

Third Edition

CHAPTER

6

MECHANICS OF MATERIALS

Ferdinand P. Beer
E. Russell Johnston, Jr.
John T. DeWolf

Lecture Notes:
J. Walt Oler
Texas Tech University

تنش‌های برشی در تیرها و
اعضای جدار نازک

© M.H. Abolbashari, Ferdowsi University of Mashhad

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

Third Edition

MECHANICS OF MATERIALS

Beer • Johnston • DeWolf

مقدمه

Diagram showing a differential element of a beam with dimensions dx , dy , and dz . The element is subjected to normal stress σ_x and shear stress τ_{xy} on its faces. The resulting forces are $F_x = 0$, $F_y = -V$, and $F_z = 0$.

- بار عرضی که به تیرها اعمال می‌شود در مقاطع عرضی باعث بوجود آمدن تنش‌های قائم و برشی می‌شود.
- توزیع تنش‌های قائم و برشی باید روابط زیر را برآورده سازند.

$$\int \sigma_x dA = F_x = 0$$

$$\int \tau_{xy} dA = F_y = -V$$

$$\int \tau_{xz} dA = F_z = 0$$

$$\int (y \tau_{xz} - z \tau_{xy}) dA = 0 = M_x$$

$$\int z \sigma_x dA = 0 = M_y$$

$$\int -y \sigma_x dA = M_z$$

Diagram showing a differential element of a beam with dimensions dx , dy , and dz . The element is subjected to normal stress σ_x and shear stress τ_{xy} on its faces. The resulting forces are $F_x = 0$, $F_y = -V$, and $F_z = 0$.

- وقتی که تنش‌های برشی به وجوه عمودی یک المان اثر می‌کند، تنش‌هایی برابر با آن باید بر وجوه افقی اثر کند.
- در یک عضوی که تحت بار عرضی است، تنش‌های برشی طولی لزوماً وجود خواهند داشت.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالشیری

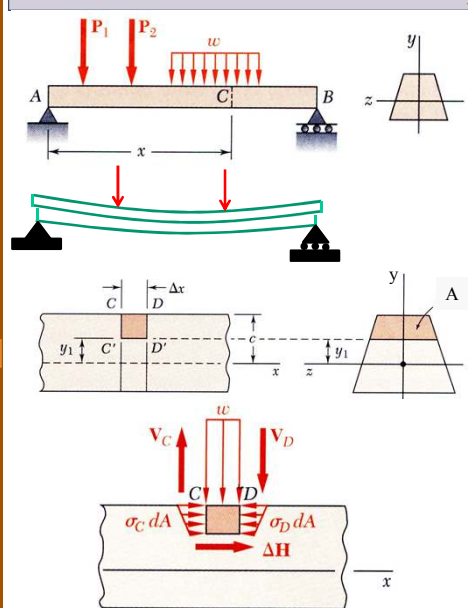
© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

6 - 2/31

MECHANICS OF MATERIALS

Beer • Johnston • DeWolf

تنش برشی در وجوه افقی یک المان تیر



- یک تیر منشوری در نظر بگیرید.
- برای تعادل المان تیر داریم:

$$\sum F_x = 0 = \Delta H - \int_A (\sigma_D - \sigma_C) dA$$

$$\Delta H = \frac{M_D - M_C}{I_z} \int_A y dA$$

توجه کنید که:

$$Q = \int_A y dA$$

ممان استاتیک اول سطح بالای تراز ی که می‌خواهیم در آن تنش برشی را به دست آوریم.

$$M_D - M_C = \frac{dM}{dx} \Delta x = V_y \Delta x$$

با جایگذاری داریم:

$$\Delta H = \frac{V_y Q}{I_z} \Delta x$$

I مربوط به کل سطح مقطع است.

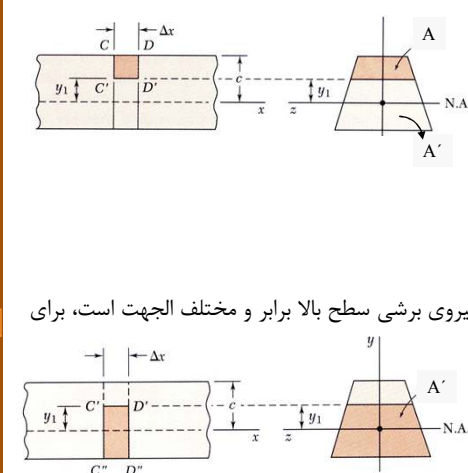
$$q = \frac{\Delta H}{\Delta x} = \frac{V_y Q}{I_z} = \text{shear flow}$$

