

فصل ۵ - قوانین بقا (Conservation Laws)



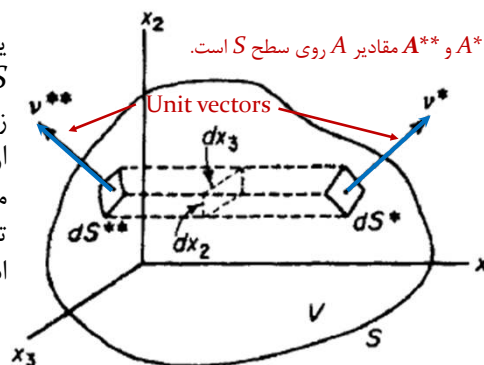
© M.H. Abolbashari, Ferdowsi University of Mashhad

قوانین اساسی بقای جرم و مومنتم (و انرژی فصل ۱۲) در اینجا مطرح می‌شود. در سرتاسر این فصل سیستم مختصات کارتزین متعامد در نظر گرفته می‌شود. تمام تانسورها تانسورهای کارتزین‌اند.

Skip to Eq. (2)

5.1- قضیه گوسی (Gauss' Theorem)

یک ناحیه محدب V در نظر بگیرید که با سطح S محدود شده و این سطح از تعداد محدودی زیرسطح تشکیل شده که بردارهای نرمال خارج از سطح آن‌ها تشکیل یک میدان برداری پیوسته می‌دهند. تابع $A(x_1, x_2, x_3)$ را در ناحیه $V+S$ تعریف می‌کنیم که در این ناحیه مشتق پذیر است. آنگاه از عمل انتگرال‌گیری معمولی داریم:



$$(1) \quad \iiint_V \frac{\partial A}{\partial x_1} dx_1 dx_2 dx_3 = \iint_S (A^* - A^{**}) dx_2 dx_3 \quad \text{Fig. 5.1:1.}$$

تصویر صفحه x_2, x_3 سطح dS^* و dS^{**} دو انتهای یک خط که موازی محور x_1 است.



گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

2/35

در انتهای راست: $dx_2 dx_3 = v_1^* ds^*$
 در انتهای چپ: $dx_2 dx_3 = -v_1^{**} ds^{**}$
 انتگرال سطح معادله (1) را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\int_S (A^* v_1^* ds^* + A^{**} v_1^{**} ds^{**}) = \int_S A v_1 ds$$

بنابراین، معادله (1) را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\int_V \frac{\partial A}{\partial x_1} dV = \int_S A v_1 ds$$

بحث مشابهی می‌توان برای انتگرال حجم $\partial A / \partial x_2$ یا $\partial A / \partial x_3$ داشت.
 به طور خلاصه، قضیه گوس را به دست می‌آوریم:

$$(2) \quad \int_V \frac{\partial A}{\partial x_i} dV = \int_S A v_i ds$$

میدان تانسوری $A_{jkl...}$ را در نظر بگیرید. اگر ناحیه V محصور در مرز سطح S در ناحیه تعریف $A_{jkl...}$ باشد، و فرض شود مؤلفه‌های $A_{jkl...}$ همیشه مشتق‌پذیر باشند،
 آنگاه معادله (2) برای هر مؤلفه تانسور قابل کاربرد است و می‌توان نوشت:

$$(3) \quad \int_V \frac{\partial}{\partial x_i} A_{jkl...} dV = \int_S v_i A_{jkl...} ds$$

شکل کلی قضیه گوس بردار یک‌ه عمود بر سطح
 حجم ناحیه 3/35

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

استفاده از قضیه گوس در کاربردهای دیگر (مسئله 5.1 نشان دهید):

شکل برداری شکل اندیسی

$$\int \phi_{,i} dV = \int \phi v_i ds \quad \text{or} \quad \int \text{grad } \phi dV = \int \vec{v} \phi ds$$

$$\int u_{i,i} dV = \int u_i v_i ds \quad \text{or} \quad \int \text{div } \vec{u} dV = \int \vec{v} \cdot \vec{u} ds$$

$$\int e_{ijk} u_{k,j} dV = e_{ijk} \int u_{k,j} dV$$

$$\downarrow$$

$$= e_{ijk} \int u_k v_j dS$$

$$= \int e_{ijk} u_k v_j dS \quad \text{or} \quad \int \text{curl } \vec{u} dV = \int \vec{v} \times \vec{u} ds$$

$\text{curl } \vec{u} = \vec{\nabla} \times \vec{u}$

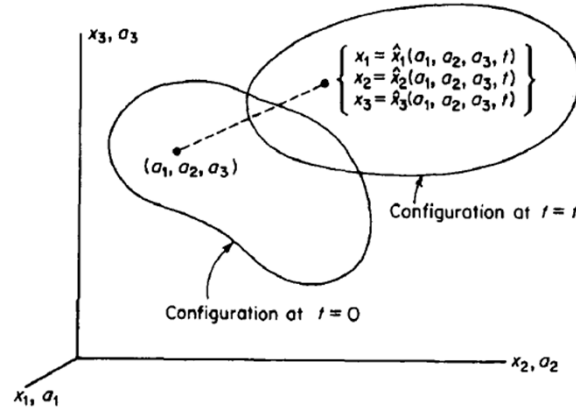
که e_{ijk} پرموتیشن سیمبل است.*
 برای دو بعدی که محدوده اندیس‌ها 1 و 2 است، انتگرال‌های حجم و سطح به ترتیب با انتگرال‌های
 سطح و خط جایگزین می‌شوند.

