

## 3.12- تانسور تنش در مختصات عمومی (Stress Tensor in General Coordinates)



© M.H. Abolbashari, Ferdowsi University of Mashhad

همچنانکه یک بردار در فضای سه بعدی اقلیدسی می‌تواند کنتراورینت یا کوارینت باشد، تانسور تنش هم می‌تواند کنتراورینت  $\tau^{ij}$ ، مخلوط  $\tau_j^i$  و یا کوارینت  $\tau_{ij}$  باشد.

تانسورهای  $\tau^{ij}$ ،  $\tau_j^i$  و  $\tau_{ij}$  به شکل زیر به هم مربوط می‌شوند.

اثبات صحت روابط:

ثابت می‌کنیم این روابط تانسوری‌اند و در کارتزین صادق‌اند.

$$\begin{aligned} \tau_j^i &= g_{\alpha j} \tau^{i\alpha} = g_{\alpha j} \tau^{ai} \\ \tau_{ij} &= g_{i\alpha} \tau_j^\alpha \\ \tau^{ij} &= g^{i\alpha} \tau_\alpha^j \end{aligned} \quad \begin{aligned} &= \delta_{\alpha j} \tau^{ai} = \delta_{\alpha j} \tau_\alpha^i = \tau_j^i \\ &= \delta_{i\alpha} \tau_j^\alpha = \delta_{i\alpha} \tau_{\alpha j} = \tau_{ij} \\ &= \delta^{i\alpha} \tau_\alpha^j = \delta^{i\alpha} \tau^{\alpha j} = \tau^{ij} \end{aligned}$$

$$\bar{\tau}_j^i = \bar{g}_{\alpha j} \bar{\tau}^{i\alpha} = g_{mn} \frac{\partial \theta^n}{\partial \bar{\theta}_\alpha} \frac{\partial \theta^m}{\partial \bar{\theta}_j} \tau^{k\beta} \frac{\partial \bar{\theta}^i}{\partial \theta_k} \frac{\partial \bar{\theta}^\alpha}{\partial \theta_\beta} = g_{mn} \tau^{k\beta} \delta_\beta^n \frac{\partial \theta^m}{\partial \bar{\theta}_j} \frac{\partial \bar{\theta}^i}{\partial \theta_k}$$

بنابراین دو طرف معادله تانسورهای مخلوط‌اند.

دیدیم که  $\tau_{ij}$  در سیستم مختصات کارتزین متعامد متقارن است.

بنابراین  $\tau^{ji} = \tau_{ij}$  در سیستم‌های مختصات قابل قبول دیگر هم برقرار است.

به طور مشابه:  $\tau_{ij} = \tau_{ji}$

ما مجاز هستیم که تانسور مخلوط را به شکل  $\tau_j^i$  بنویسیم و نه به شکل  $\tau_j^i$  یا  $\tau_j^i$  این‌که بگوییم تانسور مخلوط  $\tau_j^i$  متقارن است بی‌معنی است؛ زیرا معادله‌ای مانند  $\tau_j^i = \tau_i^j$  با توجه به قانون الزام یکسان بودن محل اندیس‌ها در دو طرف یک معادله تانسوری، یک معادله تانسوری نیست.

اکنون ببینیم معنی فیزیکی هر یک از این مؤلفه‌ها چیست؟



**معنی مؤلفه‌های تنش در یک سیستم مختصات منحنی الخط دلخواه**

ابتدا یک رابطه هندسی را در نظر بگیرید.  
 یک هرم کوچک در نظر می‌گیریم که  
 یال‌های آن منحنی‌های مختصات  $PP_1$ ,  
 $PP_2$  و  $PP_3$  و منحنی‌های  $P_1P_2$ ,  
 $P_1P_3$  و  $P_2P_3$  است.  
 به شکل برداری می‌توانیم بنویسیم:  
**چون هرم را کوچک فرض کرده‌ایم:**  
 $\overrightarrow{pp_1} = \vec{r}_1$ ,  $\overrightarrow{pp_2} = \vec{r}_2$ ,  $\overrightarrow{pp_3} = \vec{r}_3$   
 آنگاه:  
 $\overrightarrow{p_1p_2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ ,  $\overrightarrow{p_1p_3} = \vec{r}_3 - \vec{r}_1$ ,  $\overrightarrow{p_2p_3} = \vec{r}_3 - \vec{r}_2$   
 و داریم:  
 (2)  $\overrightarrow{p_1p_2} \times \overrightarrow{p_1p_3} = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times (\vec{r}_3 - \vec{r}_1)$

