$$

$$= 422.5 \times 10^{-6} \text{ m}^3 = 422.5 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

- بهترین مقطع استاندارد را که این معیار را برآورده می‌سازد انتخاب کنید.

Shape	$S, 10^3 \text{ mm}^3$
W410 × 38.8	637
W360 × 32.9	474
W310 × 38.7	549
W250 × 44.8	535
W200 × 46.1	448

عمق نامی (mm) $W360 \times 32.9$

وزن (kg/m)

>422.5

با مراجعه به جدول خواص شکل‌های فولادی
نورد شده در پیوست، که این شکل‌ها در
گروه‌هایی با عمق یکسان نمایش داده شده‌اند و
در هر گروه نیز به ترتیب کاهش وزن فهرست
شده‌اند، در هر گروه سبک‌ترین تیری را انتخاب
می‌کنیم که حداقل مدول مقطع آن $S_{\min}$ یا
بیشتر از آن باشد که در جدول نشان داده شده
است. اکنون در این جدول نیز کمترین وزن را
انتخاب می‌کنیم.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشیری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

5 – 21/22