* در کتاب تصحیح نمایید.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری 4/35

5.2- بیان مادی و فضایی (جاری) تغییر وضعیت (Material and Spatial Descriptions of Changing Configurations)

مختصات کارتیزین را انتخاب می‌کنیم و مختصات یک نقطه در لحظه $t=0$ را (a_1, a_2, a_3) در نظر می‌گیریم. در زمان دیگری ذره حرکت کرده و به نقطه‌ی (x_1, x_2, x_3) در همان سیستم مختصات می‌رسد. رابطه زیر موقعیت ذره را در زمان‌های مختلف به هم مربوط می‌کند.



$$(1) \quad x_i = \hat{x}_i(a_1, a_2, a_3, t), \quad i = 1, 2, 3 \quad \text{Fig. 5.2:1. Labeling of particles.}$$

اگر چنین معادله‌ای برای هر ذره‌ای از جسم معلوم باشد، آنگاه تاریخچه حرکت کل جسم برای ما معلوم است. معادله (1) از نظر ریاضی یک انتقال (نگاشت) دومین $D(a_1, a_2, a_3)$ به دومین $D'(x_1, x_2, x_3)$ با پارامتر t است.

5/35

اصل بقای جرم:

خاصیت اساسی اجسام این است که دارای جرم‌اند. در مکانیک کلاسیک، فرض می‌شود که جرم پایاست، یعنی جرم ماده یک جسم در زمان‌های مختلف یکسان است.

در مکانیک محیط پیوسته افزون بر آن فرض می‌شود که جرم یک تابع پیوسته از حجم است. به عبارت دیگر،

فرض می‌شود که یک کمیت مثبت ρ که چگالی نامیده می‌شود در هر نقطه از جسم وجود دارد که به شکل حد زیر تعریف می‌شود،

$$(2) \quad \rho(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\text{mass of } B_k}{\text{volume of } B_k}$$

که در آن B_k یک دنباله نامحدود از مجموعه ذرات است که در نقطه X فشرده شده‌اند. منظور از X عبارت است از (x_1, x_2, x_3) .

چگالی در نقطه (a_1, a_2, a_3) در لحظه $t=0$ عبارتست از $\rho_0(a)$. بقای جرم با رابطه زیر بیان می‌شود.

$$(3) \quad \int_{D'} \rho(x) dx_1 dx_2 dx_3 = \int_D \rho_0(a) da_1 da_2 da_3$$

که انتگرال روی همان ذرات گرفته می‌شود.

از آنجا که طرف چپ معادله عبارت است از: $\int_{D'} \rho(x) dx_1 dx_2 dx_3 = \int_D \rho(x) \left| \frac{\partial x_i}{\partial a_j} \right| da_1 da_2 da_3$

6/35

و چون این رابطه باید برای هر دومین D برقرار باشد، زیر انتگرال‌ها باید برابر باشند:

$$\rho_0(a) = \rho(x) \left| \frac{\partial x_i}{\partial a_j} \right| \quad (4)$$

$$\rho(x) = \rho_0(a) \left| \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \right|$$

سرعت ذره (a_1, a_2, a_3) که مسیر حرکتش با معادله (1) $x_i = \hat{x}_i(a_1, a_2, a_3, t)$ مشخص می‌شود، عبارت است از:

$$v_i(a, t) = \frac{\partial}{\partial t} x_i(a, t) \quad (5)$$

و شتاب آن عبارت است از:

$$\dot{v}_i(a, t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} x_i(a, t) = \frac{\partial}{\partial t} v_i(a, t) \quad (6)$$

که a نشان دهنده (a_1, a_2, a_3) است و ثابت نگاه داشته می‌شود.



گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

7/35

بیان روند تغییرات مکانیکی که از (a_1, a_2, a_3) و t به عنوان متغیرهای مستقل استفاده می‌کند، **بیان مادی (material description)** یا **لاگرانژی** نامیده می‌شود.

در دینامیک سیالات، به طور معمول از یک بیان دیگر که **بیان فضایی (جاری)** است استفاده می‌شود. در بیان فضایی موقعیت (x_1, x_2, x_3) و زمان t به عنوان متغیرهای مستقل در نظر گرفته می‌شوند. این بیان راحت‌تر است زیرا اندازه‌گیری در بیشتر سیالات بر اساس آنچه در یک محل مشخص روی می‌دهد تفسیر می‌شود و نه دنبال کردن ذرات. به این بیان اولری می‌گویند.

هرچند روش اول به **لاگرانژی** معروف شده ولی هر دو روش منتسب به **اولر** است.

متغیرهای a_1, a_2, a_3, t را معمولاً متغیرهای **لاگرانژی** و x_1, x_2, x_3, t را متغیرهای **اولری** می‌گویند؛ و با رابطه (1) $x_i = \hat{x}_i(a_1, a_2, a_3, t)$ ، $i = 1, 2, 3$ به هم مربوط می‌شوند.

برای یک ذره در موقعیت (x_1, x_2, x_3) راحت‌تر این است که بگوییم ذره با مختصات **لاگرانژی (a_1, a_2, a_3)** .



گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

8/35

در یک بیان فضایی، حرکت آنی (در لحظه) جسم با میدان بردار سرعت $v_i(x_1, x_2, x_3, t)$ مربوط به موقعیت آنی هر ذره بیان می‌شود. شتاب ذره از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$(7) \quad \dot{v}_i(x, t) = \frac{\partial v_i}{\partial t}(x, t) + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x, t)$$

اثبات: ذره‌ای که در زمان t در موقعیت (x_1, x_2, x_3) قرار دارد در زمان $t+dt$ به موقعیت نقطه‌ای با مختصات $x_i + v_i dt$ می‌رسد. بنابراین شتاب عبارت است از:

$$\dot{v}_i(x, t) = \frac{v_i(x_j + v_j dt, t + dt) - v_i(x, t)}{dt}$$

$$\dot{v}_i(x, t) dt = v_i(x_j + v_j dt, t + dt) - v_i(x, t)$$

و بر اساس قضیه تیلور داریم:

$$= \cancel{v_i} + \frac{\partial v_i}{\partial t} dt + \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x, t) v_j dt - \cancel{v_i} \quad \text{که به معادله (7) می‌رسد.}$$

جمله اول در معادله (7) می‌تواند به این شکل تفسیر شود که به سبب وابستگی میدان سرعت به زمان است؛

جمله دوم به سبب سهم حرکت ذره در میدان سرعت لحظه‌ای است.