یک هرم کوچک

علامت منفی بردارها  
 یعنی عمل داخلی  
 روی مواد خارج از سطح

Fig. 3.12:1. Geometric relationship.

سطح متوازی الاضلاعی که  $\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = r_1 r_2 \sin \theta$   
 اضلاع آن هر یک از بردارهاست

area of one face

$= -\vec{r}_1 \times \vec{r}_3 - \vec{r}_2 \times \vec{r}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{r}_3 = \vec{r}_2 \times \vec{r}_3 + \vec{r}_3 \times \vec{r}_1 + \vec{r}_1 \times \vec{r}_2$   
 $= 2(\vec{v}_1 ds_1) + 2(\vec{v}_2 ds_2) + 2(\vec{v}_3 ds_3)$

3/20

بنابراین، اگر بردار  $\vec{v}$  عمود بر سطح‌های  $PP_1P_2$ ,  $PP_2P_3$ ,  $PP_3P_1$  را به ترتیب با  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$  و مساحت آن‌ها را با  $dS_1, dS_2, dS_3$  نشان دهیم، معادله (2) را می‌توان به شکل زیر نوشت:

(3)  $\vec{v} dS = \vec{v}_1 dS_1 + \vec{v}_2 dS_2 + \vec{v}_3 dS_3$

یادآور می‌شویم که بردارهای مبنای کنتراورینت  $\vec{g}^1, \vec{g}^2, \vec{g}^3$  (reciprocal) را که به صفحات مختصات عمود بودند و طول آن‌ها به ترتیب  $\sqrt{g^{11}}, \sqrt{g^{22}}, \sqrt{g^{33}}$  بود در بخش 2.14 تعریف کردیم. می‌بینیم که بردارهای  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$  به ترتیب عبارتند از  $\vec{g}^1 / \sqrt{g^{11}}, \vec{g}^2 / \sqrt{g^{22}}$  و  $\vec{g}^3 / \sqrt{g^{33}}$

بنابراین:

(4)  $\vec{v} dS = \sum_{i=1}^3 \frac{dS_i}{\sqrt{g^{ii}}} \vec{g}^i$

اگر بردار  $\vec{v}$  یک بر حسب مؤلفه‌های کوارینت و بر مبنای بردارهای مبنای کنتراورینت نوشته شود، آنگاه:

(5)  $\vec{v} = v_i \vec{g}^i$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

4/20

از دو معادله آخر داریم:

$$(6) \quad v_i \sqrt{g^{ii}} dS = dS_i, \quad i \text{ not summed.}$$

این همان نتیجه مورد نظر است (یک رابطه هندسی).

معادله حرکت این هرم کوچک در حد عبارت است از:

$$(7) \quad \vec{T} dS = \vec{T} dS_i \quad (\text{معادله برداری})$$

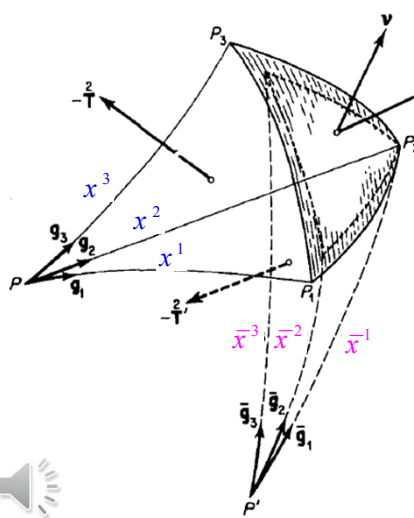
نیروهای حجمی (X) و نیروهای اینرسی (mass(m) × acceleration(a)) که به هرم اثر می کنند به جهت کوچکی اندازه آن ها در مقایسه با نیروهای سطحی، در معادله وارد نمی شوند.

