

فصل ۸- اصطکاک

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

ویژگی‌های اصطکاک خشک

نیروی مانع از سرخوردن دو سطح در تماس هنگامی که هیچگونه فیلم روغن کاری وجود ندارد.

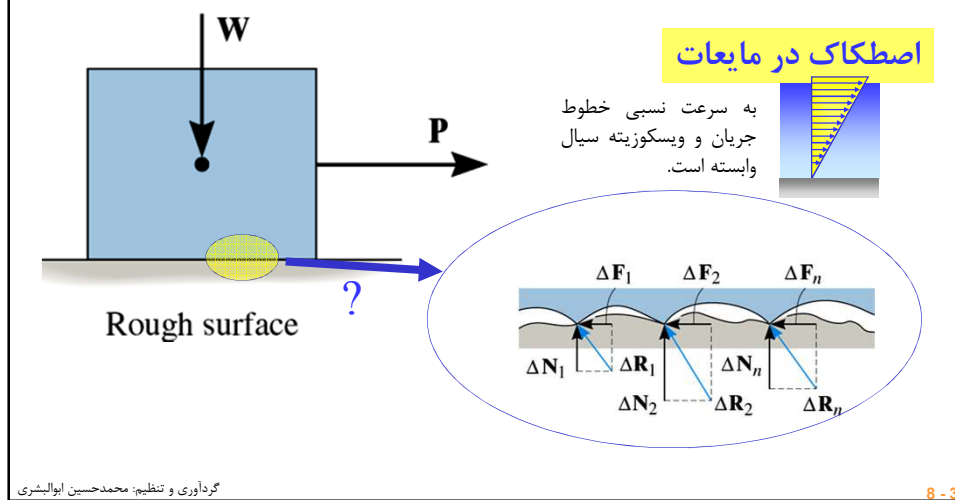


گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

8-2

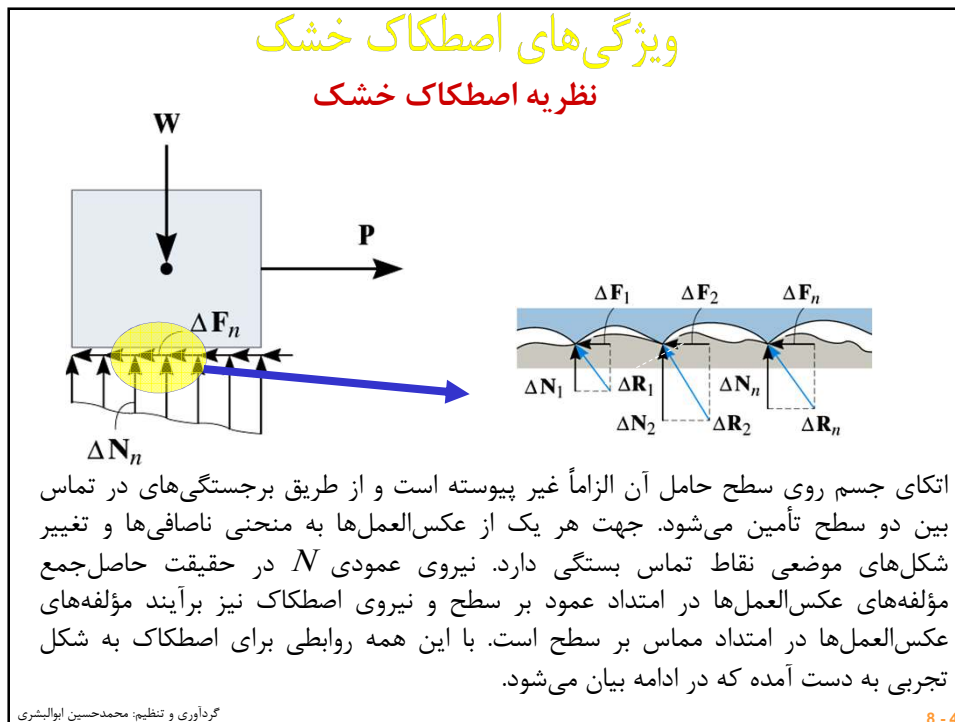
ویژگی‌های اصطکاک خشک

نظریه اصطکاک خشک



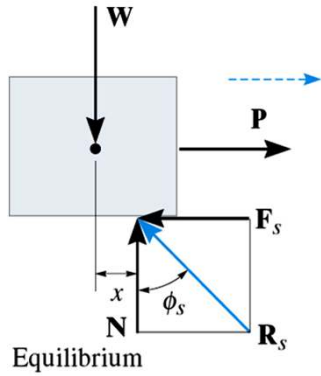
ویژگی‌های اصطکاک خشک

نظریه اصطکاک خشک



ویژگی‌های اصطکاک خشک