6 - 3/31

MECHANICS OF MATERIALS

Beer • Johnston • DeWolf

تنش برشی در وجوه افقی یک المان تیر



- جریان برش:

$$q = \frac{\Delta H}{\Delta x} = \frac{VQ}{I}$$

که در آن

$$Q = \int_A y dA$$

ممان استاتیک اول سطح بالای محور y_1

$$I = \int_{A+A'} y^2 dA$$

از آنجا که نیروی برشی برای سطح پایینی دقیقاً با نیروی برشی سطح بالا برابر و مختلف جهت است، برای سطح پایینی هم نتیجه مشابهی به دست می‌آید:

$$q' = \frac{\Delta H'}{\Delta x} = \frac{VQ'}{I} = -q$$

و داریم:

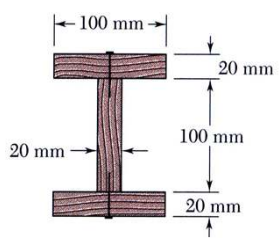
$$q' + q = 0 \rightarrow Q + Q' = 0$$

و این به معنای این است که مجموع ممان استاتیک اول سطح بالا و پایین نسبت به هر محوری مانند $y=y_1$ برابر صفر است. از این خاصیت که برای هر محوری صادق است می‌توان برای یافتن محور خنثی نیز استفاده کرد.

6 - 4/31

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مثال 6.01



حل:

- نیروی افقی بر واحد طول یا q را در سطح پایینی تخته بالایی به دست آورید.
- نیروی برشی در هر میخ را محاسبه کنید.

یک تیر از سه قسمت تخت که با میخ به هم متصل شده‌اند تشکیل شده است. اگر فاصله بین میخ‌ها 25 mm و نیروی برشی عمودی تیر $V=500$ N باشد، نیروی برشی هر میخ را به دست آورید.

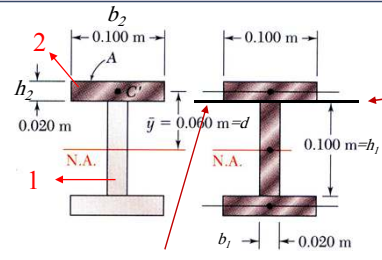
گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالشیری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

6 – 5/31

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مثال 6.01 (ادامه)



حل:

- نیروی افقی بر واحد طول یا q را در سطح پایینی تخته بالایی به دست آورید.

$$q = \frac{VQ}{I} = \frac{(500\text{ N})(120 \times 10^{-6} \text{ m}^3)}{16.20 \times 10^{-6} \text{ m}^4} = 3704 \text{ N/m}$$

- نیروی برشی در هر میخ را به ازای فاصله 25 mm بین آن‌ها محاسبه کنید.

ممان استاتیک سطح بالای تراز $Q = A\bar{y}$ که می‌خواهیم جریان برش را حساب کنیم.

$$Q = (0.020 \text{ m} \times 0.100 \text{ m})(0.060 \text{ m}) = 120 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

مربوط به کل مقطع

$$I = \frac{1}{12}b_1h_1^3 + 2\left[\frac{1}{12}b_2h_2^3 + Ad^2\right] = \frac{1}{12}(0.020 \text{ m})(0.100 \text{ m})^3 + 2\left[\frac{1}{12}(0.100 \text{ m})(0.020 \text{ m})^3 + (0.020 \text{ m} \times 0.100 \text{ m})(0.060 \text{ m})^2\right] = 16.20 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$F = (0.025 \text{ m})q = (0.025 \text{ m})(3704 \text{ N/m})$$

$F = 92.6 \text{ N}$

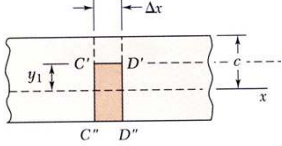
© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

6 – 6/31

MECHANICS OF MATERIALS

Beer • Johnston • DeWolf

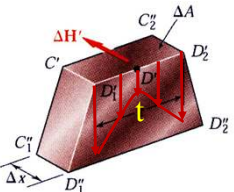
به دست آوردن تنش‌های برشی در یک تیر



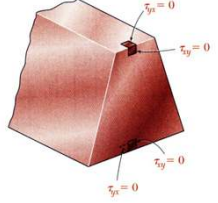
- **تنش برشی متوسط** در وجه افقی یک المان با تقسیم نیروی برشی بر مساحت آن وجه به دست می‌آید.

$$\tau_{ave} = \frac{\Delta H}{\Delta A} = \frac{q \Delta x}{\Delta A} = \frac{VQ}{I} \frac{\Delta x}{\Delta x}$$

$$= \frac{VQ}{It}$$



- در صفحات بالا و پایین تیر $\tau_{yx} = 0$. در نتیجه در لبه‌های بالا و پایینی مقاطع عرضی هم $\tau_{xy} = 0$.