با جایگزینی (6) در (7) و حذف ضریب غیر صفر dS داریم:

$$(8) \quad \vec{T} = \sum_{i=1}^3 \vec{T} v_i \sqrt{g^{ii}} = \vec{T} v_1 \sqrt{g^{11}} + \vec{T} v_2 \sqrt{g^{22}} + \vec{T} v_3 \sqrt{g^{33}}$$

5/20

اگر مختصات  $x_i$  به یک مختصات جدید  $\bar{x}^i$  تغییر یابد در حالی که صفحه  $P_1 P_2 P_3$  ثابت باشد، بردار یک عمود خارج از سطح  $\vec{v}$  بدون تغییر می ماند و همچنین بردار تنش  $\vec{T}$  نیز نامتغیر است ولی بردارهای  $\vec{T}$  تغییر خواهند کرد زیرا مربوط به صفحات مختصات جدید می شوند. مؤلفه های کوارینت  $v_i$  نیز تغییر می کنند. از آنجا که  $\vec{T}$  نامتغیر و  $v_i$  یک تانسور کوارینت است، معادله (8) نشان می دهد که  $\vec{T} \sqrt{g^{ii}}$  بر اساس یک انتقال کنتراورینت انتقال می یابد.



$$(8) \quad \vec{T} = \sum_{i=1}^3 \vec{T} \sqrt{g^{ii}} v_i$$

بردار      تانسور کوارینت  
تانسور کنتراورینت

$$\vec{T} \sqrt{g^{11}} = \tau^{??} \vec{g}_j \xrightarrow{\vec{v} = v^j \vec{g}_j} \tau^{1j} \vec{g}_j \quad \text{یا}$$

$$\vec{T} \sqrt{g^{ii}} = \tau^{ij} \vec{g}_j \quad (i \text{ not summed})$$

$$\vec{T} \sqrt{g^{11}} = \tau^{11} \vec{g}_1 + \tau^{12} \vec{g}_2 + \tau^{13} \vec{g}_3$$

Fig. 3.12:2. Tractions referred to two different elementary tetrahedron with a common surface.

6/20

بنابراین:

$$\vec{T} = \tau^{ij} \vec{g}_j v_i \quad \text{همچنین} \quad \vec{T} = T^i \vec{g}_i$$

$$= (\tau^{11} \vec{g}_1 + \tau^{12} \vec{g}_2 + \tau^{13} \vec{g}_3) v_1 + (\tau^{21} \vec{g}_1 + \tau^{22} \vec{g}_2 + \tau^{23} \vec{g}_3) v_2 +$$

$$(\tau^{31} \vec{g}_1 + \tau^{32} \vec{g}_2 + \tau^{33} \vec{g}_3) v_3 = T^1 \vec{g}_1 + T^2 \vec{g}_2 + T^3 \vec{g}_3$$

$$T^1 = \tau^{11} v_1 + \tau^{21} v_2 + \tau^{31} v_3 = \tau^{i1} v_i$$

$T^j = \tau^{ij} v_i$

(11-a)

از اسلاید قبل داریم:

$$T^i \sqrt{g^{ii}} = \tau^{ij} \vec{g}_j \xrightarrow[\tau^{ij} = g^{i\alpha} \tau_{\alpha}^j]{\text{From Eq. (1)}} = g^{i\alpha} \tau_{\alpha}^j \vec{g}_j = \vec{g}^i \cdot \vec{g}^{\alpha} \vec{g}_j \tau_{\alpha}^j = \delta_j^{\alpha} \vec{g}^{\alpha} \tau_{\alpha}^j = \tau_{\alpha}^i \vec{g}^{\alpha} \quad (9)$$