بنابراین، این جملات به ترتیب بخش‌های محلی (local) و کانوکتیو (convective) شتاب نامیده می‌شوند.

9/35

همان دلایلی که به معادله (7) انجامید، به هر تابع $F(x_1, x_2, x_3, t)$ که به ذرات در حال حرکت مربوط شود قابل کاربرد است مانند درجه حرارت.

معادله (7) را مشتق مادی نیز می‌نامند که با یک نقطه یا نماد D/Dt نشان داده می‌شود.

$$(8) \quad \dot{F} \equiv \frac{DF}{Dt} \equiv \left(\frac{\partial F}{\partial t} \right)_{x=const.} + v_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial F}{\partial x_3} \\ \equiv \left(\frac{\partial F}{\partial t} \right)_{a=const.}$$

که $a = (a_1, a_2, a_3)$ مختصات لاگرانژی ذره‌ای است که در زمان t در موقعیت x است که با معادله (1) به هم مربوط می‌شوند.

بنابراین، مشتق مادی به شکل زیر تعریف می‌شود.

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$



گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

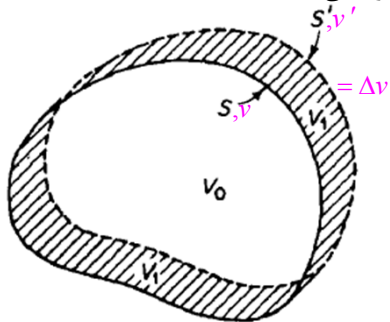
10/35

5.3- مشتق مادی انتگرال حجم

یک انتگرال حجم که روی جسم گرفته می‌شود در نظر بگیرید.

$$(1) \quad I = \int_V A(x, t) dV$$

که $A(x, t)$ نشان دهنده یک خاصیت محیط پیوسته است و انتگرال در لحظه t ارزیابی می‌شود. می‌خواهیم بدانیم خود جسم نرخ تغییرات مقدار I را چگونه می‌بیند.



بنابراین، مشتق I نسبت به زمان یک مجموعه ذرات اطلاعاتی است که مایل به دانستن آنیم. یعنی $\frac{DI}{Dt}$ اکنون ذره واقع در x_i در لحظه $t+dt$ مختصات $x' = x_i + v_i dt$ را خواهد داشت. مرز S جسم در لحظه t به زمان $t+dt$ به سطح S' در همسایگی تغییر مکان یافته که حجم V' را پوشانده است.

Fig. 5.3:1. Continuous change of the boundary of a region.

$$V' = V + \Delta V, \quad dv' \cong dv$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

11/35

مشتق مادی عبارت است از:

$$(2) \quad \frac{DI}{Dt} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{1}{dt} \left[\int_{V'} A(X', t+dt) dV' - \int_V A(X, t) dV \right]$$

$$\frac{DI}{Dt} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{1}{dt} \left[\int_V A(X, t+dt) dV + \int_{\Delta V} A(X, t+dt) dV - \int_V A(X, t) dV \right]$$

$$= \lim_{dt \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{dt} \int_V [A(X, t+dt) - A(X, t)] dV + \frac{1}{dt} \int_{\Delta V} A(X, t+dt) dV \right\}$$

دو جمله اول تعریف مشتق است و جمله سوم را نیز اثبات می‌کنیم که مانند زیر می‌شود.

$$(3) \quad \frac{D}{Dt} \int_V A dV = \int_V \frac{\partial A}{\partial t} dV + \int_S A \mathbf{v}_j \mathbf{v}_j dS$$

اثبات:

در ارزیابی $\lim_{dt \rightarrow 0} \int_{\Delta V} \frac{A(X, t+dt)}{dt} dV$ می‌توان گفت که در زمان بسیار کوچک (dt) .

$A(x, t+dt)$ برابر با $A(x, t)$ روی مرز سطح S است و انتگرال $\int_{\Delta V} \frac{A(X, t+dt)}{dt} dV$ مجموع $A(x, t)$ در حجم‌هایی است که در بازه زمانی dt توسط ذراتی که در مرز S واقع شده‌اند جاروب می‌شود. حال اگر بردار یکه در جهت عمود بر S باشد، چون مقدار تغییر مکان مرز برابر با $v_i dt$ است، پس حجمی که توسط ذرات المان ds روی مرز جاروب می‌شود برابر است با:

12/35

$dV = v_j v_i ds dt$, i not summed

$\lim_{dt \rightarrow 0} \int_{\Delta V} \frac{A(X, t+dt)}{dt} dV = \int_S \frac{A(X, t)}{dt} v_i v_i ds dt = \int_S A v_i v_i ds$

اکنون در رابطه (3) با استفاده از رابطه گوس، انتگرال سطح را به انتگرال حجم تبدیل می کنیم:

(3) $\frac{D}{Dt} \int_V A dV = \int_V \frac{\partial A}{\partial t} dV + \int_S (A v_j) \nu_j dS$ Nu: Unit Vector Normal to the Surface

$\frac{D}{Dt} \int_V A dV = \int_V \frac{\partial A}{\partial t} dV + \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} (A v_j) dV$, j is a dummy index

(4) $= \int_V \left(\frac{\partial A}{\partial t} + v_j \frac{\partial A}{\partial x_j} + A \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right) dV$

تعریف مشتق مادی A (رابطه (8))

$\frac{D}{Dt} \int_V A dV = \int_V \left(\frac{DA}{Dt} + A \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right) dV$

بنابراین عمل مشتق مادی و انتگرال فضایی (spatial) در حالت کلی جابجایی ناپذیر (noncommutative) است، یعنی نمی توان اپراتور مشتق را زیر انتگرال برد.

13/35

5.4- معادله پیوستگی (Continuity)

اکنون با استفاده از نتایج بخش های پیشین، قانون بقاء جرم را به چند شکل دیگر که جملگی معادل هم اند بیان می شود.