- اگر عرض تیر (b) نسبت به عمق آن (h) قابل مقایسه و یا بزرگ باشد، تنش‌های برشی در D_1' و D_2' از تنش‌های برشی در D' به طور چشمگیری بزرگ‌ترند.
- اگر $b \leq \frac{h}{4}$ باشد این تفاوت کمتر از 0.8% است و رابطه متوسط فوق را می‌توان استفاده کرد.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ایوالیشری

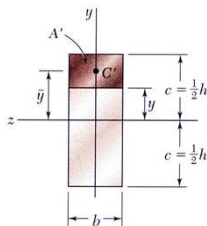
© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

6 - 7/31

MECHANICS OF MATERIALS

Beer • Johnston • DeWolf

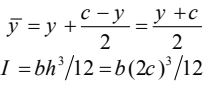
تنش‌های برشی τ_{xy} در انواع تیرهای معمول



- برای یک تیر مکعب مستطیل لاغر:

$$\tau_{xy} = \frac{V_y Q}{I_z b} = \frac{3}{4} \left(\frac{c^2 - y^2}{bc^3} \right) V = \frac{3V}{2A} \left(1 - \frac{y^2}{c^2} \right)$$

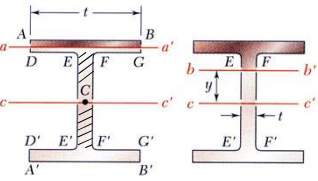
$$\tau_{max} = \tau|_{y=0} = \frac{3V}{2A}$$



$$\bar{y} = y + \frac{c-y}{2} = \frac{y+c}{2}$$

$$Q = A'\bar{y} = b(c-y) \frac{y+c}{2} = b \frac{c^2 - y^2}{2}$$

$$I = bh^3/12 = b(2c)^3/12 = 2bc^3/3 \quad A = 2cb$$



- برای تیرهای استاندارد آمریکایی (S-Beam و بال پهن (W-Beam)):

$$\tau_{ave} = \frac{V_y Q}{I_z t}$$

متوسط چون در عرض کمی متفاوت است.

$$\tau_{max} = \frac{V_y}{A_{web}}$$

رابطه تقریبی

یعنی فرض می‌شود که تمام بار برشی توسط جان تیر تحمل می‌شود.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ایوالیشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

6 - 8/31

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

تغییرات تنش برشی در یک تیر با سطح مقطع I شکل

$$\tau_{p-p} = \tau_{xy} = \frac{V_y Q}{I_z b}$$

$$Q = \int_{y_1}^{h/2} y dA = \sum \bar{y} A = \underbrace{\left(\frac{h_1}{2} - y_1 \right) b_1}_{\text{مساحت 1}} \underbrace{\left(\frac{h_1}{4} - \frac{y_1}{2} + y_1 \right)}_{\text{فاصله مرکز تا تار خنثی}} + \underbrace{\left(\frac{h}{2} - \frac{h_1}{2} \right) b}_{\text{مساحت 2}} \underbrace{\left[\frac{h}{2} - \left(\frac{h}{2} - \frac{h_1}{2} \right) \right]}_{\text{فاصله مرکز تا تار خنثی}}$$

$$Q = \frac{b_1}{2} \left(\frac{h_1^2}{4} - y_1^2 \right) + \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{h_1^2}{4} \right)$$

$$\tau_{p-p} = \frac{V}{b_1 I} \left[\frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{h_1^2}{4} \right) + \frac{b_1}{2} \left(\frac{h_1^2}{4} - y_1^2 \right) \right]$$

از این رابطه معلوم می‌شود که تنش برشی در ارتفاع تیر طبق یک منحنی سهمی تغییر می‌کند.

در جان تیر: τ ماکزیمم و مینیمم به ترتیب در تار خنثی و در $y_1 = h_1/2$ به صورت زیر است:

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 6 - 9/31

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

تغییرات تنش برشی در یک تیر با سطح مقطع I شکل (ادامه)

$$\tau_{\max} = \tau|_{y_1=0} = \frac{V}{b_1 I} \left[\frac{bh^2}{8} - \frac{h_1^2}{8} (b - b_1) \right]$$

$$\tau_{\min} = \tau|_{y_1=h_1/2} = \frac{V}{b_1 I} \left(\frac{bh^2}{8} - \frac{bh_1^2}{8} \right)$$

با توجه به معادله اول وقتی b_1 نسبت به b خیلی کوچک است (تیر لاغر)، $\tau_{\max} \approx \tau_{\min}$ و توزیع تنش برشی در مقطع تیر عملاً یکنواخت است. به همین دلیل می‌گوییم در تیرهای لاغر فرضیه مستوی ماندن صفحات عمود بر محور تقریباً درست است.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالشیری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 6 - 10/31

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

آیا تغییرات تنش برشی در یک تیر با سطح مقطع دایره شکل نیز به شکل سهمی است؟

فرض می کنیم نیروی برشی در مقطع P باشد.
تراز BB به عرض b_0 را که به فاصله h از تار خنثی قرار گرفته در نظر می گیریم.