می دانیم:

$$\vec{T} = \sum_{i=1}^3 T^i \sqrt{g^{ii}} \vec{g}_i = T^j \vec{g}_j = T_j \vec{g}^j = \tau^{ij} \vec{g}_j v_i = \tau_j^i \vec{g}^j v_i$$

$T_j = \tau_j^i v_i$

(11-b)

ویژگی تانسوری  $\tau_j^i$  و  $T_j$  از معادله (9) و (11) و بر اساس قاعده کوشنت مشخص می شود.

از قانون انتقال  $\tau_j^i$  و  $\tau^{ij}$  و  $v_i$  معادله (11) را می توان به شکل معادله (12) بازنویسی کرد. در حالی که  $v_i$  مؤلفه کوارینت  $\vec{v}$  است.

$T^j = \tau_j^i v^i, \quad T_j = \tau_{ij} v^i$

(12)

این روابط را به دست خواهیم آورد.

7/20

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

نکات مهم را بار دیگر یادآور می شویم.

با ضریب بزرگنمایی  $\sqrt{g^{ii}}$  بردارهای  $\vec{T} \sqrt{g^{ii}}$  ( $i = 1, 2, 3$ , not summed) بر اساس قاعده کنتراورینت انتقال می یابد.

با توجه به رابطه (9)

$$T^i \sqrt{g^{ii}} = \tau^{ij} \vec{g}_j \xrightarrow[\tau^{ij} = g^{i\alpha} \tau_{\alpha}^j]{\text{From Eq. (1)}} = g^{i\alpha} \tau_{\alpha}^j \vec{g}_j = \vec{g}^i \cdot \vec{g}^{\alpha} \vec{g}_j \tau_{\alpha}^j = \delta_j^{\alpha} \vec{g}^{\alpha} \tau_{\alpha}^j = \tau_{\alpha}^i \vec{g}^{\alpha}$$

اگر بردارهای  $T^i \sqrt{g^{ii}}$  به مؤلفه هایشان در امتداد بردارهای مبنا  $\vec{g}_j$  تجزیه شوند، مؤلفه های تانسوری  $\tau_j^i$  به دست می آیند. اگر تجزیه در امتداد بردارهای مبنای کنتراورینت  $\vec{g}^j$  انجام شود، آنگاه تانسور مخلوط  $\tau_j^i$  به دست می آید.

از طرف دیگر، اگر بردار تنش  $\vec{T}$  (که روی مثلث  $P_1 P_2 P_3$  که بردار عمود خارج از صفحه آن  $\vec{v}$  است اثر می کند) بر حسب مؤلفه های کنتراورینت  $T^j$  در امتداد بردارهای مبنای  $\vec{g}_j$  و مؤلفه های کوارینت  $T_j$  در امتداد بردارهای مبنای کنتراورینت  $\vec{g}^j$  تجزیه شود، آنگاه معادله (11) به دست می آید.

$T^j = \tau_j^i v_i$

(11)

$T_j = \tau_{ij} v^i$

8/20

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

**رابطه  $\tau_{ij}$  با  $\vec{T}$**

از روابط تانسورهای تنش داشتیم:

$$\tau_j^i = g_{\alpha j} \tau^{\alpha i} = g_{\alpha j} \tau^{\alpha i}, \quad \tau_{ij} = g_{i\alpha} \tau_j^\alpha, \quad \tau^{ij} = g^{i\alpha} \tau_\alpha^j$$

همچنین یک بردار را می‌توان به دو شکل زیر نوشت:

$$\vec{v} = v_i \vec{g}^i = v^i \vec{g}_i$$

از روابط (11):  $T_j^\nu = \tau_j^i v_i$  و  $T_j^\nu = \tau_j^i v_i$  داریم:

$$\begin{aligned} T_j^\nu &= \tau_j^i v_i = g^{i\alpha} \tau_\alpha^j v_i = g^i \cdot g^\alpha \tau_\alpha^j v_i = g_i \cdot g^\alpha \tau_\alpha^j v^i \\ &= g_i^\alpha \tau_\alpha^j v^i = \delta_i^\alpha \tau_\alpha^j v^i = \tau_i^j v^i \end{aligned} \quad (12-a)$$

