

Third Edition

MECHANICS OF MATERIALS

CHAPTER 4

Ferdinand P. Beer
E. Russell Johnston, Jr.
John T. DeWolf

Lecture Notes:
J. Walt Oler
Texas Tech University

خمش خالص

© M.H. Abolbashari, Ferdowsi University of Mashhad

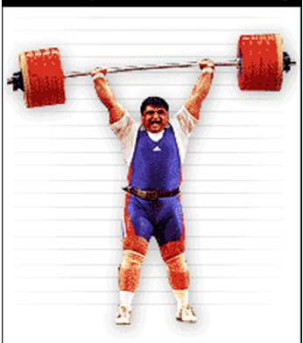
© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

Beer • Johnston • DeWolf

MECHANICS OF MATERIALS

خمش خالص

Clean and jerk world record 263 Kgs



80 lb 12 in. 26 in. 12 in. 80 lb

A C D B

$R_C = 80 \text{ lb}$ $R_D = 80 \text{ lb}$

(a)

$M = 960 \text{ lb} \cdot \text{in.}$ $M' = 960 \text{ lb} \cdot \text{in.}$

(b)

ترسیمه نیروی برشی و ممات خمشی:

V C D B

M C D B

خمش خالص: اعضای باریک و بلند وقتی تحت دو کوپل مساوی و مختلف‌الجهت در صفحه طولی‌شان قرار گیرند خمش خالص دارند.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

4 - 2/43

MECHANICS OF MATERIALS

Beer • Johnston • DeWolf

انواع بارگذاری‌های دیگر

- **بارهای خارج از مرکز:** بارهای محوری که از مرکز سطح مقطع نمی‌گذرند نیروهای داخلی معادل یک نیروی محوری و یک کوپل ایجاد می‌کنند.
- **اصل جمع آثار:** تنش قائمی که در اثر خمش خالص بوجود می‌آید را می‌توان با تنش‌های قائمی که در اثر بارگذاری محوری بوجود می‌آید ترکیب کرد و تنش قائم کل را در هر نقطه به دست آورد.
- **بارهای عرضی:** بارهای متمرکز یا گسترده عرضی نیروهای داخلی ایجاد می‌کنند که معادل یک نیروی برشی و یک کوپل است.
- در مقطع تیر، **کوپل M** باعث بوجود آمدن **تنش قائم** و **نیروی برشی** باعث بوجود آمدن **تنش برشی** می‌شود.

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 4 - 3/43

MECHANICS OF MATERIALS

Beer • Johnston • DeWolf

خمش خالص اعضای متقارن

- نیروهای داخلی در هر مقطع عرضی یک عضو متقارن تحت **خمش خالص** یک کوپل است. ممان این کوپل، ممان خمشی مقطع است.
- از ایستایی می‌دانیم که هر ممان M از یک زوج نیرویی برابر و مخالف هم تشکیل شده است.
- مجموع مؤلفه‌های نیروها در هر جهتی صفر است.
- ممان حول هر محوری که عمود بر صفحه کوپل باشد یکسان است (M_z) و حول هر محوری در داخل صفحه باشد صفر است. ($M_x=0, M_y=0$).
- مؤلفه‌های تنش برشی در جهت Y و Z چون نیروی خارجی در این جهتها نداریم (بارگذاری صرفاً خمش خالص است) صفر است.
- این الزامات در جمع بندی مؤلفه‌ها و ممان نیروهای داخلی اولیه نیز کاربرد دارد.

$$\int \sigma_x dA = 0$$

$$\int z \sigma_x dA = 0$$

$$\int -y \sigma_x dA = M_z$$

$$=$$

$$=$$

$$=$$

$$0$$

$$0$$

$$M_z$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 4 - 4/43

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

تغییر شکل‌های خمشی

تیر با یک صفحه تقارن عمودی در خمش خالص

- تیر متقارن باقی خواهد ماند.
- خمش یکنواخت است و تیر به شکل کمانی از یک دایره در خواهد آمد.
- صفحه مقطع از مرکز کمان گذشته و به شکل صفحه باقی خواهد ماند.
- طول تارهای بالایی کاهش و تارهای پایینی افزایش می‌یابد. (با فرض ممان خمشی مثبت)
- یک صفحه **خنثی** موازی صفحه بالا و پایین باید وجود داشته باشد که در آن طول تارها بدون تغییر می‌مانند.
- تنش‌ها و کرنش‌ها در بالای صفحه خنثی منفی (فشاری) و در پایین آن مثبت (کششی) است.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 4 - 5/43

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

کرنش در اثر خمش

یک قطاع تیر به طول L در نظر بگیرید.

بعد از تغییر شکل، طول صفحه خنثی L باقی خواهد ماند. ($DE = L$)

در صفحات دیگر مانند CJK اگر طول تار $L' = JK$ باشد، داریم:

$$L' = (\rho - y)\theta$$

$$\delta = L' - L = (\rho - y)\theta - \rho\theta = -y\theta$$

$$\epsilon_x = \frac{\delta}{L} = -\frac{y\theta}{\rho\theta} = -\frac{y}{\rho}$$

کرنش در امتداد ارتفاع تیر به شکل خطی تغییر می‌کند.

$$\epsilon_m = \frac{c}{\rho} \quad \text{or} \quad \rho = \frac{c}{\epsilon_m}$$

$$\epsilon_x = -\frac{y}{c} \epsilon_m$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 4 - 6/43

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

Flextural Stress (تنش خمشی)

• برای مصالح الاستیک خطی:

$$\sigma_x = E \varepsilon_x = -\frac{y}{c} E \varepsilon_m$$

$$= -\frac{y}{c} \sigma_m$$

تنش نیز در امتداد ارتفاع تیر به شکل خطی تغییر می‌کند.

• برای تعادل ایستایی:

$$M = \int -y \sigma_x dA = \int -y \left(-\frac{y}{c} \sigma_m \right) dA$$

$$M = \frac{\sigma_m}{c} \int y^2 dA = \frac{\sigma_m I}{c}$$

$$\sigma_m = \frac{Mc}{I} = \frac{M}{S}$$

با جایگزینی $\sigma_x = -\frac{y}{c} \sigma_m$ داریم:

$$\sigma_x = -\frac{My}{I} \quad \text{یا} \quad \sigma_x = -\frac{M_z}{I_{zz}} y$$

یعنی تنش برای یک گشتاور مثبت در y مثبت فشاری است.