جرمی که در زمان t حجم V را اشغال کرده عبارت است از:

(1) $m = \int_V \rho dV$

$\rho = \rho(x, t)$ عبارت است از میدان چگالی محیط پیوسته

بقاء جرم ایجاب می کند که: $Dm/Dt = 0$

مشتق Dm/Dt با جایگزینی ρ به جای A در معادلات (5.3:3) و (5.3:4) به دست می آید:

(2) $\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_S (\rho v_j) \nu_j dS = 0$ ▲

با استفاده از قضیه گوس جمله دوم را با انتگرال حجم جایگزین می کنیم:

$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_j) dV = 0$ ▲

از آنجا که جواب باید برای هر حجم اختیاری V برقرار باشد، زیر انتگرال باید صفر باشد.

(3) $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_j}{\partial x_j} = 0$ ▲

(4) $\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0$ ▲

این معادلات چهار شکل بیان معادلات پیوستگی است.

14/35

معادلات پیوستگی در مختصات کارتزین، استوانه‌ای و

کروی

معادله (3) پیوستگی که برای یک حجم V داشتیم:

$$(3) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_j)}{\partial x_j} = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

شکل برداری معادله پیوستگی (3)

$$\text{div } F = \nabla \cdot F = F^r|_r$$

تعریف دیورژانس

(دقت شود که بردار به شکل کنتراورینت در نظر گرفته شده ولی در نهایت معادله پیوستگی بر حسب مؤلفه‌های فیزیکی سرعت نوشته می‌شود که در آن فرقی بین اندیس‌های کوارینت یا کنتراورینت نخواهد بود.)

در کارتزین از معادله (3) داریم:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

15/35

در مختصات استوانه‌ای داریم:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \Gamma_{22}^1 = -r, \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{r}, \text{ and other } \Gamma_{jk}^i = 0$$

$$\text{div } F = \nabla \cdot F = F^r|_r$$

$$\rho v^j|_j = \frac{\partial \rho v^j}{\partial x^j} + \Gamma_{\sigma j}^j \rho v^\sigma = \frac{\partial \rho v^j}{\partial x^j} + \Gamma_{12}^2 \rho v^1$$

معادله پیوستگی (3) بر حسب مؤلفه‌های تانسوری سرعت

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v^j}{\partial x^j} + \Gamma_{12}^2 \rho v^1 = 0 \rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v^r}{\partial r} + \frac{\partial \rho v^\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \rho v^z}{\partial z} + \frac{1}{r} \rho v^r = 0$$

مؤلفه‌های فیزیکی سرعت:

$$u^r = \sqrt{g_{rr}} v^r = v^r, u^\theta = \sqrt{g_{\theta\theta}} v^\theta = r v^\theta, u^z = \sqrt{g_{zz}} v^z = v^z$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho r u^r}{\partial r} + \frac{\partial \rho u^\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \rho u^z}{\partial z} = 0$$

معادله پیوستگی بر حسب مؤلفه‌های فیزیکی سرعت توجه شود که محل اندیس بالا یا پایین در مؤلفه فیزیکی مطرح نیست زیرا تانسور نیست که قانون انتقال آن را مشخص کند.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho r u^r)}{\partial r} + \frac{\partial(\rho u^\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(\rho u^z)}{\partial z} = 0$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

Skip to slide 19

16/35

در مختصات **کروی** داریم:

$$x^1 = r, x^2 = \varphi, x^3 = \theta$$

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \varphi \end{pmatrix}, g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \Gamma_{22}^1 = -r & \Gamma_{33}^1 = -r \sin^2 \varphi \\ \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{r} & \Gamma_{33}^2 = -\sin \varphi \cos \varphi, \text{ and other } \Gamma_{jk}^i = 0 \\ \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r} & \Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 = \cot \varphi \end{cases}$$

$$\operatorname{div} F = \nabla \cdot F = F^r \Big|_r$$

$$\rho v^j \Big|_j = \frac{\partial \rho v^j}{\partial x^j} + \Gamma_{\sigma j}^j \rho v^\sigma = \frac{\partial \rho v^j}{\partial x^j} + \Gamma_{12}^2 \rho v^1 + \Gamma_{13}^3 \rho v^1 + \Gamma_{23}^3 \rho v^2$$

17/35

معادله پیوستگی (3) بر حسب مؤلفه‌های **تانسوری** سرعت

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v^j}{\partial x^j} + \Gamma_{12}^2 \rho v^1 + \Gamma_{13}^3 \rho v^1 + \Gamma_{23}^3 \rho v^2 = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v^r}{\partial r} + \frac{\partial \rho v^\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \rho v^\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \rho v^r + \frac{1}{r} \rho v^r + \cot \varphi \rho v^\varphi = 0$$

مؤلفه‌های **فیزیکی** سرعت:

$$u^r = \sqrt{g_{rr}} v^r = v^r, u^\varphi = \sqrt{g_{\varphi\varphi}} v^\varphi = r v^\varphi, u^\theta = \sqrt{g_{\theta\theta}} v^\theta = (r \sin \varphi) v^\theta$$

معادله پیوستگی بر حسب مؤلفه‌های **فیزیکی** سرعت

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^r}{\partial r} + \frac{\partial \rho \frac{1}{r} u^\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \rho \frac{1}{r \sin \varphi} u^\theta}{\partial \theta} + \frac{2}{r} \rho u^r + \cot \varphi \rho \frac{1}{r} u^\varphi = 0$$

مختصات تابعی از یکدیگر نیستند و در مشتق گیری مانند عدد ثابتند.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho u^\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial \rho u^\theta}{\partial \theta} + \frac{2}{r} \rho u^r + \frac{1}{r} \cot \varphi \rho u^\varphi = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial (\rho r^2 u^r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial (\rho u^\varphi \sin \varphi)}{\partial \varphi} + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial (\rho u^\theta)}{\partial \theta} = 0$$