آستانه حرکت



نیروی اصطکاک استاتیکی حدی F_s

ضریب اصطکاک استاتیکی μ_s

زاویه اصطکاک ϕ_s

$$F_s = \mu_s N$$

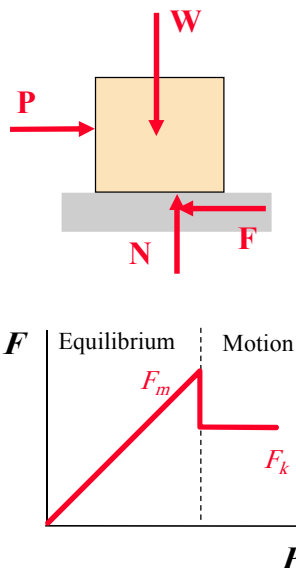
$$\phi_s = \tan^{-1} \left(\frac{F_s}{N} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{\mu_s N}{N} \right) = \tan^{-1} \mu_s$$

$$\tan \phi_s = \mu_s$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالشیری

8 - 5

اصطکاک

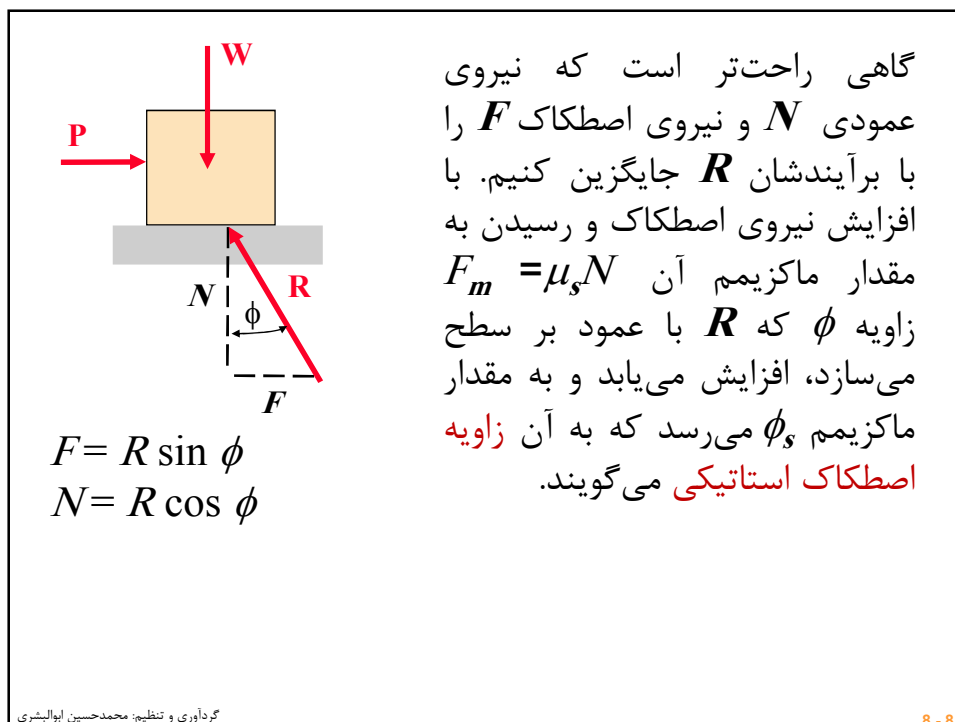
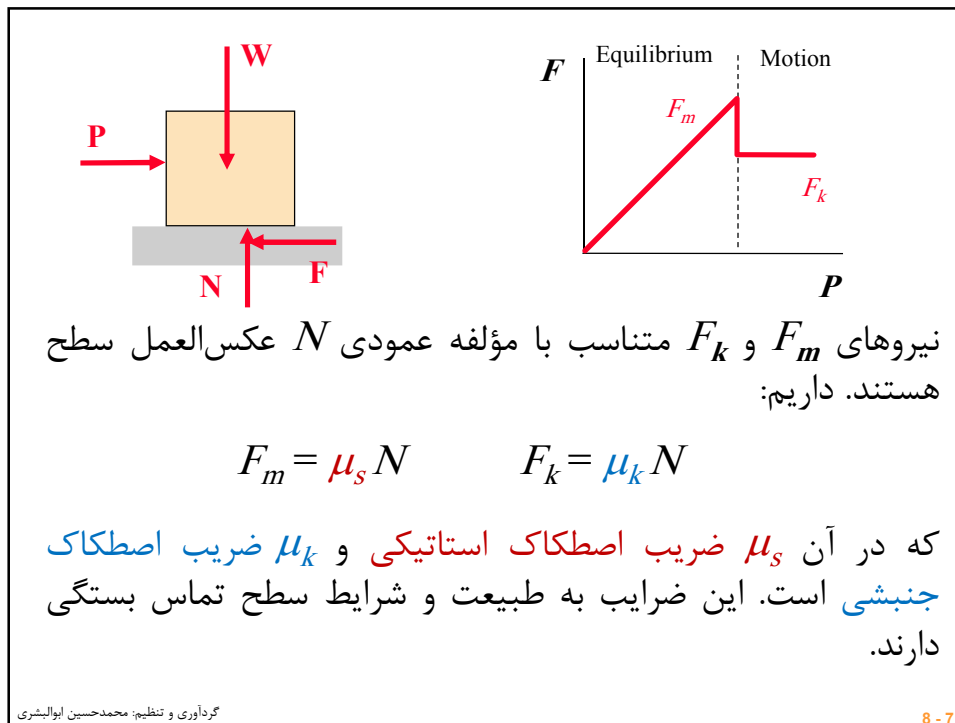