• برای برقراری تعادل ایستایی:

$$F_x = 0 = \int \sigma_x dA = \int -\frac{y}{c} \sigma_m dA$$

$$0 = -\frac{\sigma_m}{c} \int y dA$$

ممان اول سطح نسبت به تار خنثی صفر است. بنابراین، صفحه خنثی باید از مرکز سطح مقطع عبور کند.

معادلات خمش الاستیک (Elastic flexure formulas)

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 4 - 7/43

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

خواص مقاطع تیرها

• تنش قائم ماکزیمم در اثر خمش:

$$\sigma_m = \frac{Mc}{I} = \frac{M}{S}$$

I = ممان اینرسی مقطع
 $S = I/c$ = مدول (اساس) مقطع

تیری با مدول مقطع بزرگتر تنش ماکزیمم کمتری خواهد داشت.

• یک تیر با سطح مقطع مستطیلی در نظر بگیرید:

$$S = \frac{I}{c} = \frac{\frac{1}{12}bh^3}{h/2} = \frac{1}{6}bh^2 = \frac{1}{6}Ah$$

بین دو تیر با مساحت سطح مقطع یکسان، تیر با عمق بیشتر در مقابل خمش مقاوم‌تر است.

• تی‌های فولادی سازه‌ای را طوری طراحی می‌کنند که مدول مقطع بزرگی داشته باشند.

(a) S-beam (b) W-beam

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالشیری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 4 - 8/43

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

خواص شکل های استاندارد آمریکایی

755

Appendix C. Properties of Rolled-Steel Shapes (SI Units)

S Shapes (American Standard Shapes)

عمق نامی (کمی کمتر از d) (mm) $r_x = \sqrt{I_x/A}$ شعاع ژیراسیون وزن (kg/m)

Designation†	Area A, mm²	Depth d, mm	Flange		Web Thickness t_w, mm	Axis X-X			Axis Y-Y		
			Width b_f, mm	Thick- ness t_f, mm		I_x 10⁸ mm⁴	S_x 10³ mm³	r_x mm	I_y 10⁸ mm⁴	S_y 10³ mm³	r_y mm
S610 × 180	22900	622	204	27.7	20.3	1320	4240	240	34.9	341	39.0
158	20100	622	200	27.7	15.7	1230	3950	247	32.5	321	39.9
149	19000	610	184	22.1	18.9	995	3260	229	20.2	215	32.3
134	17100	610	181	22.1	15.9	938	3080	234	19.0	206	33.0
119	15200	610	178	22.1	12.7	878	2880	240	17.9	198	34.0
S510 × 143	18200	516	183	23.4	20.3	700	2710	196	21.3	228	33.9
128	16400	516	179	23.4	16.8	658	2550	200	19.7	216	34.4
112	14200	508	162	20.2	16.1	530	2090	193	12.6	152	29.5
98.3	12500	508	159	20.2	12.8	495	1950	199	11.8	145	30.4
S460 × 104	13300	457	159	17.6	18.1	385	1685	170	10.4	127	27.5
81.4	10400	457	152	17.6	11.7	333	1460	179	8.83	113	28.8
S380 × 74	9500	381	143	15.6	14.0	201	1060	145	6.65	90.8	26.1
64	8150	381	140	15.8	10.4	185	971	151	6.15	85.7	27.1

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

4 – 9/43

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

تغییر شکل های مقاطع عرضی

• تغییر شکل در اثر ممان خمشی M با شعاع انحنای صفحه خنثی بیان می شود.

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\epsilon_m}{c} = \frac{\sigma_m}{Ec} = \frac{1}{Ec} \frac{Mc}{I} = \frac{M}{EI}$$

$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$

• هرچند در اثر ممان خمشی صفحات مقطع مسطح باقی می ماند، ولی ابعاد صفحه (به سبب وجود نسبت پواسان) تغییر کرده و تغییر شکل های صفحه صفر نیستند.

$$\epsilon_y = -\nu \epsilon_x = \frac{\nu y}{\rho} \quad \epsilon_z = -\nu \epsilon_x = \frac{\nu y}{\rho}$$

• زیاد شدن مساحت سطح بالای تار خنثی و کاهش مساحت سطح زیر آن باعث می شود که یک انحنا در صفحه مقطع داشته باشیم که به آن **انحنای آنتی کلاستیک (جهت عمود بر جهت اصلی)** می گویند:

$$\frac{1}{\rho'} = \frac{\epsilon_z}{y} = \frac{-\nu \epsilon_x}{y} = \frac{\nu y}{y \rho} = \frac{\nu}{\rho} = \text{anticlastic curvature}$$

$\epsilon_x = -\frac{y}{\rho}$ شبیه رابطه

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالشیری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

4 – 10/43

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مسئله نمونه 4.2

حل:

- بر اساس هندسه سطح مقطع، مرکز سطح مقطع و ممان اینرسی مقطع را محاسبه می‌کنیم.

$$\bar{Y} = \frac{\sum \bar{y}A}{\sum A} \quad I_{x'} = \sum (\bar{I} + Ad^2)$$

- از رابطه تنش خمشی تنش‌های کششی و فشاری ماکزیمم را به دست می‌آوریم.

$$\sigma_m = \frac{Mc}{I}$$

- انحناء را محاسبه می‌کنیم.

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$

یک قطعه چدنی از یک ماشین تحت تأثیر کوپل 3 kN-m قرار دارد. اگر $E = 165 \text{ GPa}$ باشد، با چشم‌پوشی از اثر گرده، الف) تنش‌های ماکزیمم کششی و فشاری ب) شعاع انحناء را به دست آورید.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

4 – 11/43

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مسئله نمونه 4.2 (ادامه)

حل:

- بر اساس هندسه سطح مقطع، مرکز سطح مقطع و ممان اینرسی مقطع را محاسبه می‌کنیم.