$y = \frac{D}{2} \sin \theta, \quad b = 2 \left(\frac{D}{2} \right) \cos \theta$
 $BB = b_0 = 2 \left(\frac{D}{2} \right) \cos \theta_1$
 $dy = \frac{D}{2} \cos \theta d\theta$

مقطع BB

$$\tau = \frac{V \int y dA}{I b_0} = \frac{P}{I b_0} \int_h^{D/2} y b dy = \frac{P}{I b_0} \int_{\theta_1}^{\pi/2} \frac{D}{2} \sin \theta \cdot D \cos \theta \cdot \frac{D}{2} \cos \theta d\theta$$

$$= \frac{PD^3}{\pi D^4 (D \cos \theta_1)} \frac{1}{4} \int_{\theta_1}^{\pi/2} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = \frac{16P}{\pi D^2 \cos \theta_1} \int_{\theta_1}^{\pi/2} (-\cos^2 \theta) d(\cos \theta)$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری
© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 6 - 11/31

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

تغییرات تنش برشی در یک تیر با سطح مقطع دایره شکل (ادامه)

$$\tau = \frac{16P}{\pi D^2 \cos \theta_1} \left[-\frac{\cos^3 \theta}{3} \right]_{\theta_1}^{\pi/2} = \frac{16P \cos^3 \theta_1}{3\pi D^2 \cos \theta_1} = \frac{16P \cos^2 \theta_1}{3\pi D^2} = \frac{16P}{3\pi D^2} (1 - \sin^2 \theta_1)$$

از شکل داریم:

$$\sin \theta_1 = \frac{h}{D/2}$$

$$\tau = \frac{16P}{3\pi D^2} \left[1 - \left(\frac{2h}{D} \right)^2 \right]$$

$\tau_{\max}$ وقتی اتفاق می افتد که مقدار h برابر صفر باشد یعنی روی تار خنثی.

$$\tau_{\max} = \frac{16P}{3\pi D^2}$$

$$\tau_{ave} = \frac{P}{\pi D^2 / 4}$$

$$\frac{\tau_{\max}}{\tau_{ave}} = \frac{\frac{16P}{3\pi D^2}}{\frac{P}{\pi D^2 / 4}} = \frac{4}{3}$$

$$\tau_{\max} = \frac{4}{3} \tau_{ave}$$

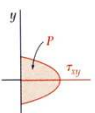
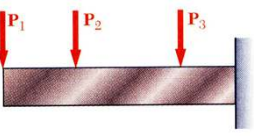
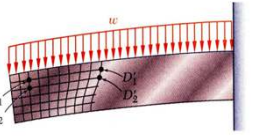
گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری
© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 6 - 12/31

MECHANICS OF MATERIALS

Beer • Johnston • DeWolf

بحث بیشتر در مورد توزیع تنش‌ها در تیرهای مکعب مستطیل لاغر

- یک تیر مکعب مستطیل لاغر یکسرگیردار که تحت اثر بار P در سر آزاد خود قرار دارد را در نظر بگیرید (نیروی برشی در طول تیر ثابت است).
- تنش‌های برشی مستقل از فاصله از نقطه اثر بار است.
- کرنش‌های قائم و تنش‌های قائم از تنش‌های برشی متأثر نمی‌شود.
- از اصل سنت ونان، اثرهای مود بارگذاری قابل چشمپوشی است مگر در نزدیکی نقطه اثر نیرو.
- تیر مکعب مستطیل لاغر یکسرگیردار تحت اثر چند بار P_1, P_2, P_3 (نیروی برشی در طول تیر متغیر است).
- رابطه تنش برشی در نزدیکی محل اثر نیروها (که در سطح اثر می‌کنند) صادق نیستند مگر اینکه بار به شکل سهموی (مانند توزیع تنش) در ارتفاع تغییر کنند.
- تیر مکعب مستطیل لاغر یکسرگیردار تحت اثر بار گسترده (نیروی برشی در طول تیر متغیر است).
- نیروی برشی به نسبت فاصله از سر تیر تغییر می‌کند، و به همین ترتیب تنش برشی در یک سطحی مانند y . تغییر شکل برشی حاصل چنان است که فاصله‌های بین نقاط در سطح مقطع‌های مختلف مانند D_1 و D_1' یا D_2 و D_2' به سطح آن‌ها بستگی دارد. این نشانگر این است که فرض مستوی ماندن مقطع‌ها برای این نوع بارگذاری صادق نباشد. با این همه، برای تیرهایی که در عمل بیشتر استفاده می‌شوند و نسبت دهانه به عمق بالایی دارند این تفاوت‌ها کم است.

گرآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالشیری

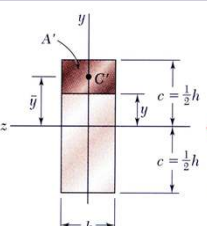
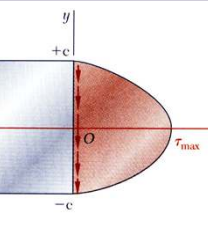
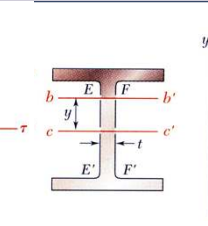
© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

6 - 13/31

MECHANICS OF MATERIALS

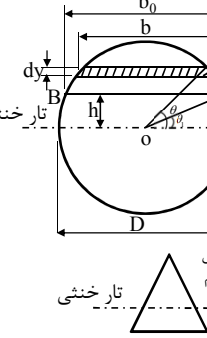
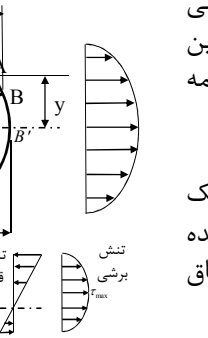
Beer • Johnston • DeWolf

آیا تنش برشی حداکثر همیشه در تارخنشی است؟

در مثال‌هایی که تا کنون حل شد تنش برشی ماکزیمم در تارخنشی اتفاق می‌افتاد. اکنون این سؤال مطرح می‌شود که آیا این اتفاق در همه مقاطع می‌افتد و یا این یک قاعده نیست.

پاسخ این است که قاعده کلیت ندارد مثلاً در یک تیر با مقطع مثلثی که تارخنشی در 1/3 قاعده است تنش برشی ماکزیمم در وسط مثلث اتفاق می‌افتد.

گرآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالشیری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

6 - 14/31

MECHANICS OF MATERIALS

Beer • Johnston • DeWolf

چرا در طراحی تیرها گفته شد تنش خمشی ماکزیمم معیار طراحی است و نه تنش برشی ماکزیمم.

مقایسه تنش خمشی ماکزیمم و تنش برشی ماکزیمم در یک تیر با مقطع مستطیل شکل و بارگذاری ساده

گرآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشیری

$$\sigma_{\max} = \frac{Mc}{I} = \frac{(Pl/4)(h/2)}{I} = \frac{Plh}{8I}$$

$$\tau = \frac{V}{2I} \left(\frac{h^2}{4} - y_1^2 \right)$$

$$\tau_{\max} = \tau|_{y_1=0} = \frac{V}{2I} \frac{h^2}{4}$$

$$\tau_{\max} = \frac{P/2}{2I} \frac{h^2}{4} = \frac{Ph^2}{16I}$$

$$\frac{\sigma_{\max}}{\tau_{\max}} = \left(\frac{Plh}{8I} \right) / \left(\frac{Ph^2}{16I} \right) = 2 \frac{l}{h}$$

یا به طور کلی: $\frac{\sigma_{\max}}{\tau_{\max}} = k \frac{l}{h}$ که k به نوع بارگذاری مربوط می‌شود. مثلاً برای بار گسترده $k=1$ خواهد بود.

نتیجه کلی: در تیرها معمولاً $l > 10h$ است و لذا σ از τ ده برابر بیشتر است.

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

6 - 15/31

MECHANICS OF MATERIALS

Beer • Johnston • DeWolf

مسئله نمونه 6.2

حل:

- نمودار نیروی برشی و ممان خمشی را ترسیم کنید. مقادیر ماکزیمم آن‌ها را مشخص کنید.
- عمق تیر را بر اساس تنش قائم مجاز به دست آورید.
- عمق تیر را بر اساس تنش برشی مجاز به دست آورید.
- عمق لازم برابر با **بزرگترین** مقدار دو عمق به دست آمده است.

یک تیر الوار سه بار متمرکز مانند شکل را تحمل می‌کند. اگر برای این نوع الوار داشته باشیم:

$\sigma_{all} = 1800 \text{ Psi}$ $\tau_{all} = 120 \text{ Psi}$

مینیمم عمق لازم d تیر را به دست آورید.

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

6 - 16/31

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مسئله نمونه 6.2 (ادامه)

حل:

نمودار نیروی برشی و ممان خمشی را ترسیم کنید. مقادیر ماکزیمم آن‌ها را مشخص کنید.

