

Eighth Edition

CHAPTER
3

VECTOR MECHANICS FOR ENGINEERS: STATICS

Ferdinand P. Beer
E. Russell Johnston, Jr.

Lecture Notes:
J. Walt Oler
Texas Tech University

اجسام صلب: سیستم معادل نیروها



گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری
 © 2007 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

Eighth Edition

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مقدمه

- تحلیل یک جسم به عنوان یک ذره همیشه امکان پذیر نیست. در حالت کلی، **اندازه جسم** و نقاط مشخص اعمال نیروها نیز باید در نظر گرفته شوند.
- بیشتر اجسام در مکانیک مقدماتی **صلب** فرض می‌شوند؛ یعنی تغییرشکل‌های واقعی کوچکنند و شرایط تعادل و یا حرکت جسم را متأثر نمی‌کنند.
- در این فصل اثر نیروهای وارد به اجسام صلب تشریح می‌شود و در باره چگونگی **جایگزینی یک سیستم نیرو با یک سیستم معادل ساده‌تر بحث می‌شود**. در این راستا مفاهیم زیر تعریف و تشریح می‌شوند:
 - ممان یک نیرو نسبت به یک نقطه
 - ممان یک نیرو حول یک محور
 - ممان یک کوپل
- هر سیستم نیرویی که به یک جسم صلب اثر می‌کند را می‌توان با یک **سیستم معادلی** که ترکیبی از یک نیرو (که در یک نقطه دلخواه اثر می‌کند) و یک کوپل است جایگزین کرد.



© 2007 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

MF1 Vector Mechanics for Engineers: Statics

نیروهای خارجی و داخلی

- نیروهای اثرکننده روی اجسام صلب به دو دسته تقسیم می‌شوند:

- نیروهای خارجی** (نشاندهنده اثر اجسام صلب دیگر بر جسم صلب مورد نظر است. در تماس مستقیم یا با فاصله مانند جاذبه و وزن)
- نیروهای داخلی** (نشاندهنده نیروهایی است که ذرات جسم صلب را به یکدیگر متصل کرده تا جسم صلب شکل بگیرد)

- نیروهای خارجی در یک ترسیمه آزاد نشان داده می‌شوند.
- برعکس، هر نیروی خارجی می‌تواند باعث حرکتی انتقالی یا چرخشی (و یا هر دو) در جسم شود.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2007 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

۳/69

- بر اساس اصل انتقال پذیری، اثر یک نیروی خارجی روی یک جسم صلب اگر آن نیرو در امتداد خط اثرش حرکت کند بدون تغییر می‌ماند.
- دو نیرو که در دو نقطه به جسم صلبی اعمال می‌شوند اثر مشابهی روی جسم صلب دارند اگر آن دو نیرو مقدار، جهت و خط اثر یکسانی داشته باشند.
- چنین دو نیرویی را **معادل** می‌گویند.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

۴/69

Slide 3

MF1 unopposed: unconstrained

impart: pass on

My Friend 19/02/2009 :

Vector Mechanics for Engineers: Statics

اصل انتقال پذیری: نیروهای معادل

اصل انتقال پذیری و مفهوم نیروی معادل محدودیت‌هایی دارد:

- اگر به عملکرد خارجی میله توجه کنیم، سیستم نیروهای اولیه (a و b) معادل این است که نیرویی نباشد (c و f).

- همچنین از نقطه نظر مکانیک اجسام صلب، سیستم‌های a و d معادلند، ولی نیروهای داخلی و تغییرشکل‌های بوجود آمده در دو سیستم کاملاً متفاوت است.

هرچند اصل انتقال‌پذیری را می‌توان برای شرایط حرکت و تعادل اجسام صلب به کار برد، ولی در بدست آوردن نیروهای داخلی و تغییر شکل‌ها نباید به کار برده شود و یا با دقت و احتیاط مورد استفاده قرار گیرد.

6/69

Vector Mechanics for Engineers: Statics

ضرب برداری دو بردار

- مفهوم ممان یک نیرو حول یک نقطه را می‌توان با کاربرد ضرب بردار یا ضرب برداری راحت تر درک کرد.
- ضرب برداری دو بردار P و Q بردار V است که شرایط زیر را برآورده می‌سازد:
- خط اثر V عمود است بر صفحه‌ای که P و Q در آن قرار دارد.

- مقدار V عبارت است از $V = PQ \sin \theta$
- جهت V از قاعده دست راست به دست می‌آید.

- ضرب برداری:

$$\vec{Q} \times \vec{P} = -(\vec{P} \times \vec{Q})$$

$$\vec{P} \times (\vec{Q}_1 + \vec{Q}_2) = \vec{P} \times \vec{Q}_1 + \vec{P} \times \vec{Q}_2$$

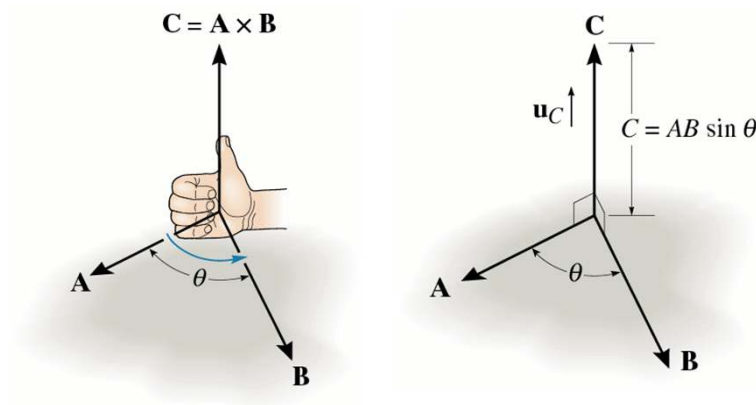
$$(\vec{P} \times \vec{Q}) \times \vec{S} \neq \vec{P} \times (\vec{Q} \times \vec{S})$$

- جابجایی پذیر (commutative) نیست
- توزیع پذیر (distributive) است
- اجتماع پذیر (associative) نیست

6/69

ضرب برداری بردارها

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = (AB \sin \theta) \vec{u}_c$$



گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

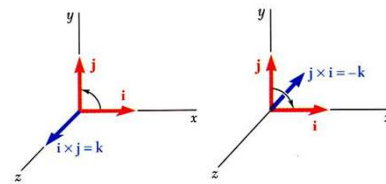
7/69

Vector Mechanics for Engineers: Statics

ضرب برداری: مؤلفه‌های متعامد

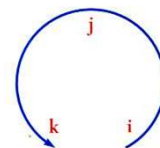
• ضرب برداری بردارهای یکه کارترین

$$\begin{aligned} \vec{i} \times \vec{i} &= 0 & \vec{j} \times \vec{i} &= -\vec{k} & \vec{k} \times \vec{i} &= \vec{j} \\ \vec{i} \times \vec{j} &= \vec{k} & \vec{j} \times \vec{j} &= 0 & \vec{k} \times \vec{j} &= -\vec{i} \\ \vec{i} \times \vec{k} &= -\vec{j} & \vec{j} \times \vec{k} &= \vec{i} & \vec{k} \times \vec{k} &= 0 \end{aligned}$$



• ضرب برداری برحسب مؤلفه‌های کارترین متعامد

$$\begin{aligned} \vec{V} &= (P_x \vec{i} + P_y \vec{j} + P_z \vec{k}) \times (Q_x \vec{i} + Q_y \vec{j} + Q_z \vec{k}) \\ &= (P_y Q_z - P_z Q_y) \vec{i} + (P_z Q_x - P_x Q_z) \vec{j} \\ &\quad + (P_x Q_y - P_y Q_x) \vec{k} \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} \end{aligned}$$



گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2007 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

7/69

ضرب برداری بردارها

Cartesian Vector Formulation

For element **i**: $\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \mathbf{i}(A_y B_z - A_z B_y)$

For element **j**: $\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = -\mathbf{j}(A_x B_z - A_z B_x)$

For element **k**: $\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \mathbf{k}(A_x B_y - A_y B_x)$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_y B_z - A_z B_y)\mathbf{i} - (A_x B_z - A_z B_x)\mathbf{j} + (A_x B_y - A_y B_x)\mathbf{k}$$

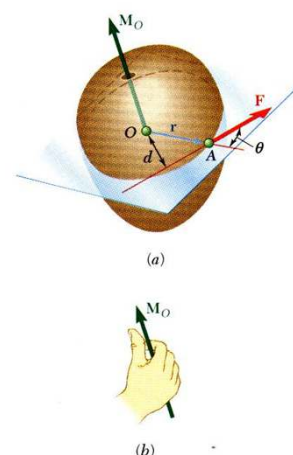
گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

۹/69

Vector Mechanics for Engineers: Statics

ممان یک نیرو حول یک نقطه

- یک بردار نیرو بر حسب مقدار و جهتش تعریف می‌شود. اثرش روی جسم صلب همچنین به محل اثر آن بستگی دارد.
- ممان نیروی F حول O به شکل $\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$ تعریف می‌شود.
- بردار ممان M_O عمود است به صفحه‌ای که شامل نقطه O و نیروی F است. $M_O = rF \sin \theta = Fd$
- مقدار M_O سنج‌های از تمایل نیرو به چرخاندن جسم حول محوری در راستای M_O است.
- d فاصله عمودی بین خط اثر نیرو و نقطه O است. جهت ممان از قاعده دست راست به دست می‌آید.
- هر نیروی F' که مقدار و جهتش مانند F باشد در صورتی **معادل** آن است که راستایش نیز با F یکسان باشد که ممان مشابهی بوجود آورد.



گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2007 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

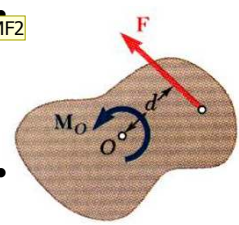
۱۰/69

Vector Mechanics for Engineers: Statics

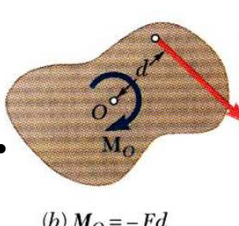
ممان مثبت و منفی یک نیرو حول یک نقطه

MF2 سازه‌ای دو بعدی که طول و عرض دارد ولی عمق یا ضخامت آن قابل چشمپوشی است در نظر بگیرید که نیرویی در صفحه سازه به آن وارد می‌شود.

- صفحه سازه شامل نقطه O و نیروی F است. ممان نیروی M_O عمود بر صفحه است.
- اگر نیرو بخواهد سازه را پادساعتگرد بچرخاند، جهت بردار ممان به طرف خارج از صفحه سازه و مقدار آن **مثبت** است.
- اگر نیرو بخواهد سازه را ساعتگرد بچرخاند، جهت بردار ممان به طرف داخل صفحه سازه و مقدار آن **منفی** است.



(a) $M_O = +Fd$

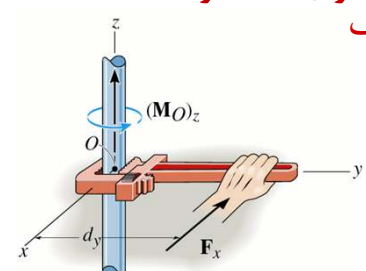


(b) $M_O = -Fd$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری
© 2007 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. ۱۱/69

ممان یک نیرو- رابطه سازی اسکالر

محورهای مختلف



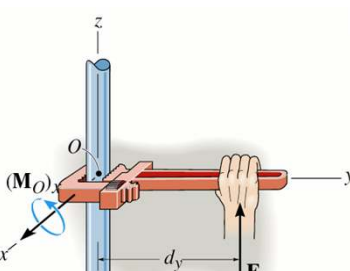
گشتاور (Torque)

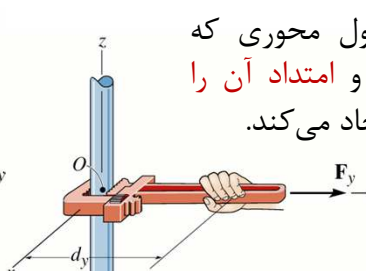
M_{O_z} (Moment) ممان

ممان‌ها بردارند

مقدار $(M_O)_z = F_x d_y$ ، بازوی ممان d_y

آیا وقتی نیرو در جهت y باشد، ممانی ایجاد می‌کند؟





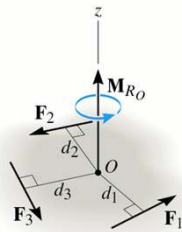
خیر، زیرا نیرو حول محوری که موازی نیرو نباشد و امتداد آن را قطع نکند ممان ایجاد می‌کند.

۱۲/69

Slide 11

MF2 breadth: width, span
My Friend ۱۹/۰۶/۶۰۰۹ :

قضیه وارینون: ممان برآیند نیروهای هم صفحه

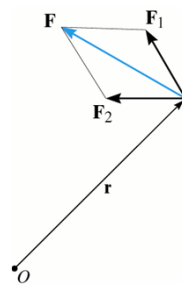


- ممان برآیند چند نیروی واقع در یک صفحه حول یک نقطه مانند O برابر است با مجموع ممان‌های آن نیروها حول همان نقطه

$$\mathbf{M}_{R_o} = \sum \mathbf{F}_i d_i$$

$$\vec{r} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots) = \vec{r} \times \vec{F}_1 + \vec{r} \times \vec{F}_2 + \dots$$

$$\mathbf{M}_o = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r} \times \mathbf{F}_2 = \mathbf{r} \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

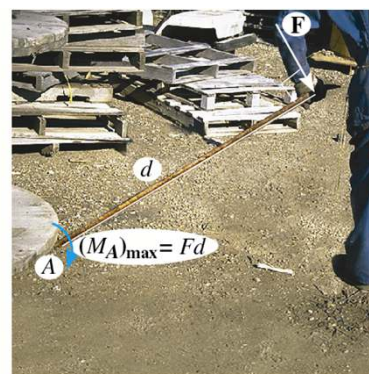
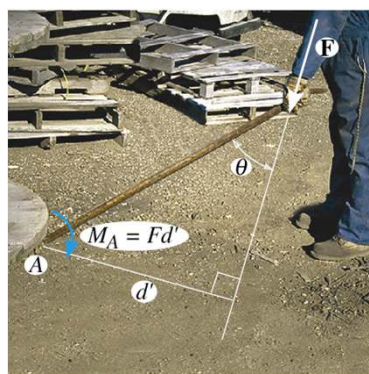


- قضیه وارینون امکان جایگزینی محاسبه مستقیم ممان نیروی F با ممان دو یا چند مؤلفه نیروی F را فراهم می‌کند.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

۱۳/69

ممان یک نیرو- رابطه سازی اسکالر



ممان ماکزیمم وقتی راستای نیرو بر میله عمود باشد بوجود می‌آید.

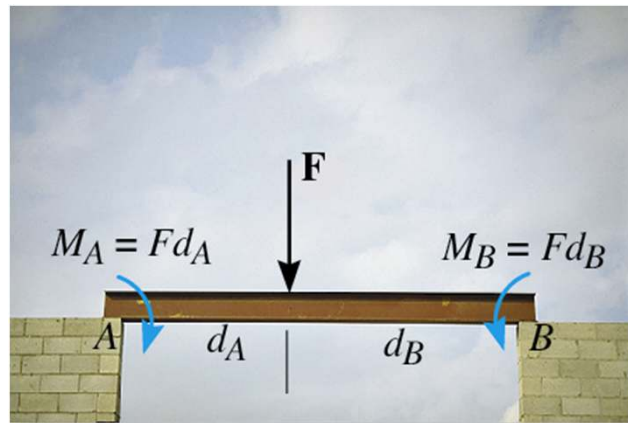
گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

۱۴/69

ممان یک نیرو- رابطه سازی اسکالر

ممان‌ها همیشه باعث حرکت نمی‌شوند

منظور ممان نیروی F حول نقاط A و B است.

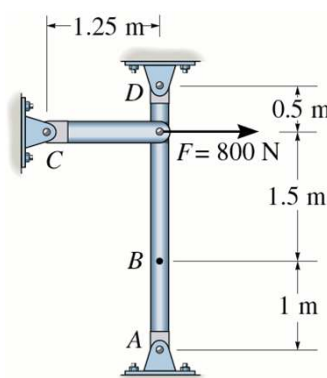
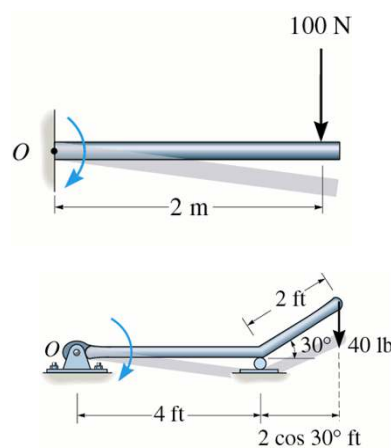


گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

۱۵/۶۹

ممان یک نیرو- رابطه سازی اسکالر

ممان یک نیرو حول نقاط مختلف



ممان نیروی F حول:

$$M_C = 0$$

$$M_D = 800(0.5)$$

$$M_B = -800(1.5)$$

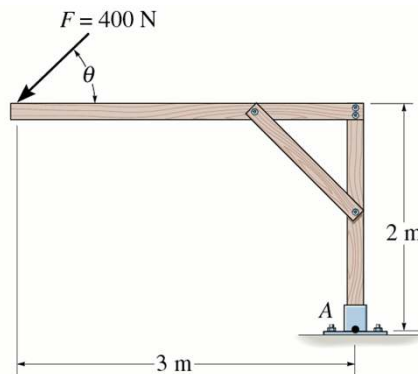
$$M_A = -800(2.5)$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

۱۶/۶۹

مسئله نمونه 4.4

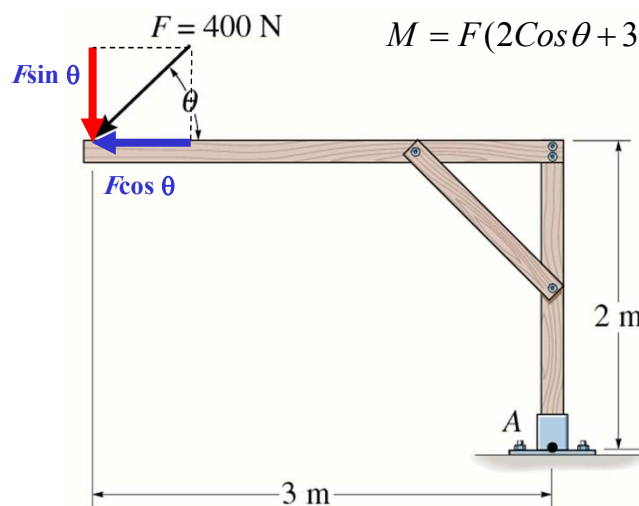
ممان نیروی F حول نقطه A را به عنوان تابعی از θ به دست آورید. مقدار M را بر حسب θ برای $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ رسم کنید. ممان ماکزیمم و مینیمم را به دست آورید.



گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

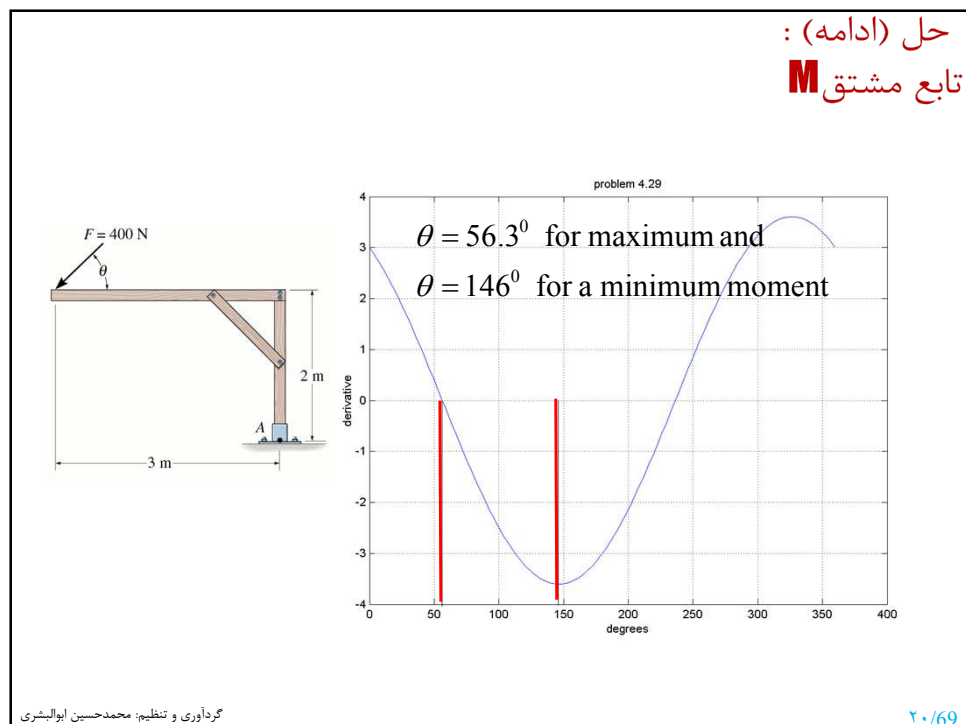
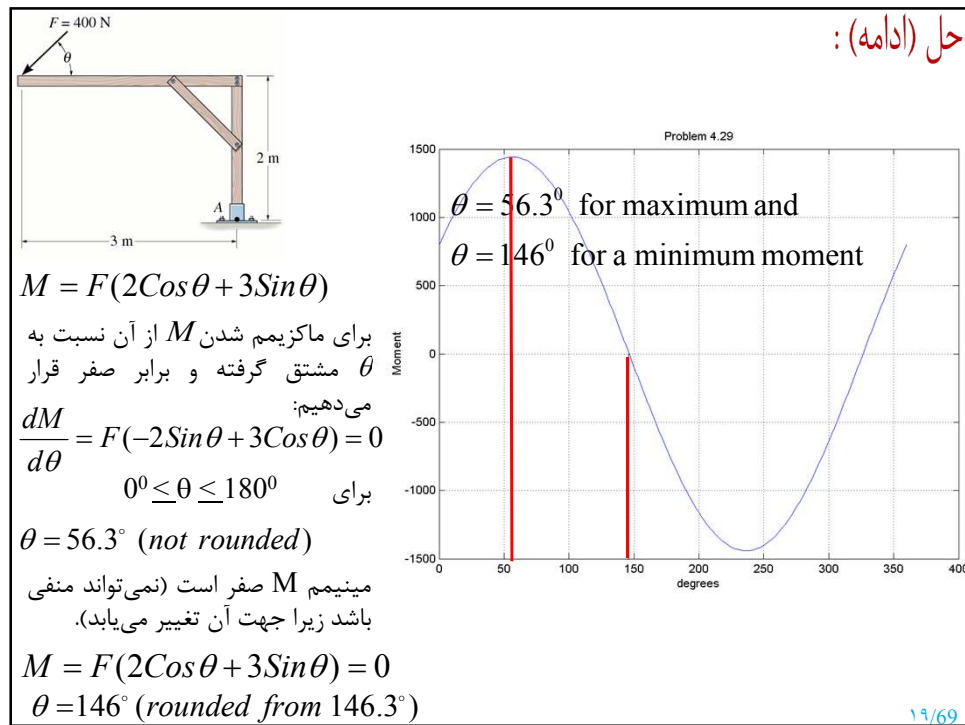
۱۷/۶۹

حل:

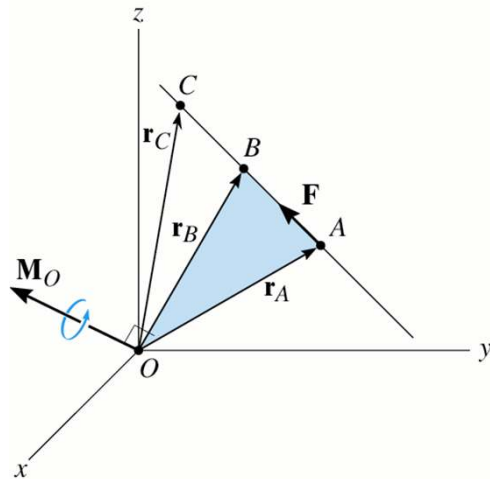


گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

۱۸/۶۹



ممان یک نیرو- رابطه سازی برداری انتقال پذیری



$$\begin{aligned} \mathbf{M}_O &= \mathbf{r}_A \times \mathbf{F} \\ &= \mathbf{r}_B \times \mathbf{F} \\ &= \mathbf{r}_C \times \mathbf{F} \end{aligned}$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

۲۱/69

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مؤلفه‌های متعامد ممان یک نیرو

ممان $\mathbf{F}$ حول نقطه B

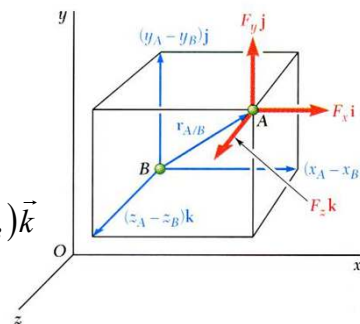
$$\vec{M}_B = \vec{r}_{A/B} \times \vec{F} = \vec{BA} \times \vec{F}$$

$$\vec{r}_{A/B} = \vec{r}_A - \vec{r}_B = \vec{BA}$$

$$= (x_A - x_B)\vec{i} + (y_A - y_B)\vec{j} + (z_A - z_B)\vec{k}$$

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$$

$$\vec{M}_B = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ (x_A - x_B) & (y_A - y_B) & (z_A - z_B) \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$



گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2007 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

۲۲/69

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مؤلفه‌های متعامد ممان یک نیرو

برای سازه‌های دوبعدی

$$\vec{M}_O = (xF_y - yF_x)\vec{k}$$

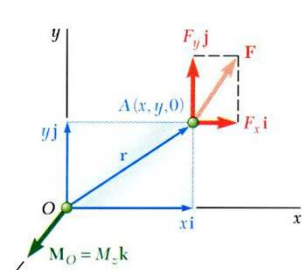
$$M_O = M_Z$$

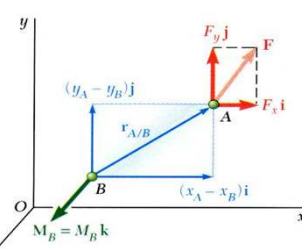
$$= xF_y - yF_x$$

$$\vec{M}_O = [(x_A - x_B)F_y - (y_A - y_B)F_x]\vec{k}$$

$$M_O = M_Z$$

$$= (x_A - x_B)F_y - (y_A - y_B)F_x$$

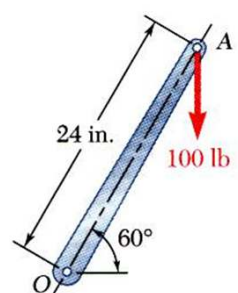




گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری
© 2007 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. ۲۳/۶۹

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مسئله نمونه 3.1



یک نیروی 100-lb عمودی به انتهای اهرمی که به محوری در O متصل است اثر می‌کند.

مطلوب است:

(الف) ممان نیرو حول نقطه O،

(ب) نیروی افقی که در A اثر کند و ممان مشابهی داشته باشد،

(ج) کمترین نیرویی که بتوان در A وارد کرد که ممان مشابهی داشته باشد،

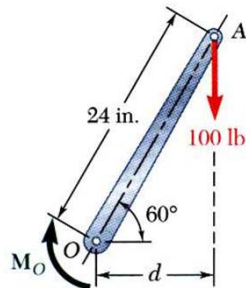
(د) محل نیروی عمودی 240-lb که ممان مشابهی داشته باشد،

(ه) آیا هیچ یک از نیروهایی که در ب، ج و د به دست آمدند با نیروی اصلی معادلند؟

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری
© 2007 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. ۲۴/۶۹

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مسئله نمونه 3.1 (ادامه)



الف) مممان حول O برابر است با حاصلضرب نیرو در فاصله عمودی بین خط اثر نیرو و O . از آنجا که نیرو تمایل به چرخش ساعتگرد اهرم دارد، بردار مممان به طرف داخل صفحه کاغذ (منفی) است، ولی در اینجا برای سادگی علامت آن را نمی‌گذاریم.

$$M_O = Fd$$

$$d = (24 \text{ in.}) \cos 60^\circ = 12 \text{ in.}$$

$$M_O = (100 \text{ lb})(12 \text{ in.})$$

$$M_O = 1200 \text{ lb} \cdot \text{in}$$

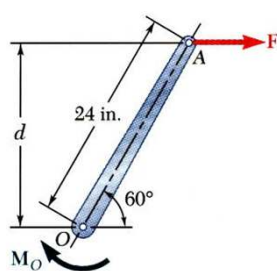
گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2007 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

۲۵/۶۹

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مسئله نمونه 3.1 (ادامه)



ب) نیروی افقی در A که مممان مشابهی داشته باشد.

