

معادله مشخصه (Constitutive Equation) (فصل ۷ و ۱۱ کتاب دوم Fung)

سه معادله مشخصه‌ای که بیشتر استفاده می‌شوند ارائه می‌گردد. این معادلات مفاهیم عمومی ریاضی‌اند (mathematical abstractions) و به شکل اولیه‌شان مطرح می‌شوند تا تشابه و اختلاف آن‌ها مشخص شود.

(مفاهیم عمومی ریاضی (Abstraction in mathematics) فرآیند استخراج حقیقت یک مفهوم ریاضی جدای وابستگی آن به اشیای دنیای واقعی است؛ در اصل ممکن است به دنیای واقعی مربوط باشد ولی تعمیم داده شده تا دربرگیرنده کاربردهای بیشتری باشد و یا با سایر مفاهیم ریاضی پدیده‌های مشابه و معادل هماهنگ باشد).

(<https://en.wikipedia.org;visited 2016/3/7>)

اگر مصالح همسانگرد (isotropic) باشند، این معادلات بسیار ساده می‌شوند.

1/11 © M.H. Abolbashi, Ferdowsi University of Mashhad



Nonviscous Fluid

سیال غیر لزج



گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

2/11

7.2 - سیال غیرلزج (Nonviscous Fluid)

در بسیاری از مسائل **هوا و آب** را می‌توان غیر لزج در نظر گرفت. به عنوان مثال در مسائل مربوط به تغییر شکل زمین، امواج اقیانوس، پرواز یک هواپیما، جریان در جت و احتراق در موتور خودرو با چشم‌پوشی از لزجت ماده و در نظر گرفتن آن به عنوان سیال غیر لزج نتایج خوبی به دست می‌آید. از طرف دیگر، مسائل مهمی وجود دارند که از لزجت ماده، گرچه کم هم باشد، نباید چشم‌پوشی کرد. چند مثال از این دسته از مسائل عبارتند از: به دست آوردن نیروی پسا (drag) که روی یک هواپیما اثر می‌کند، تعیین این که یک جریان آرام (laminar) است یا مغشوش (turbulent)، گرمای یک فضاپیما در ورود به جو زمین و سرد شدن موتور خودرو.

یک سیال غیر لزج، سیالی است که تانسور تنش آن همسانگرد (isotropic) است؛ یعنی به شکل زیر است.

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} \quad (7.2-1)$$

که p یک کمیت اسکالر است که فشار نامیده می‌شود. مؤلفه‌های تنش در یک سیال غیر لزج به شکل ماتریسی عبارت است از:

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} \quad (7.2-2)$$

فشار P در گاز ایده آل با رابطه حالت زیر وابسته به چگالی ρ و دما T است.

$$\frac{P}{\rho} = RT \quad (7.2-3)$$

که R ثابت گازهاست.

3/11



برای یک گاز حقیقی یا یک مایع، اغلب می‌توان یک معادله حالت به دست آورد:

$$f(P, \rho, T) = 0 \quad (7.2-4)$$

در حالت **سیال غیر قابل تراکم**، معادله حالت به شکل زیر خواهد بود.

$$\rho = \text{const.} \quad (7.2-5)$$

بنابراین فشار P برای سیال غیر قابل تراکم یک متغیر اختیاری خواهد بود. تنها از معادلات حرکت و شرایط مرزی به دست می‌آید.

برای سیال **غیر لزج**، **معادله حرکت** به شکل زیر ساده می‌شود.

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = \boxed{X_i} + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \rightarrow \rho \frac{Dv_i}{Dt} = \boxed{\rho X_i} - \frac{\partial p}{\partial x_i}, \quad \left[\frac{N}{m^3} \right] \quad (11.8-2)$$

نیروی کالبدی بر واحد حجم

در اینجا ρ چگالی سیال؛ فشار؛ v_1, v_2, v_3 مؤلفه‌های سرعت و X_1, X_2, X_3 مؤلفه‌های نیروهای کالبدی بر واحد جرم است.

اگر افزون بر این **سیال هموژن (homogeneous)** و **غیر قابل تراکم** نیز باشد، آنگاه چگالی آن ثابت و معادله پیوستگی، به شکل زیر خلاصه می‌شود.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_j}{\partial x_j} = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \text{or} \quad \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad \text{or} \quad \nabla \cdot V = 0 \quad (11.8-3)$$

که V_i مؤلفه‌های سرعت است.

یک میدان برداری که معادله (11.8-3) را برآورده سازد سلتوئیدال (solenoidal) می‌نامند.

4/11



سیال لزج نیوتنی (Newtonian Viscous Fluid)



گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

5/11

7.3- سیال نیوتنی

یک سیال نیوتنی یک سیال لزج است که تنش برشی آن متناسب با نرخ (آهنگ) تغییر شکل $(\tau = \mu \frac{du}{dy})$ است. برای سیال نیوتنی داریم:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + D_{ijkl}V_{kl} \quad (7.3-1)$$

تانسور نرخ تغییر شکل
تانسور ضرایب لزجت سیال. به دما ممکن است بستگی داشته باشد ولی به تنش و نرخ تغییر شکل وابسته نیست.

فشار استاتیکی؛
به چگالی و دما بستگی دارد

تانسور تنش

تانسور D_{ijkl} از رنک ۴ و $3^4=81$ المان دارد. تمامی این ثابت‌ها مستقل نیستند.

مطالعه نظری تعداد ثابت‌های مستقل با در نظر گرفتن تقارن تانسورهای σ_{ij} و V_{kl} و تقارنی که در ساختار اتمی سیال وجود دارد، امکان پذیر است. بیشتر سیالات همسانگردند (isotropic).



گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

6/11

اگر سیال همسانگرد باشد، تانسور D_{ijkl} می تواند بر حسب دو ثابت λ و μ مستقل بیان شود.

$$D_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (7.3-2)$$

با جایگذاری در معادله (1) داریم:

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + V_{kl} [\lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})]$$

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + V_{kk} \lambda \delta_{ij} + 2\mu V_{ij} \quad (7.3-3)$$

کانترکشن معادله (3) عبارت است از:

$$\sigma_{kk} = -3p + (3\lambda + 2\mu)V_{kk} \quad (7.3-4)$$

اگر فرض شود تنش قائم متوسط $\frac{1}{3}\sigma_{kk}$ مستقل از نرخ اتساع V_{kk} که همان e (dilation) است:

$$V_{kk} = V_{11} + V_{22} + V_{33} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = e_{11} + e_{22} + e_{33} = e$$

باشد، آنگاه باید:

$$(3\lambda + 2\mu) = 0 \rightarrow \lambda = -2\mu/3 \quad (7.3-5)$$

بنابراین، معادله حاکم عبارت است از:

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + 2\mu V_{ij} - \frac{2}{3} \mu V_{kk} \delta_{ij} \quad (7.3-6)$$

این رابطه سازی توسط استوکس (George G. Stokes, 1845) انجام شد و سیالی که از رابطه (6) تبعیت کند سیال استوکسی می گویند و تنها یک ثابت مصالح μ ، ضریب لزجت، برای تعریف خواص آن کافی است.

7/11



اگر یک سیال لزج غیرقابل تراکم باشد، آنگاه $V_{kk}=0$.

$$V_{kk} = V_{11} + V_{22} + V_{33} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

معادله پیوستگی

و معادله مشخصه برای سیال لزج غیرقابل تراکم عبارت است از:

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + 2\mu V_{ij} \quad (7.3-7)$$

اگر $\mu=0$ باشد، معادله مشخصه سیال غیر لزج به دست می آید.

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} \quad (7.3-8)$$

وجود جمله فشار استاتیک p مشخص کننده اختلاف اساسی بین مکانیک سیالات و الاستیسیته است. برای به دست آوردن این متغیر جدید، اغلب فرض می شود یک معادله حالت وجود دارد:

$$f(P, \rho, T) = 0 \quad (7.3-9)$$

مانند گاز ایده آل و گاز حقیقی.

یک سیال لزج غیرقابل تراکم که در بالا تعریف شد، یک حالت خاص است که در آن ها فشار p متغیری است که از معادلات حرکت و شرایط مرزی به دست می آید. سیالاتی که لزجت آن ها با مؤلفه های نرخ تغییر شکل (7.3-1,3) رابطه خطی دارند را سیال نیوتنی می نامند. در غیر این صورت سیال غیر نیوتنی نامیده می شود.

8/11



11.1- معادلات ناویر-استوکس (Navier-Stokes) (حرکت) (معادلات اساسی حاکم بر جریان سیال لزج نیوتنی)

با فرض مختصات کارتزین x, y, z و با مؤلفه‌های سرعت u, v, w ، رابطه تنش-کرنش (7.3-3) به شکل زیر نوشته می‌شود.

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= -p\delta_{ij} + V_{kk} \lambda \delta_{ij} + 2\mu V_{ij} \\ &= -p\delta_{ij} + \lambda \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)\end{aligned}\quad (11.1-1)$$

یا:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right), & \sigma_{xy} &= \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \sigma_{yy} &= -p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right), & \sigma_{yz} &= \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \sigma_{zz} &= -p + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right), & \sigma_{xz} &= \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)\end{aligned}\quad (11.1-1a)$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری



9/11

با جایگزینی معادله (11.1-1) در معادله حرکت، معادله ناویر-استوکس به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}\rho \frac{Dv_i}{Dt} &= \rho X_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \rightarrow \rho \frac{Dv_i}{Dt} = \rho X_i + \frac{\partial}{\partial x_j} (-p\delta_{ij} + 2\mu V_{ij} - \frac{2}{3}\mu V_{kk} \delta_{ij}) \\ &= \rho X_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + 2 \frac{\partial}{\partial x_j} (\mu V_{ij}) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\lambda V_{kk}) \\ &= \rho X_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + 2 \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \mu \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] \right\} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) \\ &\quad \text{نیروی کالبدی بر واحد جرم} \\ \rho \frac{Dv_i}{Dt} &= \rho X_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right)\end{aligned}\quad (11.1-2)$$

مؤلفه‌های سرعت باید معادله پیوستگی (11.1-3) را نیز برآورده سازند.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_k) = 0 \quad (11.1-3)$$

اگر سیال غیر قابل تراکم باشد، $\rho = \text{const.}$ (11.1-4) و داریم:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_k) = 0 \rightarrow \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0 \quad (11.1-5)$$

و معادله ناویر استوکس به شکل زیر خلاصه می‌شود.

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = \rho X_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mu \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right) + 0 \quad (11.1-6)$$



10/11

این معادلات با تعریف لزجت سینماتیکی (نو) $\nu = \mu/\rho$ به شکل گسترش یافته غیر اندیسی عبارت است از:

$$\frac{Du}{Dt} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 u$$

$$\frac{Dv}{Dt} = Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \nabla^2 v \quad (11.1-7)$$

$$\frac{Dw}{Dt} = Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \nabla^2 w$$

که در آن لاپلاسیان عبارت است از:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (11.1-8)$$

از سه معادله (11.1.7) و معادله (11.1-5) می‌توان چهار مجهول p, u, v, w را برای یک سیال لزج غیر قابل تراکم به دست آورد.



گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

11/11