$V_{\max} = 3 \text{ kips}$
 $M_{\max} = 7.5 \text{ kip} \cdot \text{ft} = 90 \text{ kip} \cdot \text{in}$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری
 © 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 6 - 17/31

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مسئله نمونه 6.2 (ادامه)

عمق تیر را بر اساس تنش قائم مجاز به دست آورید.

$$\sigma_{all} = \frac{M_{\max}}{S}$$

$$1800 \text{ Psi} = \frac{90 \times 10^3 \text{ lb} \cdot \text{in.}}{(0.5833 \text{ in.})d^2}$$

$$d = 9.26 \text{ in.}$$

عمق تیر را بر اساس تنش برشی مجاز به دست آورید.

$$\tau_{all} = \frac{3V_{\max}}{2A}$$

$$120 \text{ Psi} = \frac{3}{2} \frac{3000 \text{ lb}}{(3.5 \text{ in.})d}$$

$$d = 10.71 \text{ in.}$$

عمق لازم برابر با **بزرگترین** مقدار دو عمق به دست آمده است.

$d = 10.71 \text{ in.}$

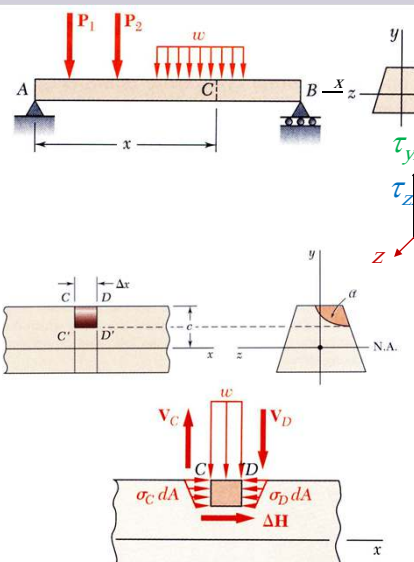
دقت شود که در اینجا که تنش برشی ماکزیمم بحرانی است به سبب این است که بارهای چندگانه داریم.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری
 © 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 6 - 18/31

MECHANICS OF MATERIALS

Beer • Johnston • DeWolf

برش طولی روی یک المان تیر با شکل مقطع دلخواه



- ما قبلاً توزیع مؤلفه‌های عمودی τ_{xy} را روی یک مقطع عرضی تیر به دست آوردیم. اکنون می‌خواهیم مؤلفه‌های افقی τ_{zx} تنش را بیابیم.
- تنش برشی در میخ‌های کدام شکل بیشتر است؟
- یک تیر منشوری را که المانی از آن به شکل صفحه انحنا دار $CDD'C'$ است در نظر بگیرید.
- به جز تفاوتی که در مساحت انتگرال گیری‌ها وجود دارد، این همان نتیجه‌ای است که قبلاً به دست آورده بودیم؛ و در نهایت داریم:

$$\sum F_x = 0 = \Delta H + \int_a^b (\sigma_D - \sigma_C) dA$$

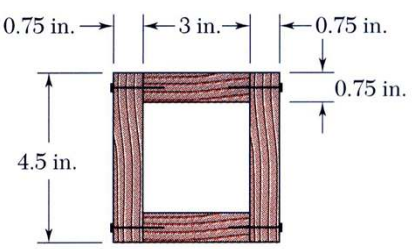
$$\Delta H = \frac{VQ}{I} \Delta x \quad q = \frac{\Delta H}{\Delta x} = \frac{VQ}{I}$$

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 6 - 19/31

MECHANICS OF MATERIALS

Beer • Johnston • DeWolf

مثال 6.04



حل:

- نیروی برشی در واحد طول در امتداد هر لبه از الوار بالایی را به دست آورید.
- بر اساس فاصله بین میخ‌ها، نیروی برشی هر میخ را به دست آورید.

یک تیر با مقطع مربع از چهار الوار مانند شکل تشکیل شده است. اگر فاصله بین میخ‌ها 1.75 in و تیر تحت بار برشی عمودی $V=600 \text{ lb}$ باشد، نیروی برشی هر میخ را به دست آورید.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالشیری
© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 6 - 20/31

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مثال 6.04 (ادامه)

حل:

- نیروی برشی در واحد طول در امتداد هر لبه از الوار بالایی را به دست آورید.

$$q = \frac{V_y Q}{I_z} = \frac{(600 \text{ lb})(4.22 \text{ in}^3)}{27.42 \text{ in}^4} = 92.3 \frac{\text{lb}}{\text{in}}$$

نیروی هر لبه بر واحد طول

$$f = \frac{q}{2} = 46.15 \frac{\text{lb}}{\text{in}}$$

برای الوار بالایی

$$Q = A' \bar{y} = (0.75 \text{ in.})(3 \text{ in.})(1.875 \text{ in.}) = 4.22 \text{ in}^3$$

برای سطح مقطع کل تیر

$$I = \frac{1}{12} (4.5 \text{ in})^4 - \frac{1}{12} (3 \text{ in})^4 = 27.42 \text{ in}^4$$

میخ را به دست آورید.

$$F = f \ell = \left(46.15 \frac{\text{lb}}{\text{in}} \right) (1.75 \text{ in})$$