18/35

5.5- معادله حرکت

قانون حرکت نیوتن می گوید:

در یک مختصات اینرسی

نرخ مادی تغییرات مومنتم خطی یک جسم = برآیند نیروهای وارده

و همچنین

نرخ مادی تغییرات ممان مومنتم نسبت به مرکز مختصات = ممان برآیند نیروهای وارده نسبت به همان مرکز مختصات

یک ناحیه معمولی به حجم V در هر لحظه t ، مومنتم خطی زیر را دارد.

$$P_i = \int_V v_i dm$$

$$(1) \quad P_i = \int_V \rho v_i dV$$

اگر جسم تحت تأثیر یک ترکشن سطحی T_i^v باشد و نیروی کالبدی بر واحد حجم X_i باشد، نیروی برآیند عبارت است از:

$$(2) \quad F_i = \int_S T_i^v ds + \int_V X_i dV$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری



19/35

بر اساس اصل تنش اولر و کوچی (بخش های 3.2 و 3.3)، $T_i^v = \sigma_{ij} v_j$ که میدان تنش و v_j بردار یکه نرمال به مرز S حجم V و در امتداد خارج از سطح است.

با جایگزینی در معادله (2) و با استفاده از قضیه گوس برای تبدیل انتگرال سطح به حجم، داریم:

$$(3) \quad F_i = \int_V \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + X_i \right) dV$$

دقت شود که σ_{ij} در واقع همان τ_{ij} است زیرا در سیستم مختصات کارتزین مؤلفه های فیزیکی و تانسوری یکی هستند.

قانون نیوتن بیان می دارد که:

$$(4) \quad \frac{D}{Dt} P_i = F_i \rightarrow \frac{D}{Dt} \int_V \rho v_i dV = F_i$$

$$\left(\frac{D}{Dt} \int_V A dV = \int_V \frac{\partial A}{\partial t} dV + \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} (A v_j) dV \right), (5.3:4)$$

بنابراین، بر اساس معادله (5.3:4)، با در نظر گرفتن ρv_i به جای A داریم:

$$(5) \quad \int_V \left[\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_i v_j) \right] dV = \int_V \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + X_i \right) dV$$

از آنجا که این معادله باید برای یک حجم V اختیاری برقرار باشد، زیر انتگرال ها را برابر هم قرار می دهیم. بنابراین:

20/35



(6)
$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_i v_j) = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + X_i$$

طرف چپ معادله (6) برابر است با:

$$v_i \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_j}{\partial x_j} \right) + \rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)$$

پرانتر اول بر اساس معادله پیوستگی (5.4:3) صفر است. پرانتر دوم شتاب Dv_i/Dt است. بنابراین:

(7)
$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + X_i$$

این معادله حرکت اولری یک جسم پیوسته است.

اگر مشتق پذیری میدان تنش $(\partial \sigma_{ij} / \partial x_j)$ یا میدان مومنتم $(\partial \rho v_j / \partial x_j)$ را نتوان فرض کرد، از معادله (5.3:3) $\left(\frac{D}{Dt} \int_V A dV = \int_V \frac{\partial A}{\partial t} dV + \int_S A v_j v_j ds \right)$ برای محاسبه DP/Dt استفاده می‌شود. آنگاه معادله (2) و (4) رابطه زیر را می‌دهد.

معادله اولر به شکل انتگرالی

(8)
$$\int_V \frac{\partial \rho v_i}{\partial t} dV = \int_S (\sigma_{ij} - \rho v_i v_j) v_j ds + \int_V X_i dV$$

معادلات تعادل استاتیکی با صفر قرار دادن مؤلفه‌های سرعت به دست می‌آید.

21/35

5.6- ممان مومنتم (Moment of Momentum)

کاربرد قانون بالانس مومنتم زاویه‌ای در حالت خاص تعادل استاتیکی به تقارن تانسور تنش انجامید (بخش 3.4 را ببینید).

اکنون نشان خواهیم داد قضیه مومنتم زاویه‌ای، در حالت دینامیکی محدودیت بیشتری روی حرکت یک محیط پیوسته بوجود نمی‌آورد.

Skip to slide 25

در لحظه t جسمی که یک ناحیه V از فضا با مرز S نسبتاً به مرکز مختصات ممان مومنتمی به شکل زیر دارد [معادله (3.2:2)]

(1)
$$H_i = \int_V e_{ijk} x_j \rho v_k dV$$

اگر جسم تحت تأثیر ترکشن T_i^v و نیروی کالبدی بر واحد حجم X_i باشد، برآیند ممان حول مرکز عبارت است از

(2)
$$L_i = \int_V e_{ijk} x_j X_k dV + \int_S e_{ijk} x_j T_k^v dS$$

22/35

اگر رابطه کوچی $T_k = \sigma_{lk} v_l$ را به انتگرال آخر اعمال کنیم و نتیجه را با استفاده از قضیه گوس به انتگرال حجم تبدیل کنیم، داریم:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial x_i} A_{jkl} \dots dv = \int_S v_i A_{jkl} \dots ds$$

(3)
$$L_i = \int_V e_{ijk} x_j X_k dV + \int_V (e_{ijk} x_j \sigma_{lk})_{,l} dV$$

قانون اولر بیان می‌دارد که برای هر ناحیه V

(4)
$$\frac{D}{Dt} H_i = L_i$$

مشتق مادی H_i را بر اساس (5.3:4) $\frac{D}{Dt} \int_V A dV = \int_V \frac{\partial A}{\partial t} dV + \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} (A v_j) dV$ ارزیابی می‌کنیم و با استفاده از معادله (3) داریم:

$$\frac{D}{Dt} \int_V e_{ijk} x_j \rho v_k dV = \int_V [e_{ijk} x_j X_k + \frac{\partial}{\partial x_l} (e_{ijk} x_j \sigma_{lk})] dV$$