	Area, mm ²	$\bar{y}$, mm	$\bar{y}A$, mm ³
1	$20 \times 90 = 1800$	50	90×10^3
2	$40 \times 30 = 1200$	20	24×10^3
Σ	$A = 3000$		$\Sigma \bar{y}A = 114 \times 10^3$

$$\bar{Y} = \frac{\sum \bar{y}A}{\sum A} = \frac{114 \times 10^3}{3000} = 38 \text{ mm}$$

$$I_{x'} = \sum (\bar{I} + Ad^2) = \sum \left(\frac{1}{12}bh^3 + Ad^2 \right)$$

$$= \left(\frac{1}{12}90 \times 20^3 + 1800 \times 12^2 \right) + \left(\frac{1}{12}30 \times 40^3 + 1200 \times 18^2 \right)$$

$$I = 868 \times 10^3 \text{ mm}^4 = 868 \times 10^{-9} \text{ m}^4$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

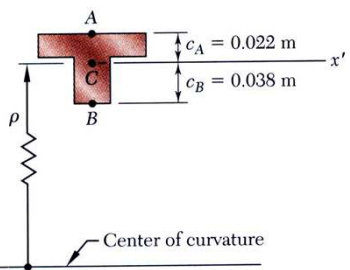
© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

4 – 12/43

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مسئله نمونه 4.2 (ادامه)

• از رابطه تنش خمشی تنش‌های کششی و فشاری ماکزیمم را به دست می‌آوریم.



$$\sigma_m = \frac{Mc}{I}$$

$$\sigma_A = \frac{M c_A}{I} = \frac{3 \text{ kN} \cdot \text{m} \times 0.022 \text{ m}}{868 \times 10^{-9} \text{ m}^4} \quad \sigma_A = +76.0 \text{ MPa}$$

$$\sigma_B = -\frac{M c_B}{I} = -\frac{3 \text{ kN} \cdot \text{m} \times 0.038 \text{ m}}{868 \times 10^{-9} \text{ m}^4} \quad \sigma_B = -131.3 \text{ MPa}$$

• شعاع انحنای را محاسبه می‌کنیم.

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$

$$= \frac{3 \text{ kN} \cdot \text{m}}{(165 \text{ GPa})(868 \times 10^{-9} \text{ m}^4)} \quad \frac{1}{\rho} = 20.95 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1}$$

$$\rho = 47.7 \text{ m}$$

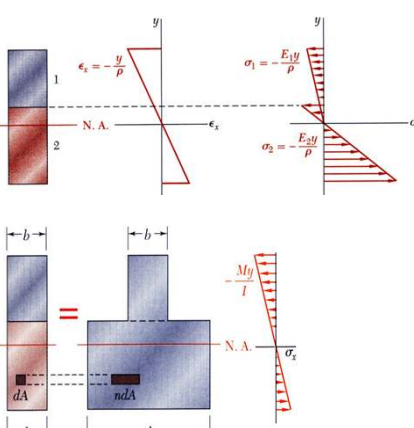
گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

4 – 13/43

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

خمش اعضایی که از چند مصالح ساخته شده‌اند



• یک تیر مرکب که از دو مصالح با E_1 (ضعیفتر) و E_2 (قوی‌تر) ساخته شده است در نظر بگیرید. ($n = \frac{E_2}{E_1} > 1$)

• کرنش قائم به طور خطی تغییر می‌کند.

$$\epsilon_x = -\frac{y}{\rho}$$

• تغییرات تنش قائم خطی در راستای عمق در مصالح مختلف:

$$\sigma_1 = E_1 \epsilon_x = -\frac{E_1 y}{\rho} \quad \sigma_2 = E_2 \epsilon_x = -\frac{E_2 y}{\rho}$$

محور خنثی از مرکز سطح مرکب نمی‌گذرد.

• المان‌های نیرو روی مقطع عبارتند از:

$$dF_1 = \sigma_1 dA = -\frac{E_1 y}{\rho} dA \quad dF_2 = \sigma_2 dA = -\frac{E_2 y}{\rho} dA$$

• یک مقطع تبدیل یافته (معمولاً از جنس ضعیفتر) چنان تعریف می‌کنیم که:

$$dF_2 = -\frac{(nE_1)y}{\rho} dA = -\frac{E_1 y}{\rho} (n dA) \quad n = \frac{E_2}{E_1}$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

4 – 14/43

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مثال 4.03

حل:

- سطح مقطع میله را به یک سطح مقطع معادل که تمام آن از برنج (جنس ضعیفتر) است تبدیل می‌کنیم.
- خواص سطح مقطع معادل را محاسبه می‌کنیم.
- تنش‌های ماکزیمم در سطح مقطع معادل را محاسبه می‌کنیم. این تنش برای قسمت برنجی میله صحیح است.
- تنش ماکزیمم در قسمت فولادی میله را با ضرب تنش ماکزیمم مقطع معادل در نسبت‌های مدول الاستیسیته به دست می‌آوریم.

یک میله از دو جنس فولاد ($E_s = 29 \times 10^6$ Psi) و برنج ($E_b = 15 \times 10^6$ Psi) که به هم کاملاً چسبیده‌اند تشکیل شده است. اگر میله تحت ممان 40 kip.in قرار گیرد، تنش ماکزیمم در فولاد و برنج را به دست آورید.

4 – 15/43

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مثال 4.03 (ادامه)

حل:

- سطح مقطع میله را به یک سطح مقطع معادل که تمام آن از برنج است تبدیل می‌کنیم.

$$n = \frac{E_s}{E_b} = \frac{29 \times 10^6 \text{ psi}}{15 \times 10^6 \text{ psi}} = 1.933$$

عرض مقطع معادل برنجی:

$$b_e = 0.4 \text{ in} + 1.933 \times 0.75 \text{ in} + 0.4 \text{ in} = 2.25 \text{ in}$$

- خواص هندسی سطح مقطع معادل را محاسبه می‌کنیم.

$$I = \frac{1}{12} b_e h^3 = \frac{1}{12} (2.25 \text{ in.}) (3 \text{ in.})^3 = 5.063 \text{ in}^4$$

- تنش‌های ماکزیمم در سطح مقطع معادل را محاسبه می‌کنیم.

$$\sigma_m = \frac{Mc}{I} = \frac{(40 \text{ kip} \cdot \text{in.})(1.5 \text{ in.})}{5.063 \text{ in}^4} = 11.85 \text{ ksi}$$

$(\sigma_b)_{\max} = \sigma_m$
 $(\sigma_s)_{\max} = n \sigma_m = 1.933 \times 11.85 \text{ ksi}$

$(\sigma_b)_{\max} = 11.85 \text{ ksi}$
 $(\sigma_s)_{\max} = 22.9 \text{ ksi}$

اگر مقطع معادل را از جنس ضعیف‌تر انتخاب کنیم، تنش واقعی در جنس قوی‌تر همیشه n برابر تنش در مقطع معادل است.