$$d = (24 \text{ in.}) \sin 60^\circ = 20.8 \text{ in.}$$

$$M_O = Fd$$

$$1200 \text{ lb} \cdot \text{in.} = F(20.8 \text{ in.})$$

$$F = \frac{1200 \text{ lb} \cdot \text{in.}}{20.8 \text{ in.}}$$

$$F = 57.7 \text{ lb}$$

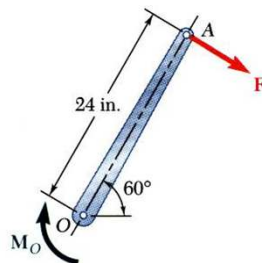
گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2007 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

۲۶/۶۹

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مسئله نمونه 3.1 (ادامه)



ج) حداقل نیرو در A که مماس مشابهی تولید کند وقتی اتفاق می افتد که فاصله عمودی ماکزیمم باشد (وقتی که F به OA عمود باشد).

$$M_O = Fd$$

$$1200 \text{ lb} \cdot \text{in.} = F(24 \text{ in.})$$

$$F = \frac{1200 \text{ lb} \cdot \text{in.}}{24 \text{ in.}}$$

$$F = 50 \text{ lb}$$

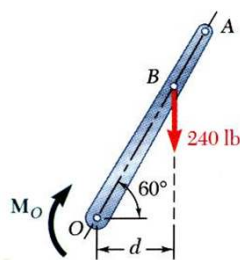
گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2007 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

۲۷/69

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مسئله نمونه 3.1 (ادامه)



د) برای به دست آوردن محل اثر نیروی 240 lb عمودی که مماس مشابهی داشته باشد، داریم:

$$M_O = Fd$$

$$1200 \text{ lb} \cdot \text{in.} = (240 \text{ lb})d$$

$$d = \frac{1200 \text{ lb} \cdot \text{in.}}{240 \text{ lb}} = 5 \text{ in.}$$

$$OB \cos 60^\circ = 5 \text{ in.}$$

$$OB = 10 \text{ in.}$$

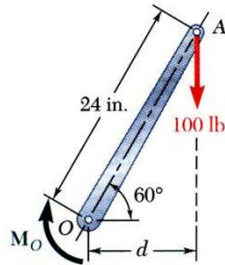
گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2007 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

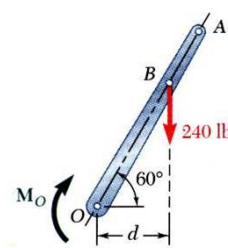
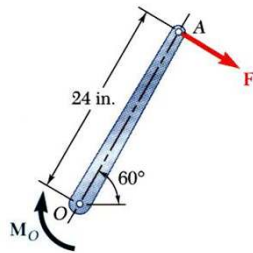
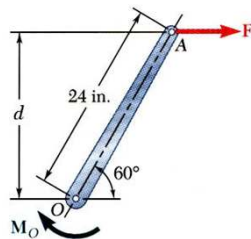
۲۸/69

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مسئله نمونه 3.1 (ادامه)



ه) هرچند نیروهایی که در قسمت ب، ج و د به دست آمد ممان‌های مشابهی مانند نیروی 100 lb دارند ولی هیچکدام از آن‌ها مقدار و جهت و یا خط اثر یکسانی ندارند. بنابراین **هیچکدام** از آن‌ها معادل نیروی 100 lb نیستند.



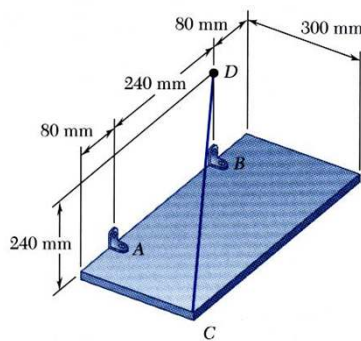
گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2007 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

۲۹/۶۹

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مسئله نمونه 3.4



صفحه‌ای مستطیلی به وسیله دو بست در A و B و سیم CD مهار شده است. اگر کشش در سیم 200 N باشد، ممان آن را حول نقطه A به دست آورید.

حل:

ممان M_A نیروی F که به وسیله سیم وارد می‌شود را می‌توان از ضرب برداری به دست آورد.

$$\vec{M}_A = \vec{r}_{C/A} \times \vec{F}$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2007 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

۳۰/۶۹

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مسئله نمونه 3.4 (ادامه)

حل:

$$\vec{M}_A = \vec{r}_{C/A} \times \vec{F}$$

$$\vec{r}_{C/A} = \vec{r}_C - \vec{r}_A = (0.3\text{ m})\vec{i} + (0.08\text{ m})\vec{k}$$

$$\vec{F} = F\vec{\lambda} = (200\text{ N})\frac{\vec{r}_{D/C}}{r_{D/C}}$$

$$= (200\text{ N})\frac{-(0.3\text{ m})\vec{i} + (0.24\text{ m})\vec{j} - (0.32\text{ m})\vec{k}}{\sqrt{(0.3)^2 + (0.24)^2 + (0.32)^2}\text{ m}}$$

$$= (200\text{ N})\frac{-(0.3\text{ m})\vec{i} + (0.24\text{ m})\vec{j} - (0.32\text{ m})\vec{k}}{0.5\text{ m}}$$

$$= -(120\text{ N})\vec{i} + (96\text{ N})\vec{j} - (128\text{ N})\vec{k}$$

$$\vec{M}_A = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0.3 & 0 & 0.08 \\ -120 & 96 & -128 \end{vmatrix}$$

$$\vec{M}_A = -(7.68\text{ N}\cdot\text{m})\vec{i} + (28.8\text{ N}\cdot\text{m})\vec{j} + (28.8\text{ N}\cdot\text{m})\vec{k}$$

© 2007 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. ۳۱/69

Vector Mechanics for Engineers: Statics

کاربردهای ضرب اسکالر دو بردار

- زاویه بین دو بردار:

$$\vec{P} \cdot \vec{Q} = PQ \cos \theta = P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z$$

$$\cos \theta = \frac{P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z}{PQ}$$
- تصویر یک بردار روی یک محور:

$$P_{OL} = P \cos \theta = \text{projection of } P \text{ along } OL$$

$$\vec{P} \cdot \vec{Q} = PQ \cos \theta$$

$$\frac{\vec{P} \cdot \vec{Q}}{Q} = P \cos \theta = P_{OL}$$
- برای یک محور که با بردار یکه تعریف شده باشد:

$$P_{OL} = \vec{P} \cdot \vec{\lambda}$$

$$= P_x \cos \theta_x + P_y \cos \theta_y + P_z \cos \theta_z$$

© 2007 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. ۳۲/69

Vector Mechanics for Engineers: Statics

ضرب سه گانه مخلوط سه بردار

- ضرب سه گانه مخلوط سه بردار
- $\vec{S} \cdot (\vec{P} \times \vec{Q}) = \text{scalar result}$
- کاربرد:** محاسبه مؤلفه بردار ممان روی یک محور
- شش ضرب سه گانه مخلوط زیر از $\vec{S}$, $\vec{P}$ و $\vec{Q}$ مقدار مساوی دارند ولی علامت آن‌ها متفاوت است. اگر بردار اول برود آخر علامت هم تغییر نمی‌کند.
- $\vec{S} \cdot (\vec{P} \times \vec{Q}) = \vec{P} \cdot (\vec{Q} \times \vec{S}) = \vec{Q} \cdot (\vec{S} \times \vec{P})$
- $= -\vec{S} \cdot (\vec{Q} \times \vec{P}) = -\vec{P} \cdot (\vec{S} \times \vec{Q}) = -\vec{Q} \cdot (\vec{P} \times \vec{S})$
- محاسبه مقدار ضرب سه گانه مخلوط
- $\vec{S} \cdot (\vec{P} \times \vec{Q}) = S_x (P_y Q_z - P_z Q_y) - S_y (P_x Q_z - P_z Q_x) + S_z (P_x Q_y - P_y Q_x)$
- $$= \begin{vmatrix} S_x & S_y & S_z \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix}$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2007 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

۳۳/۶۹

Vector Mechanics for Engineers: Statics

ممان یک نیرو حول یک محور

- ممان M_O نیروی $\vec{F}$ که در نقطه A اثر می‌کند حول نقطه O عبارت است از:
- $\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$
- مؤلفه‌های ممان $\vec{F}$ حول محورهای مختصات
- $M_x = yF_z - zF_y$
- $M_y = zF_x - xF_z$
- $M_z = xF_y - yF_x$
- ممان اسکالر M_{OL} حول محور OL (که از O می‌گذرد) عبارت است از تصویر بردار ممان $\vec{M}_O$ روی آن محور
- $M_{OL} = \vec{\lambda} \cdot \vec{M}_O = \vec{\lambda} \cdot (\vec{r} \times \vec{F})$
- نکته:** جهت $\vec{\lambda}$ اختیاری است، زیرا ضرب نقطه‌ای مقدار و جهت M_{OL} را می‌دهد. اگر M_{OL} مثبت باشد جهت آن به طرف $\vec{\lambda}$ و اگر M_{OL} منفی باشد، جهت آن مخالف $\vec{\lambda}$ است.

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$$

$$\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$$

© 2007 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

۳۴/۶۹

Slide 33

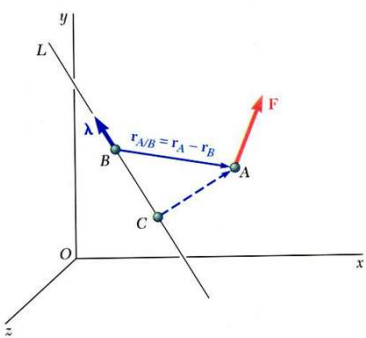
MF4

In triple products if we put the last vector in the first the sign is not changed, otherwise (interchange the first and the second) the sign is changed.