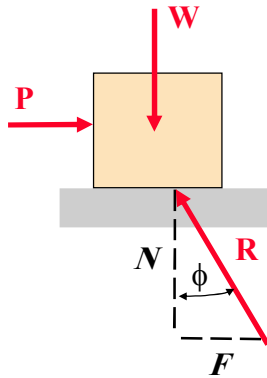
نیروی افقی P که به یک بلوک وارد می‌شود در ابتدا باعث حرکت آن نمی‌شود. این امر به سبب وجود **نیروی اصطکاک F** است که با P در تعادل است.

همچنانکه مقدار P افزایش می‌یابد، مقدار F هم افزایش می‌یابد تا به یک مقدار ماکزیمم F_m می‌رسد. اگر P باز هم افزایش یابد، مقدار F به F_k کاهش یافته و بلوک شروع به لغزیدن می‌کند.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالشیری

8 - 6





$$F = R \sin \phi$$

$$N = R \cos \phi$$

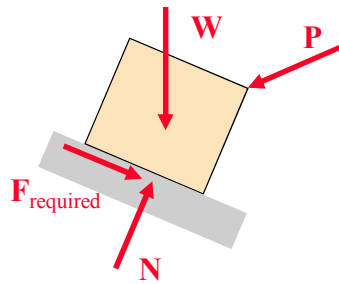
اگر حرکت شروع شود، مقدار F کاهش یافته و به F_k می‌رسد. به طور مشابه زاویه ϕ کاهش یافته و به مقدار ϕ_k می‌رسد که به آن **زاویه اصطکاک جنبشی** می‌گویند. ضریب اصطکاک و زاویه اصطکاک با روابط زیر به هم مربوط می‌شوند.