4 – 16/43

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

تیرهای بتون آرمه (بتنی تقویت شده با میلگردهای فولادی)

- تیرهای بتنی که تحت بارگذاری ممان خمشی هستند با میله‌های فولادی تقویت می‌شوند.
- میله‌های فولادی تمام بار کششی زیر صفحه خنثی را تحمل می‌کنند. بتن بالای تیر بارهای فشاری را تحمل می‌کند.
- در مقطع تبدیل یافته، سطح مقطع فولاد، A_s ، با یک سطح مقطع معادل nA_s جایگزین می‌شود که در آن $n = E_s/E_c$.
- برای به دست آوردن محل تار خنثی داریم:

$$(bx) \frac{x}{2} - n A_s (d - x) = 0$$

زیرا ممان اول سطح بالای محوری که از مرکز سطح می‌گذرد (نسبت به آن محور) با ممان اول سطح زیر محور (نسبت به همان محور) با هم مساویند.

$$\frac{1}{2} b x^2 + n A_s x - n A_s d = 0 \rightarrow x$$

- تنش قائم در بتن و فولاد

$$\sigma_x = -\frac{My}{I}$$

$$\sigma_c = \sigma_x \quad \sigma_s = n \sigma_x$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

4 – 17/43

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مسئله نمونه 4.4

حل:

- سطح مقطع معادل بتن را می‌سازیم.
- خواص هندسی سطح مقطع معادل را محاسبه می‌کنیم.
- تنش‌های ماکزیمم فولاد و بتن را محاسبه می‌کنیم.

یک شناژ بتنی با میلگردهای فولادی به قطر 5/8-in تقویت شده است. مدول الاستیسیته فولاد 29×10^6 Psi و بتن 3.6×10^6 Psi است. با اعمال ممان خمشی 40 kip.in در 1-ft عرض پایه، تنش ماکزیمم بتن و فولاد را به دست آورید.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

4 – 18/43

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مسئله نمونه 4.4 (ادامه)

حل:

- مقطع را به یک مقطع که تمام آن از بتن است تبدیل می کنیم.

$$n = \frac{E_s}{E_c} = \frac{29 \times 10^6 \text{ psi}}{3.6 \times 10^6 \text{ psi}} = 8.06$$

$$nA_s = 8.06 \times 2 \left[\frac{\pi}{4} \left(\frac{5}{8} \text{ in} \right)^2 \right] = 4.95 \text{ in}^2$$

- خواص هندسی سطح مقطع معادل را محاسبه می کنیم.

ممان اول سطوح بالا و پایین محوری که از مرکز سطح می گذرد برابر است:

$$12x \left(\frac{x}{2} \right) - 4.95(4-x) = 0 \quad x = 1.450 \text{ in}$$

ممان اینرسی حول محوری که موازی ضلع پایینی مستطیل است:

$$I = \frac{1}{3} (12 \text{ in}) (1.45 \text{ in})^3 + (4.95 \text{ in}^2) (2.55 \text{ in})^2 = 44.4 \text{ in}^4$$

- تنش های ماکزیمم را محاسبه می کنیم.

فشاری

$$\sigma_c = \frac{Mc_1}{I} = \frac{40 \text{ kip} \cdot \text{in} \times 1.45 \text{ in}}{44.4 \text{ in}^4} \quad \sigma_c = 1.306 \text{ ksi}$$

کششی

$$\sigma_s = n \frac{Mc_2}{I} = 8.06 \frac{40 \text{ kip} \cdot \text{in} \times 2.55 \text{ in}}{44.4 \text{ in}^4} \quad \sigma_s = 18.52 \text{ ksi}$$

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 4 – 19/43

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

بارگذاری خارج از محور در صفحه تقارن

- تنش در اثر بار خارج از محور از محور از جمع آثار تنش یکنواخت در اثر بار محوری و توزیع تنش خطی حاصل از ممان خمشی خالص به دست می آید.

$$\sigma_x = (\sigma_x)_{\text{centric}} + (\sigma_x)_{\text{bending}}$$

$$= \frac{P}{A} - \frac{M_z y}{I_{zz}} \quad \text{or} \quad \pm \frac{P}{A} \pm \frac{M_z y}{I_{zz}}$$

- بارگذاری خارج از محور

$$F = P$$

$$M_z = Pd$$

- این جمع آثار در صورتی معتبر است که تنش ها زیر حد تناسب باشند، اثر تغییر شکل ها روی هندسه قابل چشمپوشی باشد، و تنش ها در نزدیکی نقاط اثر نیرو ارزیابی نشوند.

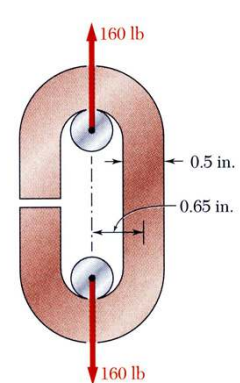
© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 4 – 20/43

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مثال 4.7

حل:

- بار محوری و ممان خمشی معادل را بیابید.
- تنش یکنواخت حاصل از بار محوری و تنش خطی حاصل از ممان خمشی را با استفاده از اصل جمع آثار با هم جمع بنزید.
- با استفاده از توزیع تنش‌های جمع آثار بارها، تنش‌های کششی و فشاری ماکزیمم را در لبه داخلی و خارجی به دست آورید.
- تار خنثی را با دانستن اینکه در موقعیتی است که تنش قائم صفر است به دست آورید.



یک حلقه زنجیر باز با خمش یک میله فولادی کم کربن ساخته شده است. برای بار 160 lb (الف)، تنش‌های ماکزیمم کششی و فشاری، (ب) فاصله بین مرکز سطح تا تار خنثی را به دست آورید.

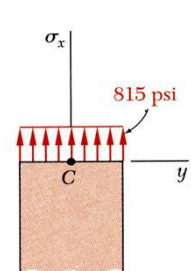
گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

4 – 21/43

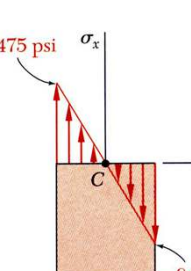
MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مثال 4.7 (ادامه)



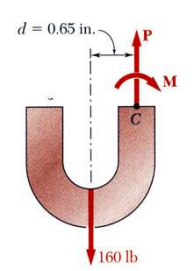
- تنش قائم در اثر بار محوری:

$$A = \pi c^2 = \pi (0.25 \text{ in})^2 = 0.1963 \text{ in}^2$$

$$\sigma_0 = \frac{P}{A} = \frac{160 \text{ lb}}{0.1963 \text{ in}^2} = 815 \text{ Psi}$$