My Friend $\hat{x} \cdot \hat{y} / \hat{y} \cdot \hat{x} :$

Vector Mechanics for Engineers: Statics

ممان یک نیرو حول یک محور



• ممان یک نیرو حول یک محور اختیاری که از O نمی‌گذرد:

$$M_{BL} = \vec{\lambda} \cdot \vec{M}_B$$

$$= \vec{\lambda} \cdot (\vec{r}_{A/B} \times \vec{F})$$

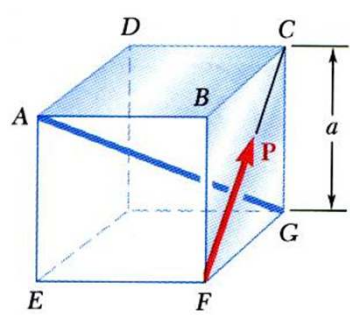
$$\vec{r}_{A/B} = \vec{r}_A - \vec{r}_B$$

• نتیجه مستقل از نقطه B در امتداد محور مورد نظر است.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری
© 2007 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. ۳۵/69

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مثال نمونه 3.5



نیروی P بر یک مکعب مانند شکل اثر می‌کند. مطلوب است ممان P :

(الف) حول A

(ب) حول لبه AB

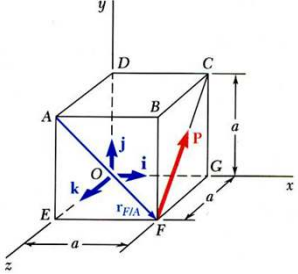
(ج) حول قطر AG و

(د) فاصله عمودی بین FC و AG

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری
© 2007 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. ۳۶/69

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مثال نمونه 3.5 (ادامه)



• ممات P حول A:

$$\vec{M}_A = \vec{r}_{F/A} \times \vec{P}$$

$$\vec{r}_{F/A} = a\vec{i} - a\vec{j} = a(\vec{i} - \vec{j})$$

$$\vec{P} = (P/2)(\sqrt{2}\vec{j} - \sqrt{2}\vec{k}) = P\sqrt{2}(\vec{j} - \vec{k})/2$$

$$\vec{M}_A = a(\vec{i} - \vec{j}) \times P\sqrt{2}(\vec{j} - \vec{k})/2$$

$$\boxed{\vec{M}_A = (aP/\sqrt{2})(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})}$$



• ممات P حول AB:

$$M_{AB} = \vec{i} \cdot \vec{M}_A$$

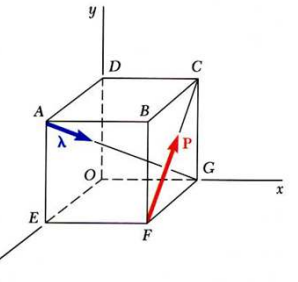
$$= \vec{i} \cdot (aP/\sqrt{2})(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$$

$$\boxed{M_{AB} = aP/\sqrt{2}}$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری
© 2007 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. ۳۷/69

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مثال نمونه 3.5 (ادامه)



• ممات P حول قطر AG:

$$M_{AG} = \vec{\lambda} \cdot \vec{M}_A$$

$$\vec{\lambda} = \frac{\vec{r}_{G/A}}{r_{G/A}} = \frac{a\vec{i} - a\vec{j} - a\vec{k}}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i} - \vec{j} - \vec{k})$$

$$\vec{M}_A = \frac{aP}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$$

$$M_{AG} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}) \cdot \frac{aP}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$$

$$= \frac{aP}{\sqrt{6}}(1 - 1 - 1)$$

$$\boxed{M_{AG} = -\frac{aP}{\sqrt{6}}}$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری
© 2007 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. ۳۸/69

Vector Mechanics for Engineers: Statics

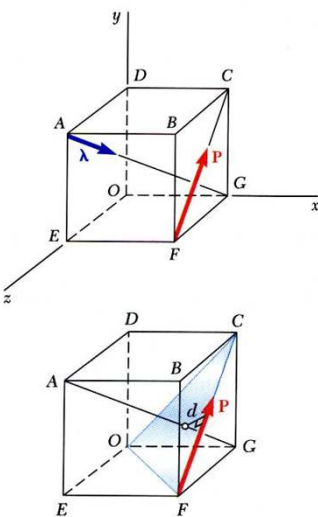
مثال نمونه 3.5 (ادامه)

• فاصله عمودی بین AG و FC :

$$\vec{P} \cdot \vec{\lambda} = \frac{P}{\sqrt{2}} (\vec{j} - \vec{k}) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} (\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}) = \frac{P}{\sqrt{6}} (0 - 1 + 1) = 0$$

• بنابراین، P بر AG عمود است.

$$|M_{AG}| = \frac{aP}{\sqrt{6}} = Pd$$

$$d = \frac{a}{\sqrt{6}}$$


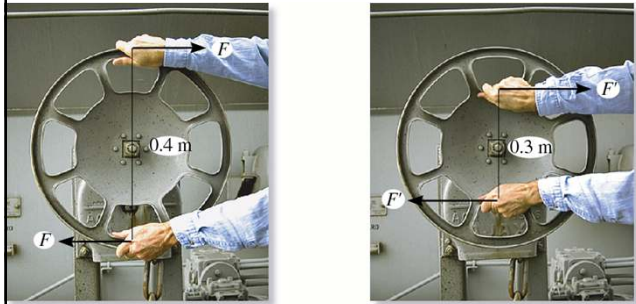
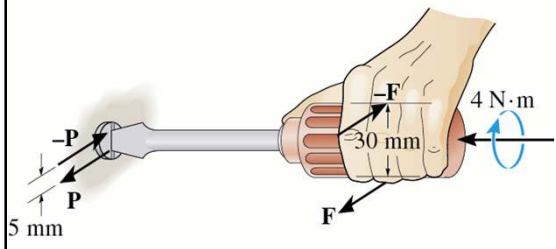
گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

© 2007 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

۳۹/۶۹

ممان یک کوپل

مثال

$$M_{\text{couple}} = (M_z)_{\text{handle}} = Fd_{\text{handle}} = 4$$

$$F = \frac{4}{d_{\text{handle}}} = \frac{4}{.03} = 133 \text{ N}$$

$$M_{\text{couple}} = (M_z)_{\text{blade}} = Fd_{\text{blade}} = 4$$

$$P = \frac{4}{d_{\text{blade}}} = \frac{4}{.005} = 800 \text{ N}$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

۴۰/۶۹

Vector Mechanics for Engineers: Statics

ممان یک کوپل

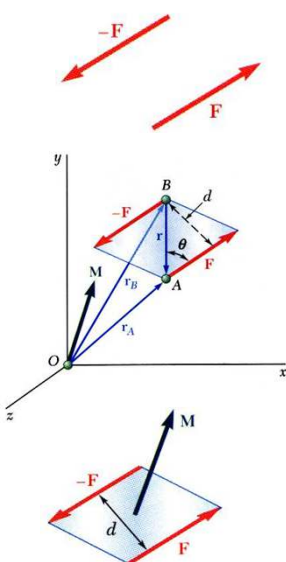
- دو نیروی F و $-F$ که مقدار آنها برابر و راستاهای آنها موازی و جهت آنها مخالف یکدیگر است را یک **کوپل (زوج نیرو)** می‌گویند.
- ممان یک کوپل عبارت است از:

$$\vec{M} = \vec{r}_A \times \vec{F} + \vec{r}_B \times (-\vec{F})$$

$$= (\vec{r}_A - \vec{r}_B) \times \vec{F}$$

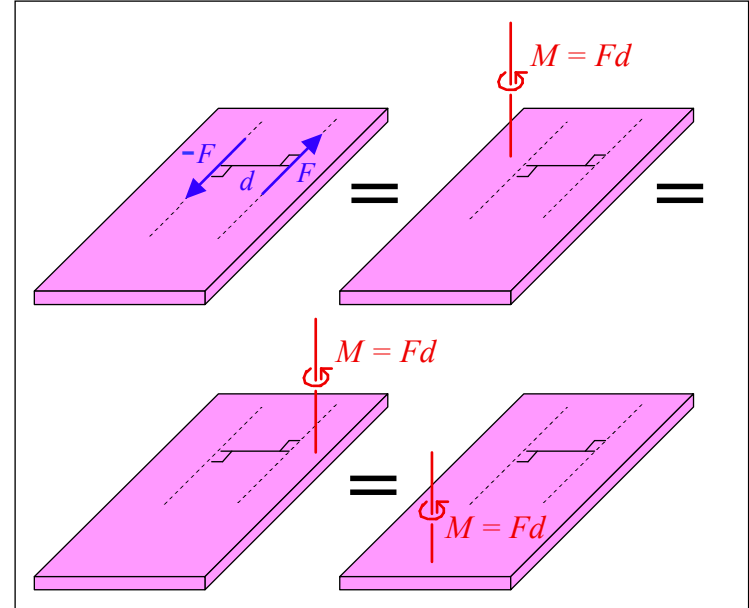
$$= \vec{r} \times \vec{F}$$

$$M = rF \sin \theta = Fd$$
- بردار ممان یک **کوپل**، مستقل از محل مرکز مختصات است یعنی یک **بردار آزاد** است و می‌تواند در هر نقطه‌ای اثر کند که همه آنها اثرات مشابهی روی جسم دارند.
- **ممان کوپل** را گاهی **کوپل** نیز می‌گویند.



© 2007 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 1/69

همه ممان‌های نشان داده شده معادل کوپل است.



2/69

Vector Mechanics for Engineers: Statics

ممان یک کوپل

دو کوپل ممان‌های یکسانی دارند اگر:

۱. رابطه مقابل برقرار باشد $F_1 d_1 = F_2 d_2$
۲. دو کوپل در صفحات موازی قرار گرفته باشند
۳. دو کوپل هم جهت باشند یا تمایل به چرخش در یک جهت خاص را در جسم باعث شوند.