$F = 80.8 \text{ lb}$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

6 – 21/31

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

تنش در اعضای جدار نازک

- یک قطاع از یک تیر بال پهن که تحت تأثیر نیروی برشی عمودی V قرار دارد در نظر بگیرید.
- نیروی برشی طولی المان عبارت است از:

$$\Delta H = \frac{V_y Q}{I_z} \Delta x$$

تنش برشی متوسط سطح در نظر گرفته شده:

$$\frac{\Delta H}{t \Delta x} = \frac{VQ}{It}$$

- چون ضخامت کم است تنش برشی تقریباً با تنش برشی متوسط برابر است:

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} \approx \frac{\Delta H}{t \Delta x} = \frac{V_y Q}{I_z t}$$

- رابطه مشابهی برای تنش برشی در قسمت جان تیر به دست آورده بودیم.

$$\tau_{xy} = \frac{V_y Q}{I_z t}$$

- توجه داشته باشید که برای یک V_y و I_z مشخص، چون ضخامت‌ها کم است:

در بال $\tau_{xy} \approx 0$ زیرا مقطعی که می‌زنیم افقی است (خط چین سبز رنگ) و ضخامت مقطع مورد نظر عرض بال است که عدد بزرگی است و Q هم کم است.

در جان $\tau_{xz} \approx 0$ زیرا مقطعی که می‌زنیم عمودی است (خط چین آبی رنگ) و ضخامت مقطع مورد نظر ارتفاع تیر است که عدد بزرگی است و Q هم کم است.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

6 – 22/31

Third Edition

MECHANICS OF MATERIALS

Beer • Johnston • DeWolf

تنش در اعضای جدار نازک (ادامه)

- تغییرات جریان برشی در مقطع تنها به تغییرات ممان اول بستگی دارد.

$$q = \tau t = \frac{V_y Q}{I_z}$$

- برای یک تیر قوطی شکل، q به طور یکنواخت از صفر در A به مقدار ماکزیمم خودش در C و C' می‌رسد و آن‌گاه بار دیگر در E به صفر می‌رسد.
- جهت q در قسمت افقی مقطع را می‌توان از جهت قسمت عمودی یا جهت نیروی برشی V مقطع نتیجه گرفت.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالشیری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

6 – 23/31

Third Edition

MECHANICS OF MATERIALS

Beer • Johnston • DeWolf

تنش در اعضای جدار نازک (ادامه)

- برای تی‌رهای بال پهن، جریان برش به طور متقارن از صفر در A افزایش پیدا می‌کند تا به ماکزیمم خودش در C می‌رسد و سپس در E و E' به صفر می‌رسد.
- پیوستگی تغییرات در q و به هم رسیدن آن‌ها از قسمت‌های مختلف مقطع یک تشابه با جریان سیال را تداعی می‌کند.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالشیری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

6 – 24/31

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مسئله نمونه 6.3

حل:

- برای ناحیه سایه خورده:

$$Q = (4.31 \text{ in})(0.770 \text{ in})(4.815 \text{ in}) = 15.98 \text{ in}^3$$

- تنش برشی در a:

$$\tau = \frac{V_y Q}{I_z t} = \frac{(50 \text{ kips})(15.98 \text{ in}^3)}{(394 \text{ in}^4)(0.770 \text{ in})}$$

$\tau = 2.63 \text{ ksi}$

اگر نیروی برش عمودی در مقطع یک تیر فولادی نورد شده W10×68 برابر 50 kips باشد، تنش برشی افقی را در بال بالایی و در نقطه a به دست آورید.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری
© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

6 – 25/31

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

بارگذاری نامتقارن اعضای جدار نازک

اگر P را به موازات خودش به اندازه x جابه‌جا کنیم:

- تیرهایی که در صفحه تقارن عمودی‌شان بارگذاری می‌شوند، در صفحه تقارن خود بدون داشتن پیچشی تغییر شکل می‌دهند.

$$\sigma_x = -\frac{My}{I} \quad \tau_{ave} = \frac{VQ}{It}$$

(V = P, M = Px)

- تیرهایی که صفحه تقارن عمودی ندارند تحت بارگذاری هم خمش و هم پیچش خواهند داشت.

$$\sigma_x = -\frac{My}{I} \quad \tau_{ave} \neq \frac{VQ}{It}$$

(V = P, M = Px)

- رابطه تنش برشی برای این حالت به دلیل وجود پیچش (تنش‌های برشی حاصل از پیچش) صادق نیست.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری
© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

6 – 26/31

Third Edition

MECHANICS OF MATERIALS

Beer • Johnston • DeWolf

بارگذاری نامتقارن اعضای جدار نازک و مرکز برش

- اگر بار برشی چنان وارد شود که تیر پیچشی نداشته باشد، آنگاه توزیع تنش برشی باید رابطه زیر را برآورده کند.