- تنش قائم در اثر ممان خمشی:

$$I = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{1}{4} \pi c^4 = \frac{1}{4} \pi (0.25)^4 = 3.068 \times 10^{-3} \text{ in}^4$$

$$\sigma_m = \frac{Mc}{I} = \frac{(104 \text{ lb} \cdot \text{in})(0.25 \text{ in})}{3.068 \times 10^{-3} \text{ in}^4} = 8475 \text{ Psi}$$


- بار محوری و ممان خمشی معادل:

$$P = 160 \text{ lb}$$

$$M = Pd = (160 \text{ lb})(0.65 \text{ in}) = 104 \text{ lb} \cdot \text{in}$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

4 – 22/43

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مثال 4.7 (ادامه)

• تنش‌های کششی و فشاری ماکزیمم:

$$\sigma_t = \sigma_0 + \sigma_m = 815 + 8475 = 9290 \text{ Psi}$$

$$\sigma_c = \sigma_0 - \sigma_m = 815 - 8475 = -7660 \text{ Psi}$$

• محل تار خنثی:

$$0 = \frac{P}{A} - \frac{My_0}{I}$$

$$y_0 = \frac{P}{A} \frac{I}{M} = (815 \text{ Psi}) \frac{3.068 \times 10^{-3} \text{ in}^4}{104 \text{ lb} \cdot \text{in}}$$

$$y_0 = 0.0240 \text{ in}$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

4 – 23/43

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مسئله نمونه 4.8

بیشترین تنش‌های مجاز برای عضو رابط که از چدن ریخته‌گری ساخته شده است 30 MPa در کشش و 120 MPa در فشار است. بیشترین نیروی P را که می‌توان به عضو رابط وارد کرد به دست آورید.

حل:

- بار محوری و ممان خمشی معادل را به دست آورید.
- تنش در اثر بار محوری و تنش در اثر ممان خمشی را از اصل جمع آثار با هم جمع کنید.
- بار بحرانی برای تنش کششی و فشاری مجاز را به دست آورید.
- بیشترین بار مجاز کوچک‌ترین این دو بار بحرانی است.

از مسئله نمونه 4.2 داریم:

$$A = 3 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$\bar{Y} = 0.038 \text{ m}$$

$$I = 868 \times 10^{-9} \text{ m}^4$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

4 – 24/43

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مسئله نمونه 4.8 (ادامه)

نیروی محوری و ممان خمشی معادل را به دست آورید.

$d = 0.038 - 0.010 = 0.028 \text{ m}$

$P =$ بار محوری

$M = Pd = 0.028P =$ ممان خمشی

تنش در اثر بار محوری و تنش در اثر ممان خمشی را از اصل جمع آثار با هم جمع کنید.

$\sigma_A = -\frac{P}{A} + \frac{Mc_A}{I} = -\frac{P}{3 \times 10^{-3}} + \frac{(0.028P)(0.022)}{868 \times 10^{-9}} = +377P$

$\sigma_B = -\frac{P}{A} - \frac{Mc_B}{I} = -\frac{P}{3 \times 10^{-3}} - \frac{(0.028P)(0.038)}{868 \times 10^{-9}} = -1559P$

بار بحرانی برای تنش کششی و فشاری مجاز را به دست آورید.

$\sigma_A = +377P = 30 \text{ MPa} \quad P = 79.6 \text{ kN}$

$\sigma_B = -1559P = -120 \text{ MPa} \quad P = 77.0 \text{ kN}$

$P = 77.0 \text{ kN}$ کوچکترین P بیشترین بار مجاز است:

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

4 – 25/43

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

خمش غیر متقارن

تحلیل خمش خالص محدود به اعضای بود که تحت **کوپل** ممانی در صفحه تقارن خود بودند.

اعضا متقارن باقی می ماندند و خمش در صفحه تقارن اتفاق می افتاد.

تار خنثی بر محور کوپل منطبق بود.

اکنون حالتی را در نظر می گیریم که **کوپل در صفحه تقارن عمل نمی کند**؛

یا اصلاً صفحه تقارنی وجود ندارد.

نمی توان فرض کرد که خمش در صفحه کوپل اتفاق می افتد.

عموماً، تار خنثی مقطع بر محور کوپل منطبق نیست.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

4 – 26/43

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

خمش غیر متقارن (ادامه)

$0 = F_x = \int \sigma_x dA = \int \left(-\frac{y}{c} \sigma_m \right) dA$
 or $0 = \int y dA$

تار خنثی باید از مرکز سطح بگذرد.

$M = M_z = - \int y \left(-\frac{y}{c} \sigma_m \right) dA$
 or $M = \frac{\sigma_m I}{c}$ $I = I_z$ ممان اینرسی
 $\sigma_m = \frac{Mc}{I}$ توزیع تنش را تعریف می کند.

می خواهیم شرایطی را به دست آوریم که تار خنثی یک مقطع با شکل دلخواه منطبق بر صفحه کوپل باشد همانند شکل.

برآیند نیرو و ممان از توزیع نیروهای المان ها باید معادلات زیر را برآورده سازند.

$0 = M_y = \int z \sigma_x dA = \int z \left(-\frac{y}{c} \sigma_m \right) dA$
 or $0 = \int yz dA = I_{yz}$ ممان اینرسی حاصل ضرب
 بردارهای کوپل باید در راستای محوره های اصلی مقطع باشند.

$F_x = 0, M_y = 0, M_z = M$ کوپل اعمال شده

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

4 – 27/43

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

خمش غیر متقارن (ادامه)

برای به دست آوردن تنش در حالت کلی بارگذاری غیر متقارن اصل جمع آثار به کار می رود. (فرض می شود در محدوده الاستیک هستیم و تغییر شکل های حاصل از یک گشتاور توزیع تنش های حاصل از گشتاور دیگر را تحت تاثیر قرار نمی دهد).

• بردار کوپل را به مؤلفه هایی در راستای محوره های اصلی مقطع تجزیه می کنیم.

$M_z = M \cos \theta$ $M_y = M \sin \theta$

• مؤلفه های توزیع تنش را با هم جمع کنید.

$\sigma_x = -\frac{M_z y}{I_{zz}} + \frac{M_y z}{I_{yy}}$ یا $\sigma_x = \pm \frac{M_z y}{I_{zz}} \pm \frac{M_y z}{I_{yy}}$

• در راستای تار خنثی: $\sigma_x = 0$

$0 = -\frac{M_z y}{I_{zz}} + \frac{M_y z}{I_{yy}} = -\frac{(M \cos \theta) y}{I_z} + \frac{(M \sin \theta) z}{I_y}$

$\tan \phi = \frac{y}{z} = \frac{I_z}{I_y} \tan \theta$

از این رابطه معلوم می شود که اگر $I_z > I_y$ باشد، $\phi > \theta$ است. یعنی تار خنثی همیشه بین محور گشتاور و محوری که ممان اینرسی کمتری دارد قرار می گیرد.