می‌دانیم $\frac{D}{Dt} \int_V A dV = \int_V [\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (A v_j)] dV$ بنابراین داریم:

$$\int_V [\frac{\partial}{\partial t} (e_{ijk} x_j \rho v_k) + \frac{\partial}{\partial x_l} (e_{ijk} x_j \rho v_k v_l)] dV = \int_V [e_{ijk} x_j X_k + \frac{\partial}{\partial x_l} (e_{ijk} x_j \sigma_{lk})] dV$$

ضرب خارجی بردار در خودش و صفر است

$$\frac{\partial}{\partial t} (e_{ijk} x_j \rho v_k) = e_{ijk} (\rho v_k) \frac{\partial x_j}{\partial t} + e_{ijk} x_j \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_k) = e_{ijk} \rho v_k v_j + e_{ijk} x_j \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_k)$$

بنابراین:

(5)
$$e_{ijk} x_j \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_k) + \frac{\partial}{\partial x_l} (e_{ijk} x_j \rho v_k v_l) = e_{ijk} x_j X_k + e_{ijk} (x_j \sigma_{lk})_{,l}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_l} (e_{ijk} x_j \rho v_k v_l) = e_{ijk} [\frac{\partial x_j}{\partial x_l} (\rho v_k v_l) + x_j \frac{\partial}{\partial x_l} (\rho v_k v_l)]$$

$$= e_{ijk} [\delta_{jl} (\rho v_k v_l) + x_j \frac{\partial}{\partial x_l} (\rho v_k v_l)]$$

ضرب خارجی بردار در خودش و صفر است

$$= e_{ijk} [(\rho v_k v_j) + x_j \frac{\partial}{\partial x_l} (\rho v_k v_l)]$$

$$\frac{\partial}{\partial x_l} (e_{ijk} x_j \sigma_{lk}) = e_{ijk} \sigma_{lk} \frac{\partial x_j}{\partial x_l} + e_{ijk} x_j \frac{\partial}{\partial x_l} (\sigma_{lk})$$

$$= e_{ijk} \sigma_{lk} \delta_{jl} + e_{ijk} x_j \sigma_{lk,l}$$

$$= e_{ijk} \sigma_{jk} + e_{ijk} x_j \sigma_{lk,l}$$

در نهایت معادله (5) به شکل زیر در خواهد آمد.

(6)
$$e_{ijk} x_j [\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_k) + \frac{\partial}{\partial x_l} (\rho v_k v_l) - X_k - \sigma_{lk,l}] - e_{ijk} \sigma_{jk} = 0$$

جمع داخل کروشه صفر است زیرا معادله حرکت است.
بنابراین معادله (6) به شکل زیر در می آید.

$$(7) \quad e_{ijk} \sigma_{jk} = 0$$

یعنی

$$\sigma_{jk} = \sigma_{kj}$$

بنابراین، اگر تانسور تنش متقارن باشد، قانون بالانس ممان مومنتم بر آورده می شود.



گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

25/35

5.7- سایر معادلات میدان (Other Field Equations)

قانون پایایی (بقاء) انرژی نیز باید بر حرکت یک محیط پیوسته حاکم باشد.
اگر در مسئله ای تنها انرژی مکانیکی مورد نظر باشد، آنگاه معادله انرژی می تواند با انتگرال گیری از معادله حرکت (5.5:7) به دست آید.

اگر تعامل فرآیند حرارتی و مکانیکی قابل توجه باشد، آنگاه معادله انرژی شامل یک جمله انرژی حرارتی است که یک معادله مستقلی است که باید برآورده شود.
معادله انرژی که در بخش 12.2 کتاب مورد بحث قرار گرفته در اینجا مطرح می شود.



گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

26/35

معادلات پیوستگی، معادلات (5.4:3)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_j}{\partial x_j} = 0$$

و حرکت (5.5:7)

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + X_i$$

چهار معادله هستند برای ده مجهول که تابع موقعیت و زمان اند، و عبارتند از: چگالی ρ ، سه مؤلفه سرعت v_i (یا تغییر مکان های u_i) و شش مؤلفه مستقل تنش σ_{ij} . بنابراین برای تعیین حرکت جسم پیوسته لازم است محدودیت های دیگری نیز اعمال شود. یک گروه از چنین محدودیت هایی بیان خواص مکانیکی ماده به شکل رابطه بین تنش-کرنش است. بیان این خواص را **معادلات مشخصه (constitutive)** می نامند. معادلات مشخصه مصالح الاستیک و پلاستیک در فصل ۶ مطرح می شود.

27/35 

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

مسئله زیر را حل کرده و تا دو هفته دیگر تحویل فرمایید:

3) 5)

مسئله از کتاب اصلی صفحه ۱۳۷

تمرین های قبلی:

2) 1,2,5,6,10, and A1-A12, 2) 12-23, 25-32
 3) 8,11,13,14, 3) 1,2,3, 4) 2,16,17,19,
 3) 6,7,8, 3) 9, 5) 3,12,13,14,15,17, 6)
 2,3,4,6

28/35

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

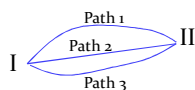
12.1- قوانین ترمودینامیک

ابتدا چند تعریف:

سیستم: یک توده خاص از ماده که مورد مطالعه قرار می گیرد.
سیستم بسته: سیستمی که با محیط اطرافش تبادل ماده ندارد. (در اینجا فقط سیستم های بسته مورد بحث قرار می گیرد).
سیستم ایزوله: سیستمی که هیچ برهم کنشی بین آن و محیط وجود ندارد.

قانون اول ترمودینامیک

اگر یک سیستمی که از نظر حرارتی ایزوله است را بتوان از مسیرهای مختلف از حالت I به حالت II انتقال داد، کار انجام شده روی سیستم برای تمام این مسیرها (ی ایزوله) یکسان است.