یا

$$\begin{aligned} T_j^\nu &= \tau_j^i v_i = g_{\alpha j} \tau^{\alpha i} v_i = g_{\alpha j} g^{i\beta} \tau_\beta^\alpha v_i = g_{\alpha j} g^i \cdot g^\beta \tau_\beta^\alpha v_i \\ &= g_{\alpha j} g_i^\beta \tau_\beta^\alpha v^i = g_{\alpha j} \delta_i^\beta \tau_\beta^\alpha v^i = g_{\alpha j} \tau_i^\alpha v^i = \tau_{ij} v^i \end{aligned} \quad (12-b)$$

9/20

**اهمیت مؤلفه‌های تنش  $(\tau^{ij}, \tau_j^i, \tau_{ij})$**

تانسورهای تنش کنترارینت  $\tau^{ij}$  و تانسورهای تنش مخلوط  $\tau_j^i$  توسط رابطه (9) به بردارهای تنش  $\vec{T}$  مربوط می‌شوند.

$$(9) \quad \vec{T}^i \sqrt{g^{ii}} = \tau^{ij} \vec{g}_j = \tau_j^i \vec{g}^j \quad (i = 1, 2, 3, \text{ not summed})$$

تانسور تنش کوارینت  $\tau_{ij}$  را که در معادله (1) تعریف شد، نمی‌توان به سادگی به بردار  $\vec{T}$  مربوط کرد و بنابراین از اهمیت کمتری برخوردار است.

در واقع به مؤلفه‌های کوارینت تنش در صفحه‌ای که عمود بر آن  $\vec{v}$  است  $(\vec{T}_j^\nu)$  بستگی دارد.

$$(12) \quad T_j^\nu = \tau_{ij} v^i$$

10/20

### 3.13- مؤلفه‌های فیزیکی تانسور تنش در مختصات عمومی

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

اگر معادله (9)  $(\vec{T} \cdot \sqrt{g^{ii}} = \tau^{ij} \vec{g}_j = \tau^i_j g^j, i \text{ not summed})$  را به شکل زیر بنویسیم، داریم:

$$(1) \quad \vec{T} = \sum_{j=1}^3 \sqrt{\frac{g_{jj}}{g^{ii}}} \tau^{ij} \frac{\vec{g}_j}{\sqrt{g_{jj}}} = \sum_{j=1}^3 \sigma^{ij} \frac{\vec{g}_j}{\sqrt{g_{jj}}}, \quad i \text{ not summed}$$

$$T^1 = \sigma^{11} \frac{g_1}{\sqrt{g_{11}}} + \sigma^{12} \frac{g_2}{\sqrt{g_{22}}} + \sigma^{13} \frac{g_3}{\sqrt{g_{33}}}$$

به عنوان مثال:

آنگاه، از آنجا که  $\vec{g}_j / \sqrt{g_{jj}}$  (j not summed) بردار یکه در امتداد منحنی مختصات است، مؤلفه‌های  $\sigma^{ij}$  از نظر دیمانسیون فیزیکی یکسانند و مؤلفه‌های فیزیکی بردار تنش  $\vec{T}$  در امتداد بردارهای یکه  $\vec{g}_j / \sqrt{g_{jj}}$  است.

$$(2) \quad \sigma^{ij} = \sqrt{\frac{g_{jj}}{g^{ii}}} \tau^{ij}, \quad i, j \text{ not summed} \xrightarrow{j=2} \sigma^{12} = \sqrt{\frac{g_{22}}{g^{11}}} \tau^{12}$$

ولی  $\sigma^{ij}$  تانسور نیست.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