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

4 – 28/43

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

روابط کلی تنش خمشی

اگر Y و Z محوره‌های اصلی نباشند (I_{yz} دیگر صفر نیست):

$$\sigma_x = -\frac{M_z I_{yy} + M_y I_{yz}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} y + \frac{M_y I_{zz} + M_z I_{yz}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} z$$

در این روابط باید علامت جبری ممان‌های خمشی لحاظ گردد تا تنش‌ها نیز از نظر فشاری و کششی بودن مشخص شود.

محل تار خنثی:

$$\sigma_x = 0 \rightarrow y = \frac{M_y I_{zz} + M_z I_{yz}}{M_z I_{yy} + M_y I_{yz}} z = \frac{\frac{M_y}{M_z} I_{zz} + I_{yz}}{I_{yy} + \frac{M_y}{M_z} I_{yz}} z$$

$\beta = \tan^{-1} \frac{I_{zz} \tan \alpha + I_{yz}}{I_{yy} + I_{yz} \tan \alpha}$ زاویه تار خنثی با محور Z

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالشیری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

4 – 29/43

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مثال 4.08

حل:

- بردار کوپل را در راستای محوره‌های اصلی مقطع تجزیه کنید و تنش‌های ماکزیمم را به دست آورید.

$M_z = M \cos \theta \quad M_y = M \sin \theta$

- تنش‌های حاصل از مؤلفه‌های توزیع تنش را ترکیب کنید.

$$\sigma_x = -\frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y}$$

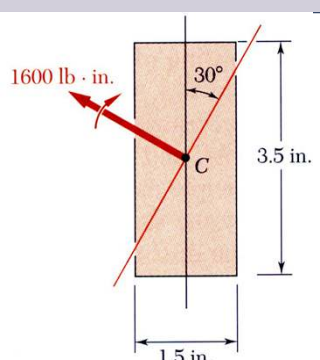
- زاویه تار خنثی را به دست آورید.

$$\tan \phi = \frac{y}{z} = \frac{I_z}{I_y} \tan \theta$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالشیری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

4 – 30/43



کوپل 1600 lb-in در یک صفحه که زاویه 30 درجه با صفحه قائم می‌سازد به یک تیر چوبی با مقطع مستطیلی اعمال می‌شود. الف) تنش ماکزیمم تیر، ب) زاویه‌ای که تار خنثی با صفحه افقی می‌سازد، را به دست آورید.

MECHANICS OF MATERIALS

Beer • Johnston • DeWolf

مثال 4.08 (ادامه)

- بردار کوپل را در راستای محوره‌های اصلی مقطع تجزیه کنید و تنش‌های ماکزیمم را به دست آورید.

The diagram shows a rectangular cross-section with a width of 0.75 in. and a height of 1.75 in. The centroid is at point C. A bending moment M = 1600 lb·in. is applied at an angle theta = 30 degrees to the z-axis. The principal axes are z and y. The corners are labeled A, B, C, D, E.

$$M_z = (1600 \text{ lb} \cdot \text{in}) \cos 30 = 1386 \text{ lb} \cdot \text{in}$$

$$M_y = (1600 \text{ lb} \cdot \text{in}) \sin 30 = 800 \text{ lb} \cdot \text{in}$$

$$I_z = \frac{1}{12} (1.5 \text{ in}) (3.5 \text{ in})^3 = 5.359 \text{ in}^4$$

$$I_y = \frac{1}{12} (3.5 \text{ in}) (1.5 \text{ in})^3 = 0.9844 \text{ in}^4$$

بزرگترین تنش کششی در اثر M_z در امتداد AB اتفاق می‌افتد.

$$\sigma_1 = \frac{M_z y}{I_z} = \frac{(1386 \text{ lb} \cdot \text{in}) (1.75 \text{ in})}{5.359 \text{ in}^4} = 452.6 \text{ Psi}$$

بزرگترین تنش کششی در اثر M_y در امتداد AD اتفاق می‌افتد.

$$\sigma_2 = \frac{M_y z}{I_y} = \frac{(800 \text{ lb} \cdot \text{in}) (0.75 \text{ in})}{0.9844 \text{ in}^4} = 609.5 \text{ Psi}$$

- بزرگترین تنش کششی در اثر بار ترکیبی در A اتفاق می‌افتد.

$$\sigma_{\max} = \sigma_1 + \sigma_2 = 452.6 + 609.5$$

$$\sigma_{\max} = 1062 \text{ Psi}$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

4 - 31/43

Third Edition
 Fundamentals of Mechanics of Materials
 © 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

MECHANICS OF MATERIALS

Beer • Johnston • DeWolf

مثال 4.08 (ادامه)

• زاویه تار خنثی را به دست آورید.

$$\tan \phi = \frac{I_z}{I_y} \tan \theta = \frac{5.359 \text{ in}^4}{0.9844 \text{ in}^4} \tan 30^\circ$$

$$= 3.143$$

$$\phi = 72.4^\circ$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

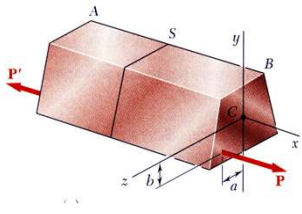
© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

4 - 32/43

MECHANICS OF MATERIALS

Beer • Johnston • DeWolf

حالت کلی بارگذاری غیر محوری



- یک عضو مستقیم که تحت اثر دو نیروی مساوی و مختلف‌الجهت غیر محوری قرار دارد را در نظر بگیرید.
- Z و Y محوره‌های اصلی مقطع است.**
- بار غیر محوری معادل است با یک نیروی محوری و دو کوپل

$$P = \text{بار محوری}$$

$$M_y = Pa \quad M_z = Pb$$

- از اصل جمع آثار، توزیع تنش ترکیب شده عبارت است از:

$$\sigma_x = \frac{P}{A} - \frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y}$$

- تار خنثی روی مقطع قرار دارد و از رابطه زیر موقعیت آن به دست می‌آید.