۴۳/69

© 2007 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

Vector Mechanics for Engineers: Statics

جمع کوپل‌ها

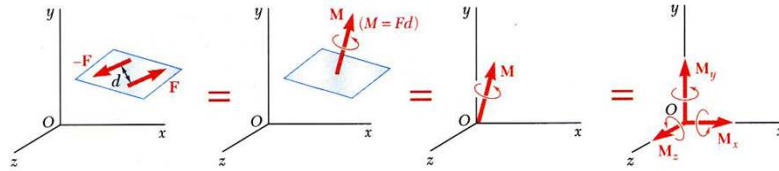
- دو صفحه متقاطع P_1 و P_2 را در نظر بگیرید که در هر کدام یک کوپل وجود دارد.
- $\vec{M}_1 = \vec{r} \times \vec{F}_1$ in plane P_1
- $\vec{M}_2 = \vec{r} \times \vec{F}_2$ in plane P_2
- برآیند بردارها نیز تشکیل یک کوپل می‌دهند:
- $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{R} = \vec{r} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2)$
- با استفاده از قضیه وارینتون داریم:
- $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}_1 + \vec{r} \times \vec{F}_2 = \vec{M}_1 + \vec{M}_2$
- مجموع دو کوپل نیز یک کوپل است که برابر است با جمع برداری دو کوپل

۴۴/69

© 2007 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

Vector Mechanics for Engineers: Statics

کوپل‌ها را می‌توان با بردار نشان داد



• یک کوپل را می‌توان با یک بردار که مقدار و جهت آن برابر با ممان کوپل است نشان داد.

• **بردارهای کوپل** از قانون جمع بردارها تبعیت می‌کنند.

• بردارهای کوپل بردارهای آزادند، یعنی محل اثر آن‌ها مهم نیست. ممان یک کوپل در همه نقاط فضا یکسان است. خواه آن نقطه روی سازه باشد، خواه نباشد.

• بردارهای کوپل را هم می‌توان به مؤلفه‌هایی تجزیه کرد.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2007 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

۴۵/69

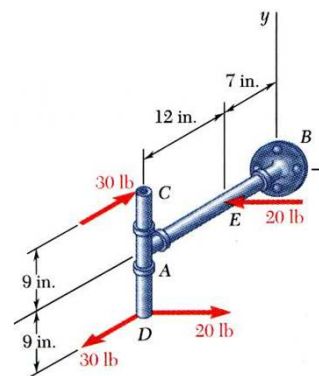
Vector Mechanics for Engineers: Statics

مسئله نمونه 3.6

حل:

• اگر دو نیروی مساوی و مختلف‌الجهت 20 lb را در جهت $\pm x$ در نقطه A وارد کنیم، سه ممان خواهیم داشت که مؤلفه‌های ممان به راحتی محاسبه می‌شود.

• یا می‌توان مجموع ممان‌های چهار نیرو را حول یک نقطه اختیاری به دست آوریم. نقطه D نقطه مناسبی است زیرا فقط دو نیرو حول آن ممان غیرصفر دارند.



مؤلفه‌های کوپلی که معادل سیستم کوپل‌های نشان داده شده است به دست آورید.

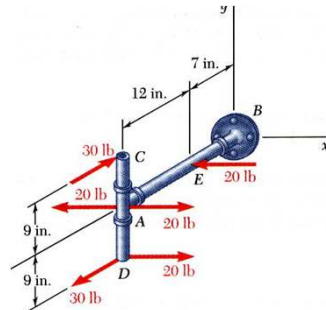
گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2007 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

۴۶/69

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مسئله نمونه 3.6 (ادامه)



- دو نیروی مساوی و مختلف‌الجهت 20 lb را در جهت $\pm x$ در نقطه A وارد می‌کنیم.
- سه کوپل را می‌توان با سه بردار کوپل نشان داد.

$$M_x = -(30 \text{ lb})(18 \text{ in.}) = -540 \text{ lb} \cdot \text{in.}$$

$$M_y = +(20 \text{ lb})(12 \text{ in.}) = +240 \text{ lb} \cdot \text{in.}$$

$$M_z = +(20 \text{ lb})(9 \text{ in.}) = +180 \text{ lb} \cdot \text{in.}$$

$$\vec{M} = -(540 \text{ lb} \cdot \text{in.})\vec{i} + (240 \text{ lb} \cdot \text{in.})\vec{j} + (180 \text{ lb} \cdot \text{in.})\vec{k}$$

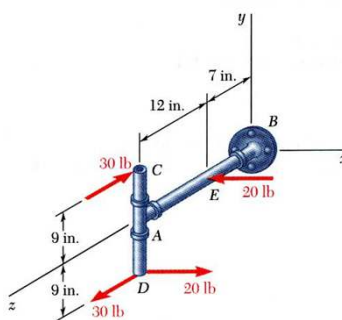
گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2007 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

4/69

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مسئله نمونه 3.6 (ادامه)



- یا مجموع ممان‌های چهار نیرو را حول نقطه D به دست می‌آوریم.
- تنها نیروهای وارد بر نقاط C و E حول D ممان دارند.

$$\vec{M} = \vec{M}_D = (18 \text{ in.})\vec{j} \times (-30 \text{ lb})\vec{k} + [(9 \text{ in.})\vec{j} - (12 \text{ in.})\vec{k}] \times (-20 \text{ lb})\vec{i}$$

$$\vec{M} = -(540 \text{ lb} \cdot \text{in.})\vec{i} + (240 \text{ lb} \cdot \text{in.})\vec{j} + (180 \text{ lb} \cdot \text{in.})\vec{k}$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2007 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

4/69

Vector Mechanics for Engineers: Statics

تجزیه یک نیرو به یک نیرو در نقطه O و یک کوپل

- اکنون سه نیرو را با یک سیستم معادل از یک بردار نیرو و یک جایگزین کوپل، یعنی یک سیستم نیرو-کوپل.
- دو بردار نیروی مساوی و مختلف‌الجهت را در نقطه O اعمال می‌کنیم که اثر خاصی روی جسم نمی‌گذارند.
- بردار نیروی F را نمی‌توان بسادگی به نقطه O انتقال داد بدون این‌که ببینیم آیا اثرش روی جسم تغییر می‌کند یا خیر.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2007 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

۴۹/69

Vector Mechanics for Engineers: Statics

تجزیه یک نیرو به یک نیرو در نقطه O و یک کوپل

- انتقال F از A به نقطه دیگری مانند O' نیاز به اضافه کردن بردار کوپل دیگری مانند $M_{O'}$ است.
- ممات F حول O و O' با رابطه زیر به هم مربوط می‌شوند:
- انتقال یک سیستم نیرو-کوپل از O به O' نیاز به افزودن ممات نیرو حول O به ممات حول O' است.

$$\vec{M}_{O'} = \vec{r}' \times \vec{F}$$

$$\vec{M}_{O'} = \vec{r} \times \vec{F} = (\vec{r} + \vec{s}) \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F} + \vec{s} \times \vec{F}$$

$$= \vec{M}_O + \vec{s} \times \vec{F}$$

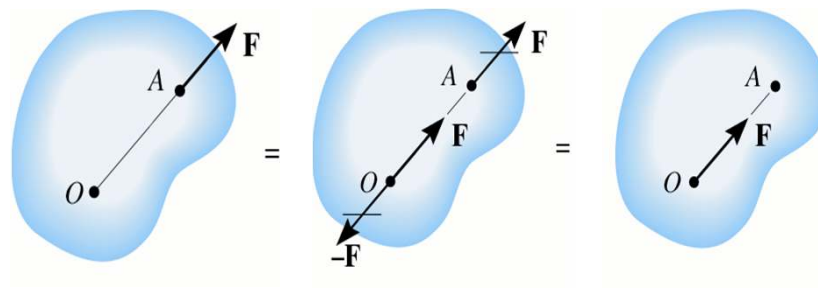
گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2007 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

۵۰/69

سیستم معادل

نقطه O روی خط اثر نیرو است

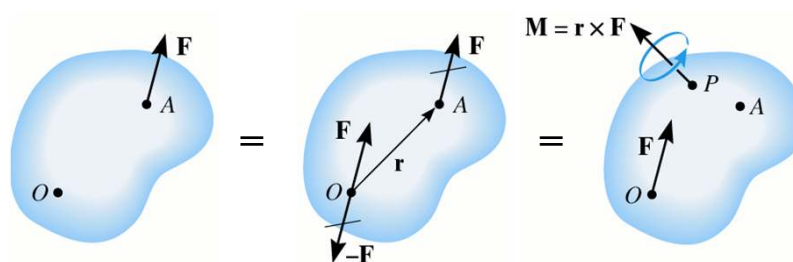


گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

۵۱/69

سیستم معادل

نقطه O روی خط اثر نیرو نیست



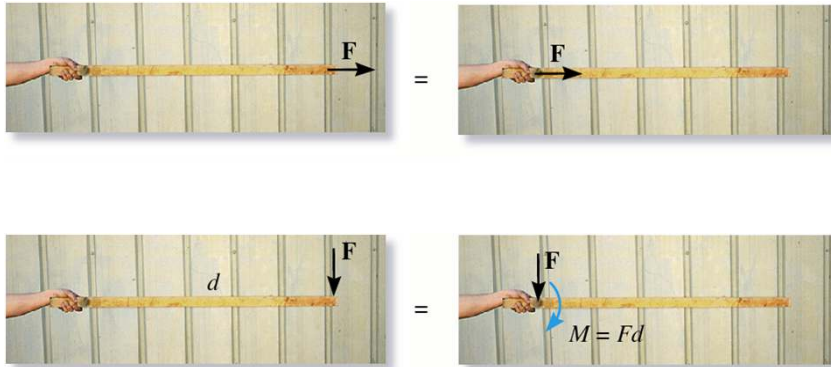
ممان بردار آزاد است و در هر نقطه
مانند P می تواند نشان داده شود.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