12/20

از طرف دیگر، اگر از تانسور مخلوط  $\tau_j^i$  معادله (9) استفاده کنیم، داریم:

$$(\vec{T} \sqrt{g^{ii}} = \tau_j^i g_j^i = \tau_j^i g_j^i, \quad i \text{ not summed})$$

$$(3) \quad \vec{T} = \sum_{j=1}^3 \sqrt{\frac{g^{jj}}{g^{ii}}} \tau_j^i \frac{\vec{g}^j}{\sqrt{g^{jj}}} = \sum_{j=1}^3 \sigma_j^i \frac{\vec{g}^j}{\sqrt{g^{jj}}}, \quad i \text{ not summed}$$

$$T^1 = \sigma_1^1 \frac{g^1}{\sqrt{g^{11}}} + \sigma_2^1 \frac{g^2}{\sqrt{g^{22}}} + \sigma_3^1 \frac{g^3}{\sqrt{g^{33}}}$$

بنابراین:

$$(4) \quad \sigma_j^i = \sqrt{\frac{g^{ij}}{g^{ii}}} \tau_j^i, \quad i, j \text{ not summed} \xrightarrow{i=1, j=2} \sigma_2^1 = \sqrt{\frac{g^{22}}{g^{11}}} \tau_2^1$$

مؤلفه‌های فیزیکی تانسور  $\tau_j^i$  است و دیمانسیون فیزیکی یکسانی دارند. آن‌ها را مؤلفه‌های فیزیکی بردار تنش  $\vec{T}$  می‌گویند وقتی در امتداد بردارهای مبنای کنتراورینت تجزیه شوند.

توجه کنید که در حالت کلی  $\sigma_j^i \neq \sigma^{ij}$  است به جز محورهای متعامد. وقتی مختصات متعامدند  $g^i$  و  $g_i$  در یک امتدادند.

اگر مختصات متعامد باشند، مؤلفه‌های فیزیکی تانسورهای کنتراورینت و مخلوط تنش یکسانند.

$$\sigma^{ij} = \sigma_j^i$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

13/20

به عنوان مثال در استوانه‌ای داریم:

$$\sigma_2^1 = \sqrt{\frac{g^{22}}{g^{11}}} \tau_2^1 = \sqrt{\frac{1/r^2}{1}} \tau_2^1 = \frac{1}{r} \tau_2^1 = \frac{1}{r} g_{\alpha 2} \tau^{1\alpha} = \frac{1}{r} (g_{12} \tau^{11} + g_{22} \tau^{12} + g_{32} \tau^{13}) = \frac{1}{r} r^2 \tau^{12} = r \tau^{12}$$

$$\sigma^{12} = \sqrt{\frac{g_{22}}{g^{11}}} \tau^{12} = \sqrt{\frac{r^2}{1}} \tau^{12} = r \tau^{12}$$

وقتی مختصات منحنی‌الخط باشد، می‌خواهیم بدون توجه به دیمانسیون، در انتخاب محورهای مختصات آزادی داشته باشیم.

به عنوان مثال، در مختصات استوانه‌ای  $(r, \theta, z)$  و  $r$  و  $z$  دیمانسیون طول و  $\theta$  دیمانسیون زاویه دارد.

مؤلفه‌های تانسوری یک بردار در سیستم مختصات استوانه‌ای دیمانسیون‌های متفاوتی دارند.

برای فهم فیزیکی باید مؤلفه‌های فیزیکی را به کار ببریم، ولی برای سهولت تحلیل کاربرد مؤلفه‌های تانسوری بسیار راحت‌تر است.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

14/20

## 3.14- معادلات تعادل در مختصات منحنی الخط (Equations of Equilibrium in Curvilinear Coordinates)

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

در بخش 3.4 معادله تعادل را بر حسب تانسورهای کارتیزین در مختصات کارتیزین متعامد بیان کردیم:

$$\frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} + X_i = 0$$

برای به دست آوردن این معادلات در هر سیستم مختصات منحنی الخط، باید معادله تعادل به شکل تانسوری نوشته شود.