$$\frac{M_z}{I_z} y - \frac{M_y}{I_y} z = \frac{P}{A}$$

گرآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

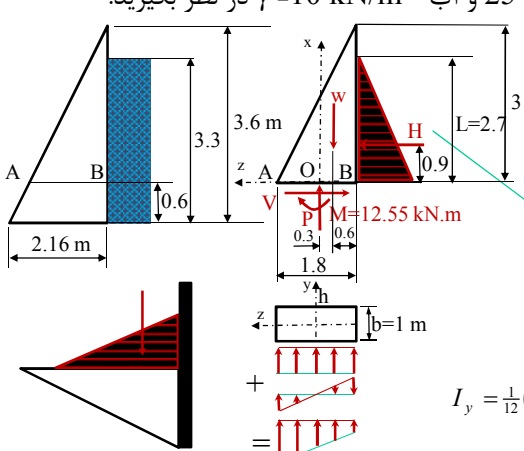
4 – 33/43

MECHANICS OF MATERIALS

Beer • Johnston • DeWolf

سدهای بتنی

مثال: در شکل زیر یک سد بتنی با مقطع مثلثی نشان داده شده است. مطلوب است تعیین توزیع تنش‌های قائم در مقطع AB وقتی که سطح آب در تراز نشان داده شده باشد. در محاسبات یک متر از پهنای سد را در جهت عمود بر صفحه کاغذ به صورت یک تیر مجزا فرض کنید. وزن مخصوص بتن 25 kN/m^3 و آب $\gamma = 10 \text{ kN/m}^3$ در نظر بگیرید.



وزن مخصوص آب $\gamma =$
 فشار در ارتفاع h از سطح آب $\gamma h =$
 فشار ماکزیمم در عمق L $\gamma L =$
 فشار متوسط $\gamma L / 2 =$
 سطحی که این فشار را تحمل می‌کند $S =$

نیروی برآیند فشارهای استاتیک که بر سطح قائم بالادست سد عمل می‌کند.

$$H = \frac{\gamma L}{2} \times S = \frac{10(2.7)}{2} \times 2.7 \times 1$$

پهنای سد

$$I_y = \frac{1}{12} (1\text{m})(1.8\text{m})^3 = 0.486 \text{ m}^4$$

گرآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

4 – 34/43

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

سدهای بتنی (ادامه)

چون منظور تعیین تنش‌های قائم است، از اثر نیروی برشی می‌توان چشم‌پوشی کرد. در این صورت مسئله ترکیبی از نیروی محوری و لنگر خمشی است.

تنش‌های قائم ترکیبی در مقطع A-B را می‌توان با تعیین تنش‌های قائم ناشی از نیروی محوری و لنگر خمشی به طور جداگانه و سپس روی هم گذاری آن‌ها به دست آورد.

$$H = V = \frac{10(2.7)}{2} \times 2.7 \times 1 = 36.4 \text{ kN}$$

$$W = P = \left[\underbrace{\frac{1}{2}(1.8)(3)}_{\text{سطح}} \times \underbrace{1}_{\text{وزن مخصوص بتن}} \right] \times 25 = 67.5 \text{ kN}$$

$$+ \curvearrowright \sum M_o = 0 \quad M_y + W(0.3) - H(0.9) = 0$$

$$M_y = H(0.9) - W(0.3) = (36.4)(0.9) - (67.5)(0.3) = 12.5 \text{ kN.m}$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالشیری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

4 – 35/43

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

سدهای بتنی (ادامه)

$$(\sigma_x)_B = -\frac{W}{A} + \frac{M_y c}{I_y} = -\frac{67.5}{(1.8)(1)} + \frac{(12.5)(0.9)}{0.486} = -37.5 + 23.2 = -14.33 \text{ kN/m}^2 \quad \text{فشاری}$$

$$(\sigma_x)_A = -\frac{W}{A} - \frac{M_y c}{I_y} = -37.5 - 23.2 = -60.7 \text{ kN/m}^2 \quad \text{فشاری}$$

عدم دقت محاسبات فوق!

۱. از آنجا که روابط P/A و My/I تنها در محدوده تیرهای منشوری صادق هستند و در اینجا یک طرف سد به صورت شیبدار می‌باشد، محاسبات زیاد دقیق نیست.

۲. به علاوه سدها در رده تیرهای کوتاه قرار دارند و تحلیلی که بر پایه روابط معمولی قرار داشته باشد برای آن‌ها تقریبی است. به عنوان مثال رابطه $\tau = VQ/It$ (تنش برشی در تیرها) (که بعداً بیان می‌شود) برای محاسبه تنش‌های برشی جواب غلط می‌دهند.

یک نتیجه گیری مهم در مورد سدهای بتنی: در مثال فوق تمام تنش‌های قائمی که در مقطع A-B به دست آمدند، فشاری بودند. حال اگر پهنای پایه سد باریک تر بود مقدار وزن سد و در نتیجه مقدار M بیشتر می‌شد و چه بسا σ_B مثبت و تنش قائم کششی می‌شد. از طرفی بعضی از مصالح مانند بتن بطور قابل توجهی در مقاومت در مقابل تنش‌های کششی ضعیف هستند. حال می‌خواهیم ببینیم ابعاد یک سد بتنی و یا یک پایه از مصالح ساختمانی چقدر باید باشد تا در هنگام تأثیر نیروها، هیچگونه کششی در مصالح ایجاد نشود؟

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

4 – 36/43

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

سدهای بتنی (ادامه)

$\sum F_y = 0 \rightarrow R = P$
 $\sum M_O = 0 \rightarrow M = Pe$

تنش فشاری محوری $(\sigma_B)_P = \frac{P}{A} = \frac{P}{bh}$
 تنش خمشی $(\sigma_B)_M = \frac{Mc}{I} = \frac{Pe \frac{h}{2}}{\frac{bh^3}{12}} = \frac{6Pe}{bh^2}$
 برای این که تنش کششی بوجود نیاید:
 $\sigma_B = -\frac{P}{bh} + \frac{6Pe}{bh^2} \leq 0 \rightarrow e \leq \frac{h}{6}$

گرآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالشیری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

4 – 37/43

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

سدهای بتنی (ادامه)

بنابراین قانون مخصوصی که باید توسط طراحان سدها و یا سازه‌های ساختمانی مشابه رعایت گردد، می‌تواند به صورت زیر بیان شود:

اگر برآیند تمام نیروهای قائم در یک سوم میانی (1/6) یک مقطع مستطیلی تأثیر کند، هیچگونه کششی در مصالح آن مقطع بوجود نمی‌آید.

باید توجه کرد که نیروی برآیند در صفحه قائمی که یکی از محوره‌های تقارن سطح مقطع مستطیلی در آن قرار دارد عمل می‌کند.