$$\tan \phi_s = \mu_s$$

$$\tan \phi_k = \mu_k$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

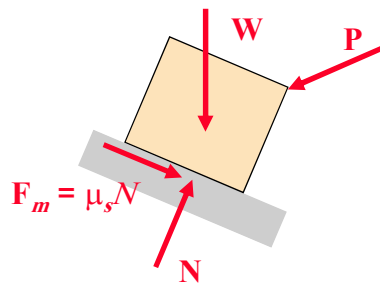
8 - 9



مقدار نیروی اصطکاک F برابر است با $F_m = \mu_s N$ اگر و تنها اگر جسم در **آستانه لغزش** باشد. اگر آستانه حرکت نباشد، F و N مجهولات مستقلی هستند که باید از معادلات تعادل به دست آیند. مقدار F که باعث تعادل می‌شود را باید بررسی کرد که از F_m بیشتر نباشد.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

8 - 10



اگر آستانه حرکت بود، F به مقدار ماکزیمم $F_m = \mu_s N$ می‌رسد و در معادلات تعادل می‌توان به جای F این رابطه را جایگزین کرد.

ویژگی‌های اصطکاک خشک

مقادیر μ_s برای حالت‌های مختلف	
ضرایب	اصطکاک استاتیکی μ_s
مصالح سطوح در تماس	
فلز روی یخ	0.03 - 0.05
چوب روی چوب	0.30 - 0.70
چرم روی چوب	0.20 - 0.50
چرم روی فلز	0.30 - 0.60
آلومینیم روی آلومینیم	1.1 - 1.7
فولاد روی فولاد	0.15 - 0.3

μ_s مستقل از مساحت سطح تماس و وزن جسم و سرعت لغزش است و به جنس سطوح تماس، زبری سطوح، محیط و عوامل دیگر وابسته است. معمولاً $\mu_k = 0.75 \mu_s$

Relations between roughness, temperature and dry sliding friction at the atomic scale

P Spijker, G Anciaux, JF Molinari - Tribology International, 2013
- Elsevier

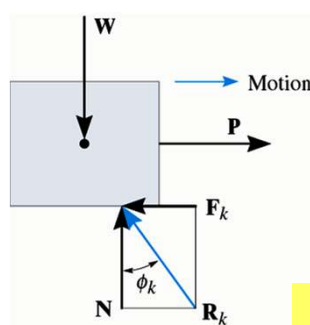
The influence of the temperature in the investigated range (0–400 K) appears to be minimal for the specific cases of limited adhesion and non-commensurate(not equivalent) lattice alignments. Interestingly, for low roughness or atomically flat surfaces, an increase in temperature seems to cause a minor increase in friction.

When the adhesion is increased and the lattices are more commensurate, temperature becomes a dominant factor and increasing it reduces friction considerably, which is in accordance with reduced order models like the Prandtl–Tomlinson model.

8 - 13

ویژگی‌های اصطکاک خشک

اصطکاک در حرکت



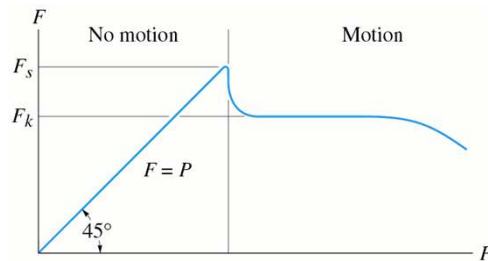
نیروی اصطکاک جنبشی - F_k

ضریب اصطکاک جنبشی - μ_k

زاویه اصطکاک جنبشی - ϕ_k

ویژگی‌های اصطکاک خشک

اصطکاک در حرکت



$$F_k = \mu_k N$$

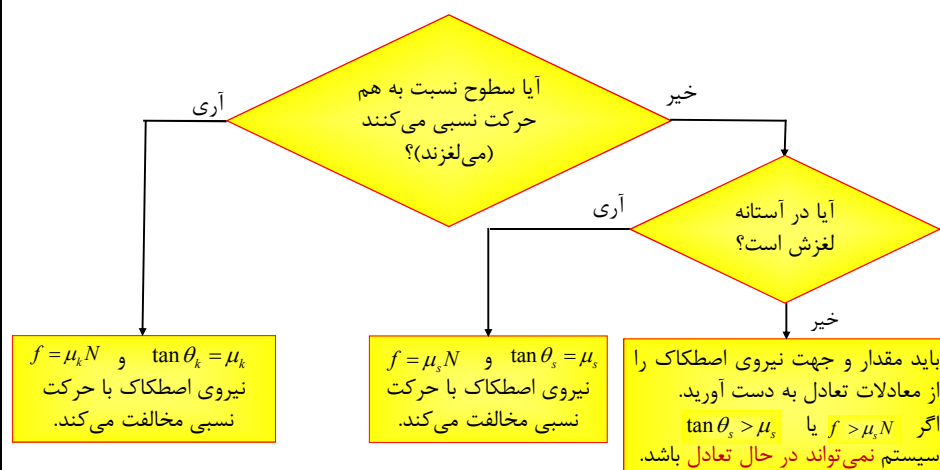
$$\varphi_k = \tan^{-1} \left(\frac{F_k}{N} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{\mu_k N}{N} \right) = \tan^{-1} \mu_k$$