۵۲/69

سیستم معادل

خلاصه

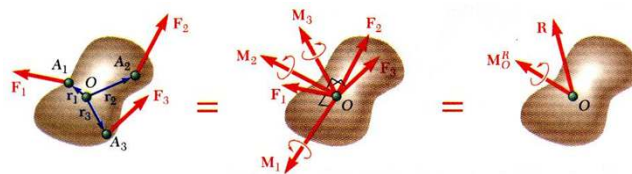


گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

۵۳/۶۹

Vector Mechanics for Engineers: Statics

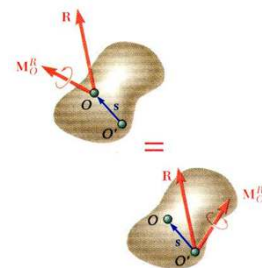
سیستم نیروهای کلی در فضای سه بعدی: کاهش به یک نیرو و کوپل



- یک سیستم نیرو را می‌توان با مجموعه‌هایی از نیرو-کوپل در یک نقطه مانند O جایگزین کرد.
- بردارهای نیرو و کوپل را با هم ترکیب می‌کنیم و به یک بردار نیروی برآیند و یک بردار ممان برآیند تبدیل می‌کنیم.

$$\vec{R} = \sum \vec{F} \quad \vec{M}_O^R = \sum (\vec{r} \times \vec{F})$$
- سیستم نیرو-کوپل در O را با اضافه کردن ممان R حول O' به O منتقل می‌کنیم.

$$\vec{M}_{O'}^R = \vec{M}_O^R + \vec{s} \times \vec{R}$$
- دو سیستم نیرو را در صورتی معادل می‌گوییم که بتوان آن‌ها را به یک سیستم نیرو-کوپل مشابهی تبدیل کرد.

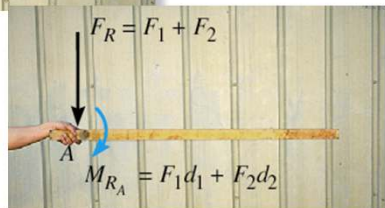
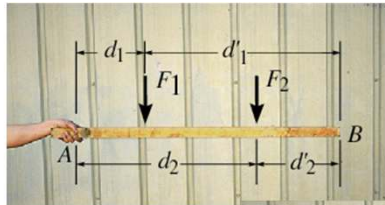


گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

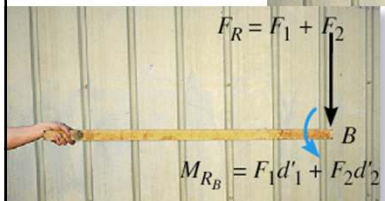
۵۴/۶۹

© 2007 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

برآیند یک سیستم نیرو - کوپل



معادل است با:



و معادل است با:

۵۵/69

Vector Mechanics for Engineers: Statics

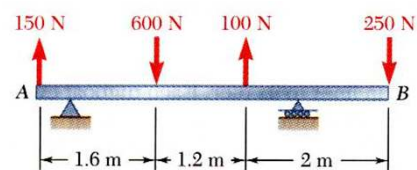
مسئله نمونه 3.8

حل:

الف) برآیند نیرویی را برای نیروهای نشان داده شده و برآیند ممان را برای ممان نیروها حول نقطه A محاسبه کنید.

ب) یک سیستم نیرو-کوپل معادل در B به دست آورید که معادل سیستم نیرو-کوپل در A باشد.

ج) محل اثر نیروی برآیند را چنان تعیین کنید که ممان آن حول A برابر با کوپل برآیند در A باشد.



برای تیر نشان داده شده، مجموعه نیروها را به الف) یک سیستم نیرو-کوپل معادل در A ، ب) یک سیستم نیرو-کوپل معادل در نقطه B ، و ج) یک نیروی معادل یا برآیند تبدیل نمایید.

دقت شود: از آنجا که عکس العمل تکیه گاه‌ها در نظر گرفته نشدند، سیستم داده شده **تعادل تیر** را تأمین نمی‌کند.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2007 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

۵۶/69

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مسئله نمونه 3.8 (ادامه)

حل:

نیروی برآیند و کوپل برآیند در A را محاسبه می‌کنیم.

$$\vec{R} = \sum \vec{F}$$

$$= (150 \text{ N})\vec{j} - (600 \text{ N})\vec{j} + (100 \text{ N})\vec{j} - (250 \text{ N})\vec{j}$$

$$\boxed{\vec{R} = -(600 \text{ N})\vec{j}}$$

$$\vec{M}_A^R = \sum (\vec{r} \times \vec{F})$$

$$= (1.6 \vec{i}) \times (-600 \vec{j}) + (2.8 \vec{i}) \times (100 \vec{j}) + (4.8 \vec{i}) \times (-250 \vec{j})$$

$$\boxed{\vec{M}_A^R = -(1880 \text{ N} \cdot \text{m})\vec{k}}$$

گرادآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

© 2007 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 69/69

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مسئله نمونه 3.8 (ادامه)

ب) یک سیستم نیرو-کوپل در B به دست می‌آوریم که معادل سیستم نیرو-کوپل در A باشد.

با انتقال سیستم نیرو-کوپل از A به B نیرو تغییری نمی‌کند.

$$\boxed{\vec{R} = -(600 \text{ N})\vec{j}}$$

کوپل در B برابر است با ممان سیستم نیرو-کوپل در نقطه A حول نقطه B.

$$\vec{M}_B^R = \vec{M}_A^R + \vec{r}_{A/B} \times \vec{R}$$

$$= -(1880 \text{ N} \cdot \text{m})\vec{k} + (-4.8 \text{ m})\vec{i} \times (-600 \text{ N})\vec{j}$$

$$= -(1880 \text{ N} \cdot \text{m})\vec{k} + (2880 \text{ N} \cdot \text{m})\vec{k}$$

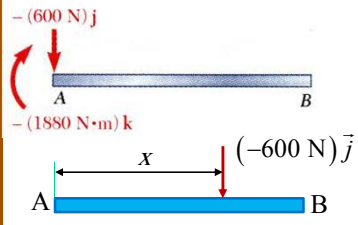
$$\boxed{\vec{M}_B^R = +(1000 \text{ N} \cdot \text{m})\vec{k}}$$

گرادآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

© 2007 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 69/69

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مسئله نمونه 3.8 (ادامه)



$-(600 \text{ N})\vec{j}$
 $-(1880 \text{ N}\cdot\text{m})\vec{k}$
 $(-600 \text{ N})\vec{j}$
 x

ج) برآیند سیستم نیروهای وارد معادل است با R و نقطه اثر آن باید طوری باشد که گشتاور R حول نقطه A برابر با $\vec{M}_A^R$ باشد.

$$\vec{r} \times \vec{R} = \vec{M}_A^R$$

$$x\vec{i} \times (-600 \text{ N})\vec{j} = -(1880 \text{ N}\cdot\text{m})\vec{k}$$

$$x = 3.13 \text{ m}$$

$\vec{R} = -(600 \text{ N})\vec{j}, x = 3.13 \text{ m}$

گرآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری
© 2007 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. ۹/69

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مسئله نمونه 3.10

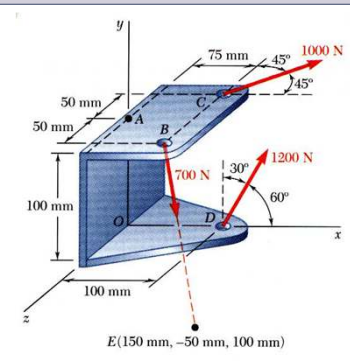
حل:

- بردارهای موقعیت نسبی نسبت به نقطه A را برای نقاط اعمال نیروهای کابل‌ها به دست می‌آوریم.
- نیروها را به مؤلفه‌های کارتیزین تجزیه می‌کنیم.
- نیروی معادل را محاسبه می‌کنیم.

$$\vec{R} = \sum \vec{F}$$

- کوپل معادل را محاسبه می‌کنیم.

$$\vec{M}_A^R = \sum (\vec{r} \times \vec{F})$$



سه کابل به یک بست متصل شده‌اند. نیروها را با یک سیستم نیرو-کوپل در A جایگزین کنید.

© 2007 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. ۱۰/69

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مسئله نمونه 3.10 (ادامه)

- نیروها را به مؤلفه‌های کارترین تجزیه می‌کنیم.

$$\vec{F}_B = (700 \text{ N})\vec{\lambda}$$

$$\vec{\lambda} = \frac{\vec{r}_{E/B}}{r_{E/B}} = \frac{75\vec{i} - 150\vec{j} + 50\vec{k}}{175}$$

$$= 0.429\vec{i} - 0.857\vec{j} + 0.289\vec{k}$$

$$\vec{F}_B = 300\vec{i} - 600\vec{j} + 200\vec{k} \text{ (N)}$$

$$\vec{F}_C = (1000 \text{ N})(\cos 45^\circ\vec{i} - \cos 45^\circ\vec{k})$$

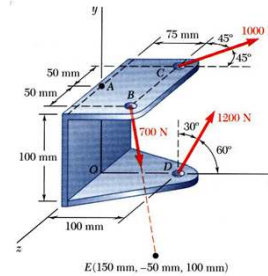
$$= 707\vec{i} - 707\vec{k} \text{ (N)}$$

$$\vec{F}_D = (1200 \text{ N})(\cos 60^\circ\vec{i} + \cos 30^\circ\vec{j})$$

$$= 600\vec{i} + 1039\vec{j} \text{ (N)}$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

© 2007 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.