بنابراین معادلات تعادل باید به شکل زیر نوشته شوند.

$$\begin{aligned} \tau_{ji}^{\theta} \Big|_j + X_i^{\theta} &= 0, \quad \text{in Volume} & \tau_{ji}^{\theta} \Big|_j + X_i^{\theta} &= 0, \quad \text{in Volume} \\ \tau_{ji}^{\theta} v_j^{\theta} &= T_i^{\theta}, \quad \text{on Surface} & \tau_{ji}^{\theta} v_j^{\theta} &= T_i^{\theta}, \quad \text{on Surface} \end{aligned}$$

رابطه  $\tau_{ji}^{\theta} v_j^{\theta} = T_i^{\theta}$  را نمی‌نویسیم زیرا در مختصاتی هستیم که نیرو را با  $X^i$  نشان دادیم و  $T_i^{\theta}$  نداریم.

اثبات:

- این معادلات تانسوری‌اند.
- این معادلات در یک سیستم مختصات خاص کارتیزین متعامد برقرارند.
- بنابراین، در هر سیستم مختصاتی که بتواند از انتقال قابل قبول سیستم مختصات کارتیزین متعامد به دست آید معتبر است.

### رابطه تعادل در مختصات استوانه‌ای $(r, \theta, z)$

$$-X^i = \tau^{ij} \Big|_j = \frac{\partial \tau^{ij}}{\partial x^j} + \Gamma_{\sigma j}^i \tau^{\sigma j} + \Gamma_{\sigma j}^j \tau^{i\sigma}$$

$$-X^1 = \frac{\partial \tau^{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial \tau^{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial \tau^{13}}{\partial x^3} + \Gamma_{1j}^1 \tau^{1j} + \Gamma_{2j}^1 \tau^{2j} + \Gamma_{3j}^1 \tau^{3j} + \Gamma_{1j}^j \tau^{11} + \Gamma_{2j}^j \tau^{12} + \Gamma_{3j}^j \tau^{13}$$

در مختصات استوانه‌ای داریم:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \Gamma_{22}^1 = -r, \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{r}, \text{ and other } \Gamma_{jk}^i = 0$$

$$-X^1 = \frac{\partial \tau^{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial \tau^{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial \tau^{13}}{\partial x^3} + 0 + \Gamma_{22}^1 \tau^{22} + 0 + \Gamma_{12}^2 \tau^{11} + 0 + 0$$

$$-X^1 = \frac{\partial \tau^{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial \tau^{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial \tau^{13}}{\partial x^3} - r \tau^{22} + \frac{1}{r} \tau^{11}$$

$$-X^r = \frac{\partial \tau^{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \tau^{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau^{rz}}{\partial z} - r \tau^{\theta\theta} + \frac{\tau^{rr}}{r}$$

این معادله بر حسب مؤلفه‌های تانسوری است.

17/20

اگر بخواهیم معادله را بر حسب مؤلفه‌های فیزیکی بنویسیم داریم:

$$F^r = \sqrt{g_{11}} X^1 = X^r$$

$$\sigma^{rr} = \sqrt{g_{11}g_{11}} \tau^{11} = \tau^{rr}, \sigma^{\theta\theta} = \sqrt{g_{22}g_{22}} \tau^{22} = r^2 \tau^{\theta\theta}, \sigma^{zz} = \sqrt{g_{33}g_{33}} \tau^{33} = \tau^{zz}$$

$$\sigma^{r\theta} = \sqrt{g_{11}g_{22}} \tau^{12} = r \tau^{r\theta}, \sigma^{rz} = \sqrt{g_{11}g_{33}} \tau^{13} = \tau^{rz}, \sigma^{z\theta} = \sqrt{g_{33}g_{22}} \tau^{32} = r \tau^{z\theta}$$