$$\varphi_s \geq \varphi_k$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

8 - 15

ارزیابی نیروی اصطکاک



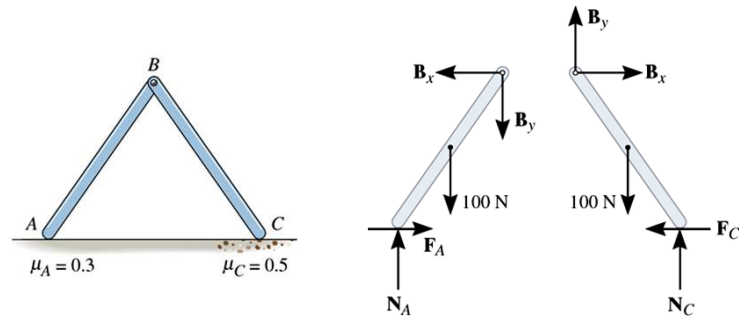
گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

8 - 16

مسائل اصطکاک خشک

انواع مسائل اصطکاک - تعادل

تعداد مجهولات با معادلات تعادل برابر است.



6 مجهول (F_A, N_A, F_C, N_C, B_x and B_y) و 6 معادله تعادل نیروهای اصطکاک باید بعداً بررسی شوند که مطمئن باشیم حرکت اتفاق نیفتاده است.

وقتی F_A, N_A, F_C و N_C به دست آمدند، آنگاه میله‌ها در صورتی در

تعادل هستند که: $F_A \leq 0.3N_A$ and $F_C \leq 0.5N_C$

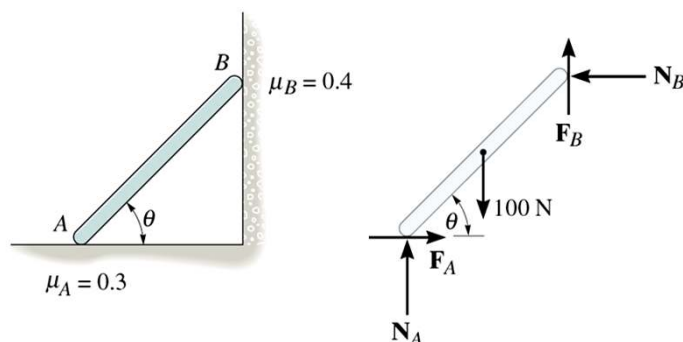
گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

8 - 17

مسائل اصطکاک خشک

انواع مسائل اصطکاک - آستانه حرکت در تمام نقاط

تعداد مجهولات با مجموع معادلات تعادل و اصطکاک برابر است.



5 مجهول ($N_A, F_A, N_B, F_B, \theta$)، 3 معادله تعادل و 2 معادله اصطکاک

$F_A = 0.3N_A$ and $F_B = 0.4N_B$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

8 - 18

مسائل اصطکاک خشک

انواع مسائل اصطکاک - آستانه حرکت در بعضی نقاط

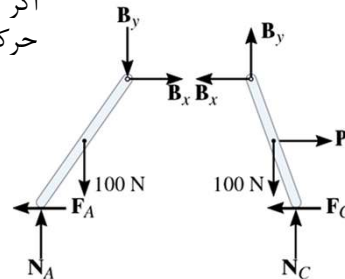
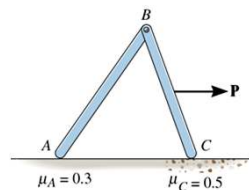
تعداد مجهولات کمتر است از مجموع معادلات تعادل و اصطکاک یا معادلات شرایط واژگونی.