از این می توان نتیجه گرفت که:

یک تابع تک مقداری از یک سیستم وجود دارد که انرژی نامیده می شود. آنچنان که برای یک فرآیند بی دررو (آدیاباتیک) افزایش انرژی برابر است با کار انجام شده روی سیستم. بنابراین:

29/35



(1) $\Delta \text{energy} = \text{work done}$ [(adiabatic) فرآیند بی دررو]

فرآیندهای عمومی (اعم از آدیاباتیک یا غیر آدیاباتیک):

اکنون حرارت Q جذب شده توسط سیستم را به شکل زیر تعریف می کنیم:
 افزایش انرژی سیستم منهای کار انجام شده روی سیستم.
 بنابراین:

(2) $Q = \Delta \text{energy} - \text{work done}$ (همه فرایندها)

یا

(3) $\Delta \text{energy} = Q + \text{work done}$

اگر این رابطه را به عنوان بیان بقای انرژی در نظر بگیریم و با رابطه (1) مقایسه کنیم، مشاهده می شود که انرژی سیستم می تواند یا با کار انجام شده روی سیستم یا با جذب حرارت افزایش یابد.

انرژی کل از انرژی های مختلفی تشکیل شده که عبارتند از: انرژی جنبشی K ، انرژی ثقلی G (gravitational)، و انرژی داخلی E . بنابراین معادله زیر به عنوان انرژی کلی تعریف می شود.

(4) $\text{energy} = K + G + E$



30/35

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

12.2- معادله انرژی

اکنون معادله بالانس انرژی یعنی معادلات (12.1:3) $\Delta \text{energy} = Q + \text{work done}$ و (12.1:4) $\text{energy} = K + G + E$ را به شکل راحت‌تری برای استفاده در مکانیک محیط پیوسته بیان می‌کنیم.

در این فصل، این بخش استثناست و محدود به سیستم‌های همسانگرد (homogeneous) نمی‌شود.

برای یک توده ذرات که در وضعیت مشخصی حجم V را اشغال کرده و با مرز S محدود شده است، انرژی جنبشی عبارت است از:

$$(1) \quad K = \int_V \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i dV$$

$\mathbf{v}_i$ مؤلفه‌های بردار سرعت یک ذره که المانی به حجم dV را اشغال کرده است و ρ چگالی مصالح است.

انرژی داخلی به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$(2) \quad E = \int_V \rho \varepsilon dV$$

ε انرژی داخلی بر واحد جرم است.

$$\text{Energy} = N \cdot m = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} \text{ or } \frac{ML^2}{T^2} \left[= \left[\frac{\text{kg}}{m^3} \cdot \frac{\text{Energy}}{\text{kg}} \cdot m^3 \right] \right]$$

انرژی ثقلی:

در کتاب این انرژی را در نظر نگرفته و در معادله حرکت نیز نیروی کالبدی را بدون نیروی گرانش نوشته است.



$$G = \int_V \rho \phi(x) dV$$

پتانسیل ثقلی (Gravitational potential) (انرژی) بر واحد جرم

31/35

حرارتی که وارد جسم می‌شود باید از مرز عبور کند. یک بردار جدید **شار حرارتی (heat flux)** $\mathbf{h}$ (نرخ حرارت بر واحد سطح) با مؤلفه‌های h_1, h_2, h_3 به شکل زیر تعریف می‌شود. فرض کنید dS یک المان سطح در جسم و بردار $\mathbf{v}_i$ عمود خارج سطح $\mathbf{v}_i$ باشد. آنگاه نرخ (آهنگ) (rate) انتقال حرارت از سطح dS در جهت $\mathbf{v}_i$ فرض می‌شود به شکل $h_i \mathbf{v}_i ds$ باشد. به طور مشخص می‌خواهیم شار حرارتی را برای یک جسم در حال حرکت که المان سطح dS از همان ذرات تشکیل یافته باشد تعریف کنیم. بنابراین نرخ حرارت **ورودی** عبارت است از:

$$(3) \quad \dot{Q} = - \int_S h_i \mathbf{v}_i ds = - \int_V h_{i,i} dV$$

نرخ انتقال حرارت از سطح ds

$\left[\frac{\text{Energy}}{\text{time}} = \frac{N \cdot m}{s} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2 \cdot s} \text{ or } \frac{ML^2}{T^3} \right] = \left[\frac{\text{Energy}}{\text{Surface} \times \text{time}} \right] [1] [\text{surface}] \text{ or } \left[\frac{ML^2}{T^3} \right]$

نرخ کار انجام شده روی جسم توسط نیروی کالبدی بر واحد حجم F_i در حجم V و ترکشی سطحی $\dot{T}_i$ در S عبارت است از توان (P) .

$$(4) \quad \dot{W} = P = \int F_i \mathbf{v}_i dv + \int \dot{T}_i \mathbf{v}_i dS$$

دقت شود که σ_{ij} در واقع همان τ_{ij} است زیرا در سیستم مختصات کارتزین مؤلفه‌های فیزیکی و تانسوری یکی هستند.

$$= \int F_i \mathbf{v}_i dv + \int \sigma_{ij} \mathbf{v}_j \mathbf{v}_i dS$$

$\mathbf{v}_i = \frac{dx_i}{dt}$

$$= \int F_i \mathbf{v}_i dv + \int (\sigma_{ij} \mathbf{v}_i)_{,j} dv$$



32/35

قانون اول ترمودینامیک عبارت است از:

$$(5) \quad \frac{D}{Dt}(K + G + E) = \dot{Q} + P$$

در کتاب $G=0$ در نظر گرفته شده است.

$$\frac{D}{Dt} \left(\int_V \frac{1}{2} \rho v_i v_i dV + \int_V \rho \phi(x) dV + \int_V \rho \varepsilon dV \right) = - \int_V \frac{\partial h_i}{\partial x_i} dV + \int_V F_i v_i dV + \int_V (\sigma_{ij} v_i)_{,j} dV$$