داشتیم:

$$-X^r = \frac{\partial \tau^{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \tau^{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau^{rz}}{\partial z} - r \tau^{\theta\theta} + \frac{\tau^{rr}}{r}$$

$$-\vec{F}^r = \frac{\partial \sigma^{rr}}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\sigma^{r\theta}}{r} \right) + \frac{\partial \sigma^{rz}}{\partial z} - r \frac{\sigma^{\theta\theta}}{r^2} + \frac{\sigma^{rr}}{r}$$

و این معادله‌ای است که در صفحه ۱۲۵ کتاب نیز داده شده است. مؤلفه‌های دیگر عبارتند از:

$$-\vec{F}^r = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma^{rr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma^{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma^{rz}}{\partial z} - \frac{\sigma^{\theta\theta}}{r}$$

$$-\vec{F}^\theta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sigma^{\theta r}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma^{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma^{\theta z}}{\partial z}$$

$$-\vec{F}^z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma^{zr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma^{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma^{zz}}{\partial z}$$

در کتاب این روابط با اندیس‌های کوارینت نوشته شده که باید تصحیح شوند. در شکل صحیح اندیس‌ها کنتراریت‌اند. ولی از آنجا که در سیستم‌های متعامد مؤلفه‌های فیزیکی تنش یکسان هستند  $(\sigma^{ij} = \sigma_j^i)$ ، آن روابط را می‌توان صحیح ارزیابی کرد. بار دیگر به این نکته خواهیم پرداخت.

18/20

مسئله زیر را حل کرده و تا دو هفته دیگر تحویل فرمایید:

9) 3)

مسئله از کتاب اصلی صفحه ۹۵

تمرین‌های قبلی:

- 2) 1,2,5,6,10, and A1-A12, 2) 12-23, 25-32  
3) 8,11,13,14 , 3) 1,2,3, 4) 2,16,17,19 3) 6,7,8

**Problem 3.9.** Let us recast the principal results obtained above into tensor equations in general coordinates of reference. In rectangular Cartesian coordinates, there is no difference in contravariant and covariant transformations. Hence, the Cartesian stress tensor may be written as  $\tau_{ij}$ , or  $\tau^{ij}$ , or  $\tau_j^i$ . In general frames of reference,  $\tau_{ij}$ ,  $\tau^{ij}$ ,  $\tau_j^i$  are different. Their components may have different values. They are different versions of the same physical entity. Now prove the following results in general coordinates.

- (a) The tensors  $\tau^{ij}$ ,  $\tau_{ij}$  are symmetric if there is no body moment acting on the medium; i.e.,

$$\tau^{ij} = \tau^{ji}, \quad \tau_{ij} = \tau_{ji}.$$

- (b) Principal planes are planes on which the stress vector  $\vec{T}$  is parallel to the normal vector  $\nu$ . If we use contravariant components, we have, on a principal plane,  $\vec{T}^j = \sigma \nu^j = \sigma g^{ij} \nu_i = \tau^{ij} \nu_i$ , where  $\sigma$  is a scalar. If we use covariant components, we have correspondingly  $\vec{T}_j = \sigma \nu_j = \sigma g_{ij} \nu_i = \tau_j^i \nu_i$ . Show that  $\sigma$  must satisfy the characteristic determinantal equation

$$|\tau_j^i - \sigma \delta_j^i| = 0 \quad \text{or its equivalent} \quad |\tau^{ij} - \sigma g^{ij}| = 0.$$

- (c) The first invariant of the stress tensor is  $\tau_i^i$ , or  $\tau^{ij} g_{ij}$ . However,  $\tau_{ii}$  and  $\tau^{ii}$  are in general not invariants.  
(d) The stress deviation tensor  $s_j^i$  is defined as

$$s_j^i = \tau_j^i - \frac{1}{3} \tau_\alpha^\alpha g_j^i.$$

The first invariant of  $s_j^i$  is zero. The second invariant has the convenient form  $J_2 = \frac{1}{2} s_k^i s_i^k$ .

- (e) The octahedral shearing stress has the same value in any coordinates system.