اگر P مایل باشد، باید مؤلفه قائم آن شرط را برآورده کند.

پس به طور کلی:

اگر برآیند نیروهایی که در بالای یک مقطع مستطیلی تأثیر می‌کنند یکی از محوره‌های تقارن مقطع را در ناحیه یک سوم میانی مقطع قطع کند، هیچگونه کششی در مقطع بوجود نمی‌آید.

گرآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالشیری

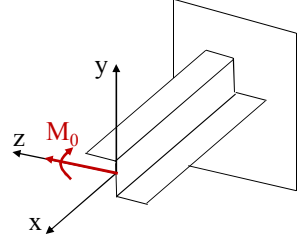
© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

4 – 38/43

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مثال 4.10

یک کوپل خمشی به اندازه $M_0 = 1.5 \text{ kN.m}$ در صفحه قائم به یک تیر Z شکل مطابق شکل اعمال می‌شود. الف: تنش در نقطه A ب: زاویه محور خنثی با صفحه افقی را به دست آورید.



$$I_y = 3.25 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$I_z = 4.18 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$I_{yz} = 2.87 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

مسئله را از دو راه می‌توان حل کرد:

۱- به دست آوردن محورهای اصلی u و v و استفاده از رابطه:

$$\sigma_x = -\frac{M_v u}{I_{vv}} + \frac{M_u v}{I_{uu}}$$

۲- از رابطه کلی:

$$\sigma_x = -\frac{M_z I_{yy} + M_y I_{yz}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} y + \frac{M_y I_{zz} + M_z I_{yz}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} z$$

گرادآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

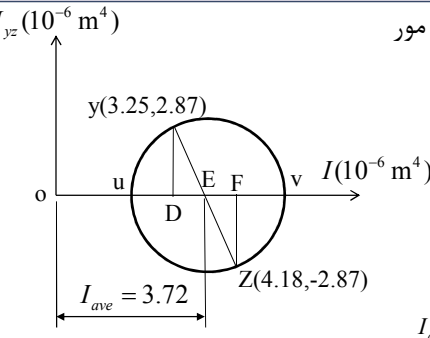
© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

4 - 39/43

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مثال 4.10 (ادامه)

راه اول: استفاده از روابط جبری تبدیل و یا دایره مور



$$I_{x'} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta - I_{xy} \sin 2\theta$$

$$I_{y'} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta + I_{xy} \sin 2\theta$$

$$I_{x'y'} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\theta + I_{xy} \cos 2\theta$$

دقت شود که در اینجا مختصات x-y با y و -z جایگزین شده. اگر جهت z به طرف چپ نبود مختصات Z را I_z و I_{zy} می‌گرفتیم که با تنش متفاوت است.

$$I_{ave} = \frac{I_y + I_z}{2} = \frac{3.25 + 4.18}{2} = 3.72$$

$$\tan 2\theta_p = \frac{I_{zy}}{I_z - I_y} = \frac{2.87}{4.18 - 3.25} \rightarrow 2\theta_p = 80.8^\circ \rightarrow \theta_p = 40.4^\circ$$

$$R^2 = \left(\frac{I_z - I_y}{2}\right)^2 + I_{zy}^2 = \left(\frac{4.18 - 3.25}{2}\right)^2 + (2.87)^2 \rightarrow R = 2.91 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$I_u = I_{\min} = ou = I_{ave} - R = (3.72 - 2.91) \times 10^{-6} = 0.81 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$I_v = I_{\max} = ov = I_{ave} + R = (3.72 + 2.91) \times 10^{-6} = 6.63 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

از روابط جبری تبدیل فوق نیز این مقادیر به دست می‌آیند که از رابطه اول I مینیمم به دست می‌آید.

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

4 - 40/43

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مثال 4.10 (ادامه)

$M_u = M_0 \sin \theta_p = 1500 \sin 40.4^\circ = 972 \text{ N.m}$
 $M_v = M_0 \cos \theta_p = 1500 \cos 40.4^\circ = 1142 \text{ N.m}$

$u_A = y_A \cos \theta_p + z_A \sin \theta_p = 50 \cos 40.4^\circ + 74 \sin 40.4^\circ = 86 \text{ mm}$
 $v_A = -y_A \sin \theta_p + z_A \cos \theta_p = -50 \sin 40.4^\circ + 74 \cos 40.4^\circ = 23.9 \text{ mm}$

$\sigma_A = \frac{M_u v_A}{I_u} - \frac{M_v u_A}{I_v} = \frac{(972 \text{ N.m})(0.0239 \text{ m})}{0.81 \times 10^{-6} \text{ m}^4} - \frac{(1142 \text{ N.m})(0.086 \text{ m})}{6.63 \times 10^{-6} \text{ m}^4}$
 $\sigma_A = 28.68 - 14.81 = 13.87 \text{ MPa}$

$\sigma_A = 0 \rightarrow u = \frac{I_v}{I_u} \frac{M_u}{M_v} v = \frac{I_v}{I_u} \tan \theta_p v = \tan \phi v$
 $\tan \phi = \frac{I_v}{I_u} \tan \theta_p = \frac{6.63}{0.81} \tan 40.4^\circ \rightarrow \phi = 81.8^\circ \quad \beta = 81.8^\circ - 40.4^\circ = 41.4^\circ$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالشیری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

4 – 41/43

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مثال 4.10 (ادامه)

راه دوم:

$\sigma_x = -\frac{M_z I_{yy} + M_y I_{yz}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} y + \frac{M_y I_{zz} + M_z I_{yz}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2} z$

$\sigma_x = -\frac{(1.5 \text{ kN.m})(3.25 \times 10^{-6})}{(3.25 \times 10^{-6})(4.18 \times 10^{-6}) - (2.87 \times 10^{-6})^2} (0.05) + \frac{(1.5 \text{ kN.m})(2.87 \times 10^{-6})}{(3.25 \times 10^{-6})(4.18 \times 10^{-6}) - (2.87 \times 10^{-6})^2} (0.074)$
 $= 13.99 \text{ MPa}$

زاویه تار خنثی:

$\beta = \tan^{-1} \frac{I_{zz} \tan \theta + I_{yz}}{I_{yy} + I_{yz} \tan \theta}$

چون فقط M_z داریم، بنابراین $\tan \theta = 0$

$\beta = \tan^{-1} \left(\frac{I_{yz}}{I_{yy}} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{2.87}{3.25} \right) = 41.4^\circ$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالشیری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

4 – 42/43