از مشتق مادی انتگرال حجم، یک حجم مشخص داریم:

$$\frac{D}{Dt} \int_V A dV = \int_V \left(\frac{DA}{Dt} + A \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right) dV = \int_V \left(\frac{DA}{Dt} + A \operatorname{div} \vec{v} \right) dV$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{D}{Dt} \rho v^2 + \rho v^2 \operatorname{div} \vec{v} \right) + \left[\frac{D}{Dt} \rho \phi(x) + \rho \phi(x) \operatorname{div} \vec{v} \right] + \left(\frac{D}{Dt} \rho \varepsilon + \rho \varepsilon \operatorname{div} \vec{v} \right)$$

$$= - \frac{\partial h_i}{\partial x_i} + F_i v_i + (\sigma_{ij,j} v_i + \sigma_{ij} v_{i,j})$$

$$\frac{1}{2} \left(\cancel{\frac{D\rho}{Dt} v^2} + \rho \frac{D}{Dt} v^2 + \rho v^2 \cancel{\operatorname{div} \vec{v}} \right) + \left[\cancel{\frac{D\rho}{Dt} \phi(x)} + \rho \frac{D}{Dt} \phi(x) + \rho \phi(x) \cancel{\operatorname{div} \vec{v}} \right] +$$

$$\left(\cancel{\frac{D\rho}{Dt} \varepsilon} + \rho \frac{D}{Dt} \varepsilon + \rho \varepsilon \cancel{\operatorname{div} \vec{v}} \right) = - \frac{\partial h_i}{\partial x_i} + F_i v_i + (\sigma_{ij,j} v_i + \sigma_{ij} v_{i,j})$$

با استفاده از معادله پیوستگی $\left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} \right) = 0$ داریم:

$$\frac{1}{2} \left(\rho \frac{Dv^2}{Dt} \right) + \rho \frac{D\phi(x)}{Dt} + \rho \frac{D\varepsilon}{Dt} = - \frac{\partial h_i}{\partial x_i} + F_i v_i + (\sigma_{ij,j} v_i + \sigma_{ij} v_{i,j})$$

33/35

از طرفی $\text{Gravitational Force} \left[\frac{N}{m^3} \right] = X_i - F_i = -\rho g = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \rightarrow F_i = X_i + \rho \frac{\partial \phi}{\partial x_i}$

Total body force $\downarrow$ **Body force**

از آنجا که تابع انرژی ثقلی نسبت به زمان تغییری ندارد، داریم:

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + v_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = 0 + v_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i}$$

$$\frac{1}{2} \left(\rho \frac{Dv^2}{Dt} \right) + \rho \frac{D\phi(x)}{Dt} + \rho \frac{D\varepsilon}{Dt} = - \frac{\partial h_i}{\partial x_i} + F_i v_i + (\sigma_{ij,j} v_i + \sigma_{ij} v_{i,j})$$

$$\frac{1}{2} \left(\rho \frac{Dv^2}{Dt} \right) + \rho v_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + \rho \frac{D\varepsilon}{Dt} = - \frac{\partial h_i}{\partial x_i} + v_i (F_i + \sigma_{ij,j}) + \sigma_{ij} v_{i,j}$$

$$\frac{1}{2} \left(\rho \frac{Dv^2}{Dt} \right) + \rho v_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + \rho \frac{D\varepsilon}{Dt} = - \frac{\partial h_i}{\partial x_i} + v_i \left(X_i + \rho \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + \sigma_{ij,j} \right) + \sigma_{ij} v_{i,j}$$

با استفاده از معادله حرکت $\rho \frac{Dv_i}{Dt} = X_i + \sigma_{ij,j}$ داریم:

$$\frac{1}{2} \left(\cancel{\rho \frac{Dv^2}{Dt}} \right) + \cancel{\rho v_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i}} + \rho \frac{D\varepsilon}{Dt} = - \frac{\partial h_i}{\partial x_i} + v_i \left(\cancel{\rho \frac{\partial \phi}{\partial x_i}} + \cancel{\rho \frac{Dv_i}{Dt}} \right) + \sigma_{ij} v_{i,j}$$

و جمله آخر عبارت است از:

$$\sigma_{ij} \left[\frac{1}{2} (v_{i,j} + v_{j,i}) + \frac{1}{2} (v_{i,j} - v_{j,i}) \right] = \sigma_{ij} (V_{ij}) + \frac{1}{2} (\sigma_{ij} v_{i,j} - \sigma_{ji} v_{j,i})$$

تعویض اندیس‌های دامی

$$= \sigma_{ij} V_{ij} + \frac{1}{2} (\sigma_{ij} v_{i,j} - \sigma_{ji} v_{i,j})$$

V_{ij} , Rate of deformation tensor

$$(7) \quad \rho \frac{D\varepsilon}{Dt} = - \frac{\partial h_i}{\partial x_i} + \sigma_{ij} V_{ij}$$

34/35

(7) $\rho \frac{D\varepsilon}{Dt} = -\frac{\partial h_i}{\partial x_i} + \sigma_{ij} V_{ij}$

$\left[\frac{\text{Mass}}{\text{Volume}} \cdot \frac{\text{Energy}}{\text{Mass} \cdot \text{Time}} = \frac{\text{N.m}}{\text{m}^3 \text{s}} = \frac{\text{kg.m}}{\text{s}^2 \text{s.m}^2} \text{ or } \frac{M}{LT^3} \right] = \left[\frac{1}{m} \cdot \frac{\text{N.m}}{\text{s.m}^2} \right] + \left[\frac{N}{m^2} \cdot \frac{\text{Velocity}}{m} \right]$

مسائل زیر را حل کرده و تا دو هفته دیگر تحویل فرمایید:

9,10) 10)

مسائل از کتاب دوم Fung که از سایت آموزش مجازی قابل دسترسی است.

تمرین‌های قبلی:

2) 1,2,5,6,10, and A1-A12, 2) 12-23, 25-32,
 3) 8,11,13,14, 3) 1,2,3, 4) 2,16,17,19, 3) 6,7,8,
 3) 9, 5) 3,12,13,14,15,17, 6) 2,3,4,6, 5) 3

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

35/35