با افزایش P ، اگر ابتدا لغزش در A اتفاق بیفتد و C هنوز در آستانه حرکت نباشد، داریم:

$$F_A = 0.3N_A \text{ and } F_C \leq 0.5N_C$$

اگر لغزش ابتدا در C اتفاق بیفتد و A هنوز در آستانه حرکت نباشد:

$$F_A \leq 0.3N_A \text{ and } F_C = 0.5N_C$$

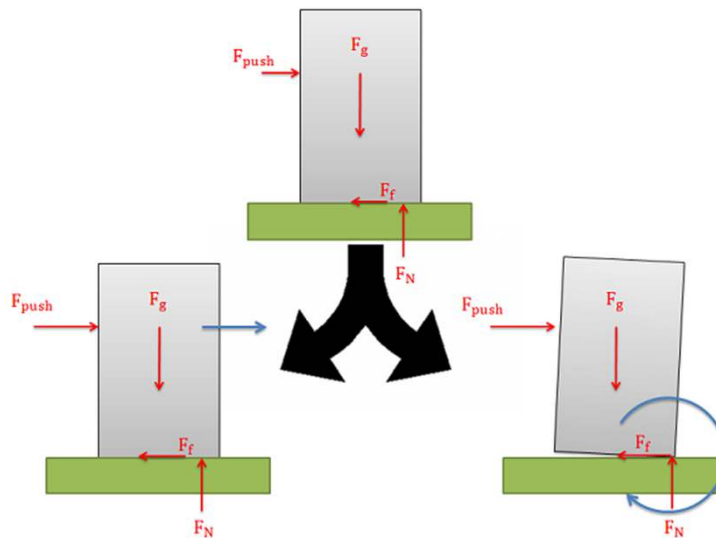


7 مجهول ($N_A, F_A, N_C, F_C, B_x, B_y, P$)، 6 معادله تعادل و 2 معادله اصطکاک (هر بار یک کدام تا جواب یگانه‌ای داشته باشیم).

نیروهای اصطکاک را بررسی می‌کنیم تا ببینیم کدام حرکت زودتر اتفاق می‌افتد.

8 - 19

اگر نیروی هل دادن افزایش یابد جعبه یا در امتداد سطح می‌لغزد (لغزش) (slipping) یا شروع به دوران می‌کند (واژگونی) (tipping).



لغزش

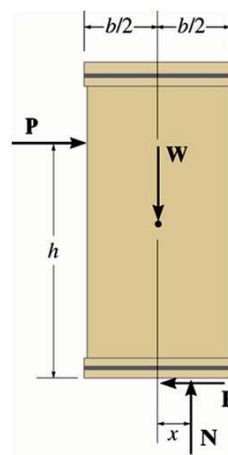
آستانه واژگونی و دوران حول یک نقطه

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

8 - 20

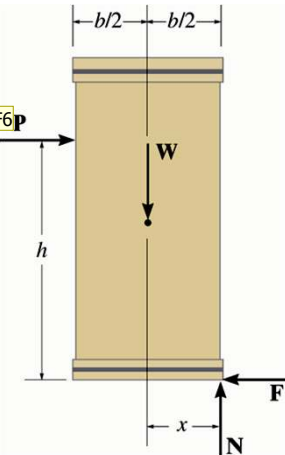
مسائل اصطکاک خشک

انواع مسائل اصطکاک - آستانه حرکت در بعضی نقاط



اگر P کوچک باشد، کمد در تعادل خواهد ماند.

MF6



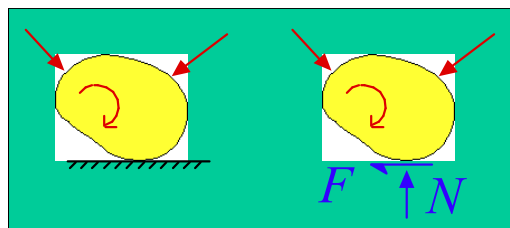
همچنانکه P افزایش پیدا می کند، کمد یا در آستانه لغزش قرار می گیرد و یا اگر سطح زبر باشد (μ_s بزرگ) آنگاه برآیند نیروی عمودی به گوشه حرکت کرده و $x = b/2$ و کمد دوران می کند.