حل:

- بردارهای موقعیت نسبی نسبت به نقطه A را به دست می‌آوریم.

$$\vec{r}_{B/A} = 0.075\vec{i} + 0.050\vec{k} \text{ (m)}$$

$$\vec{r}_{C/A} = 0.075\vec{i} - 0.050\vec{k} \text{ (m)}$$

$$\vec{r}_{D/A} = 0.100\vec{i} - 0.100\vec{j} \text{ (m)}$$

11/69

Vector Mechanics for Engineers: Statics

مسئله نمونه 3.10 (ادامه)

- نیروی معادل را محاسبه می‌کنیم.
- کوپل معادل را محاسبه می‌کنیم.

$$\vec{M}_A^R = \sum (\vec{r} \times \vec{F})$$

$$\vec{r}_{B/A} \times \vec{F}_B = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0.075 & 0 & 0.050 \\ 300 & -600 & 200 \end{vmatrix} = 30\vec{i} - 45\vec{k}$$

$$\vec{r}_{C/A} \times \vec{F}_C = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0.075 & 0 & -0.050 \\ 707 & 0 & -707 \end{vmatrix} = 17.68\vec{j}$$

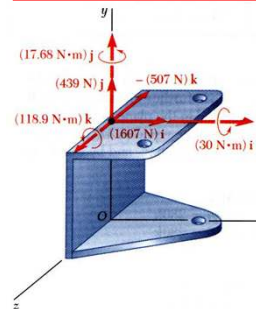
$$\vec{r}_{D/A} \times \vec{F}_D = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0.100 & -0.100 & 0 \\ 600 & 1039 & 0 \end{vmatrix} = 163.9\vec{k}$$

$$\vec{M}_A^R = 30\vec{i} + 17.68\vec{j} + 118.9\vec{k}$$

$$\vec{R} = \sum \vec{F}$$

$$= (300 + 707 + 600)\vec{i} + (-600 + 1039)\vec{j} + (200 - 707)\vec{k}$$

$$\vec{R} = 1607\vec{i} + 439\vec{j} - 507\vec{k} \text{ (N)}$$



© 2007 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

11/69

Vector Mechanics for Engineers: Statics

سیستم نیروها: کاهش به فقط یک نیرو

- اگر نیروی برآیند و کوپل برآیند در O بر هم عمود باشند، یا نیروها متقاطع (concurrent) باشند، آنها را می‌توان تنها به یک نیرو تبدیل کرد که در راستای جدیدی باشد و یا از نقطه تقاطع بگذرد.
- سیستم نیرو-کوپل یک سیستم نیرو بر هم عمودند اگر:
 - (۱) نیروها هم‌صفحه (coplanar) باشند، یا
 - (۲) نیروها موازی باشند.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری
© 2007 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. ۶۳/۶۹

کاهش بیشتر سیستم نیرو - کوپل

ساده‌سازی به یک برآیند نیرویی تنها

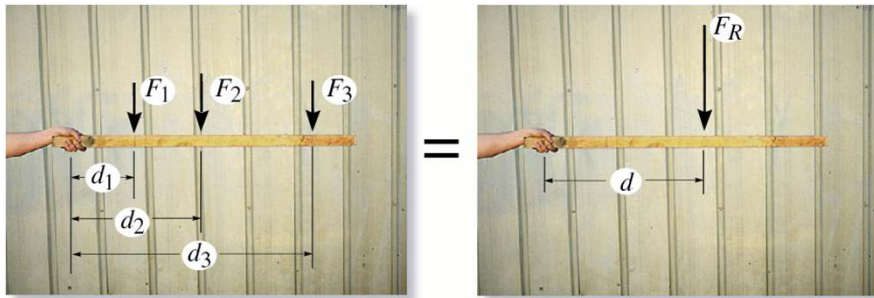
(اگر نیروها متقاطع (concurrent) باشند)

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری ۶۴/۶۹

کاهش بیشتر سیستم نیرو - کوپل

ساده سازی به یک برآیند نیرویی تنها

مثال



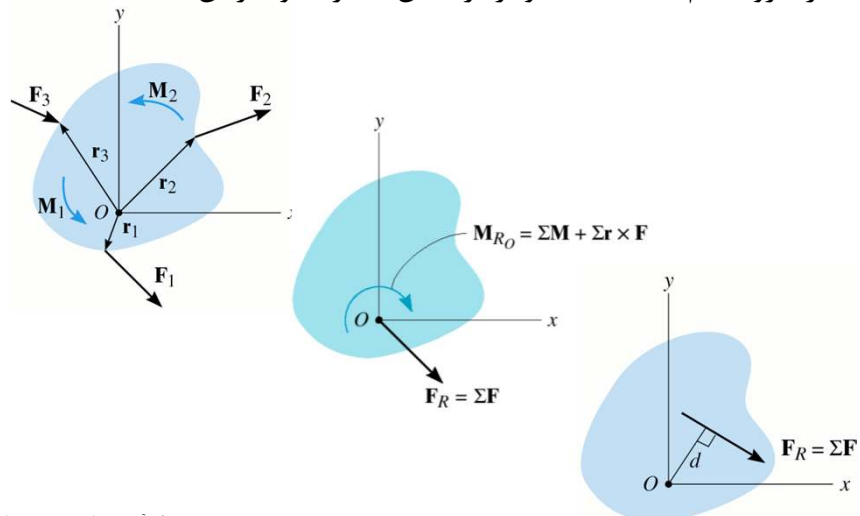
گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

۶۵/۶۹

کاهش بیشتر سیستم نیرو - کوپل

ساده سازی به یک برآیند نیرویی تنها

(اگر نیروها هم صفحه باشند و بردار ممان ها نیز عمود بر آن صفحه باشند):



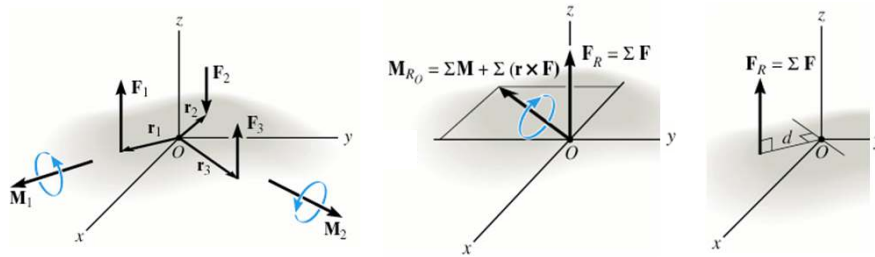
گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

۶۶/۶۹

کاهش بیشتر سیستم نیرو - کوپل

ساده‌سازی به یک برآیند نیرویی تنها

(اگر نیروها موازی باشند و بردار ممان‌ها در صفحه عمود بر آن‌ها باشد)



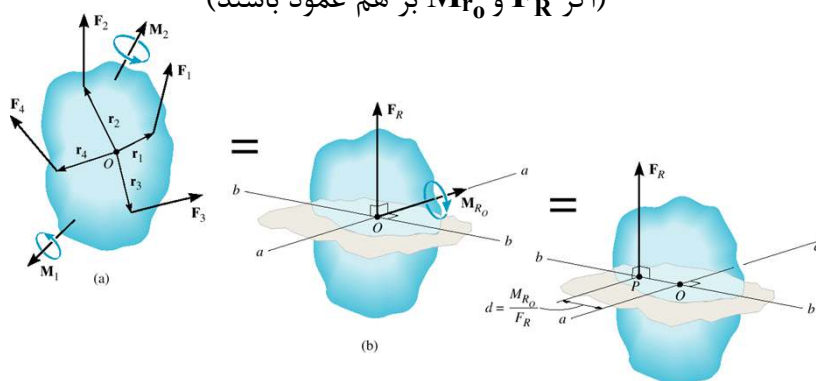
گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

۶۷/۶۹

کاهش بیشتر سیستم نیرو - کوپل

ساده‌سازی به یک برآیند نیرویی تنها

(اگر $\mathbf{F}_R$ و $\mathbf{M}_{R0}$ بر هم عمود باشند)



اگر یک سیستم نیرو هم‌صفحه و یا موازی هم باشند، نیروی برآیند و ممان برآیند بر هم عمودند.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

۶۸/۶۹

Vector Mechanics for Engineers: Statics

سیستم نیروها: کاهش به فقط یک نیرو

- سیستم نیروهای هم‌صفحه (coplanar) به یک سیستم نیرو-کوپل $\vec{M}_O^R$ و $\vec{R}$ عمود بر هم کاهش می‌یابد.
- سیستم را می‌توان با انتقال راستای $\vec{R}$ تا اینکه مماس آن حول O برابر با $\vec{M}_O^R$ شود به یک نیروی تنها نیز کاهش داد.
- بر حسب مؤلفه‌های کارترین،

$$M_z = xR_y - yR_x = M_O^R$$
- که نشانگر معادله خط اثر R است.

گرآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

© 2007 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

۶۹/۶۹

کاهش بیشتر سیستم نیرو - کوپل

ساده‌سازی به یک برآیند پیچ‌گوشتی‌وار

اگر در سیستمی برآیند نیروها بر برآیند مماس عمود نبود، مماس برآیند را می‌توان به دو مؤلفه در راستای موازی نیرو و عمود بر آن تجزیه کرد:

با جابجایی برآیند نیروها از O به P به موازات خودش به اندازه $d = \frac{M_{\perp}}{F_R}$

داریم:

اکنون با جابجایی $M_{\parallel}$ به موازات خودش تا در راستای b قرار بگیرد برآیند پیچ‌گوشتی‌وار به دست می‌آید.

۷۰/۶۹