$$\tau_{ave} = \frac{VQ}{It} \quad V = \int_B^D q \, ds \quad F = \int_A^B q \, ds = - \int_D^E q \, ds = -F'$$
- نیروهای F و F' نشان دهنده کوپل Fh هستند و از تعادل گشتاورها داریم:

$$\sum M_B = 0 \quad Fh = Ve$$
- وقتی نیروی P از یک فاصله‌ای e از طرف چپ خط مرکزی جان تیر اعمال شود، عضو در صفحه عمودی بدون هیچگونه پیچشی فقط خمش پیدا می‌کند.
- محل تقاطع صفحه خنثی با صفحه‌ای که نیروی P در آن قرار دارد در یک مقطع بخصوص نقطه‌ای است که به آن **مرکز برش** مقطع می‌گویند و مستقل از P است.

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

6 - 27/31

Third Edition

MECHANICS OF MATERIALS

Beer • Johnston • DeWolf

مثال 6.05

- موقعیت مرکز برش مقطع ناودانی مقابل با $b = 4 \text{ in.}$, $h = 6 \text{ in.}$ و $t = 0.15 \text{ in.}$ را بیابید.
- که در آن:

$$e = \frac{Fh}{V}$$

$$F = \int_0^b q \, ds = \int_0^b \frac{VQ}{I} \, ds = \frac{V}{I} \int_0^b st \frac{h}{2} \, ds = \frac{Vthb^2}{4I}$$

$$I = I_{web} + 2I_{flange} = \frac{1}{12}th^3 + 2 \left[\frac{1}{12}bt^3 + bt \left(\frac{h}{2} \right)^2 \right]$$

$$\cong \frac{1}{12}th^2(6b + h)$$
- در مقاطع جدار نازک از t^3 که خیلی کوچک است صرف نظر می‌شود.
- با ترکیب روابط داریم:

$$e = \frac{Fh}{V} = \frac{Vthb^2 h}{4IV} = \frac{thb^2 h}{4 \frac{1}{12}th^2(6b+h)} = \frac{b^2}{\frac{1}{3}(6b+h)}$$

$$e = \frac{b}{2 + \frac{h}{3b}} = \frac{4 \text{ in.}}{2 + \frac{6 \text{ in.}}{3(4 \text{ in.})}} \quad \boxed{e = 1.6 \text{ in.}}$$

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

6 - 28/31

MECHANICS OF MATERIALS

Beer • Johnston • DeWolf

مثال 6.05 (ادامه)

• توزیع تنش برشی را با $V=2.5$ kips به دست آورید.

$$\tau = \frac{q}{t} = \frac{VQ}{It}$$

• تنش برشی در بال‌ها:

$$\tau = \frac{VQ}{It} = \frac{V}{It} \left(st \right) \frac{h}{2} = \frac{Vh}{2I} s$$

$$\tau_B = \frac{Vhb}{2 \left(\frac{1}{12} th^2 \right) (6b + h)} = \frac{6Vb}{th(6b + h)}$$

$$= \frac{6(2.5 \text{ kips})(4 \text{ in})}{(0.15 \text{ in})(6 \text{ in})(6 \times 4 \text{ in} + 6 \text{ in})} = 2.22 \text{ ksi}$$

• تنش برشی ماکزیمم در جان تیر:

$$Q = bt(h/2) + (h/2)t(h/4)$$

$$\tau_{\max} = \frac{VQ}{It} = \frac{V \left(\frac{1}{8} ht \right) (4b + h)}{\frac{1}{12} th^2 (6b + h) t} = \frac{3V(4b + h)}{2th(6b + h)}$$

$$= \frac{3(2.5 \text{ kips})(4 \times 4 \text{ in} + 6 \text{ in})}{2(0.15 \text{ in})(6 \text{ in})(6 \times 4 \text{ in} + 6 \text{ in})} = 3.06 \text{ ksi}$$

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

6 – 29/31

MECHANICS OF MATERIALS

Beer • Johnston • DeWolf

مرکز برش (پیچش)

پژوهش‌های مفصل‌تر نشان می‌دهد که وقتی یک عضو با هر سطح مقطع دلخواهی تحت پیچش قرار گیرد، این پیچش در حول مرکز برش صورت می‌گیرد. محل مرکز برش در همه حال ثابت است و به همین علت مرکز برش گاهی مرکز پیچش خوانده می‌شود.

در مقاطعی که دارای یک محور تقارن هستند مرکز برش همیشه روی این محور تقارن قرار دارد.

در مقاطعی که دارای دو محور تقارن هستند مرکز برش منطبق بر مرکز هندسی مقطع می‌باشد.

تعیین محل دقیق مرکز برش برای مقاطع غیر متقارن با جداره ضخیم بسیار مشکل است و فقط برای حالات معدودی تعیین شده است.

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

6 – 30/31