8 - 21

انواع مسائل اصطکاک - جهت آستانه حرکت مشخص نیست.

نکته:

$$-\mu_s N \leq F \leq \mu_s N$$



قید: جهت F همیشه مخالف جهت حرکت یا آستانه حرکت است.

هنگام حل مسائل اصطکاک، باید از پیش یک جهت آستانه حرکت فرض کرد و ترسیمه آزاد را رسم کرد. پس از تحلیل مسئله، فرض انجام شده را باید راستی آزمایی کرد.

Slide 21

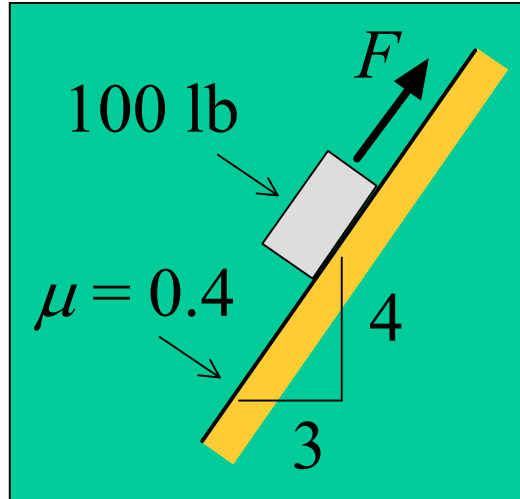
MF6

كریت) صندوق: crate
My Friend ۰۷/۰۵/۲۰۱۰ ؛

مثال ۱:

محدوده نیروی F را که بلوک نمی‌لغزد به دست آورید.

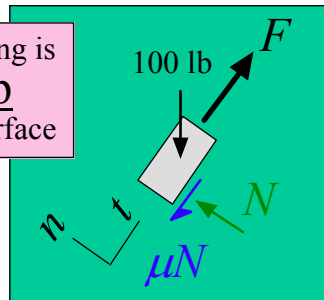
توجه کنید که اگر F بزرگ باشد، لغزش به طرف بالا خواهد بود. اگر F کوچک باشد، لغزش به طرف پایین خواهد بود.



گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

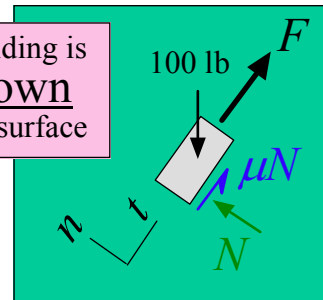
8 - 23

If sliding is up the surface



$$\begin{aligned}\sum F_n &= 0 \\ &= -100 \text{ lb } (3/5) + N \\ &\Rightarrow N = 60 \text{ lb} \\ \sum F_t &= 0 \\ &= -100 \text{ lb } (4/5) - \mu N + F \\ &\Rightarrow \boxed{F = 104 \text{ lb}}\end{aligned}$$

If sliding is down the surface



$$\begin{aligned}\sum F_n &= 0 \\ &\dots \text{ same } \dots \\ &\Rightarrow N = 60 \text{ lb} \\ \sum F_t &= 0 \\ &= -100 \text{ lb } (4/5) + \mu N + F \\ &\Rightarrow \boxed{F = 56 \text{ lb}}\end{aligned}$$

8 - 24

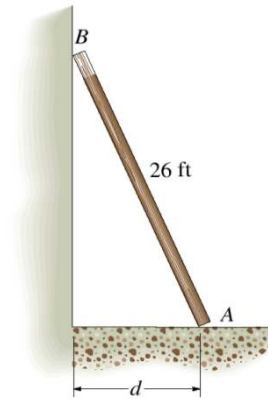
مسئله نمونه 8.1

میله یکنواختی به وزن 30 lb و طول 26 ft مطابق شکل به دیوار صافی تکیه داده شده. ماکزیمم فاصله d که میله از دیوار صاف می‌تواند بدون لغزیدن داشته باشد به دست آورید. ضریب اصطکاک بین زمین و میله برابر است با: $\mu_s = 0.3$

Given: W, l, μ_s

Find: $d_{\max}$

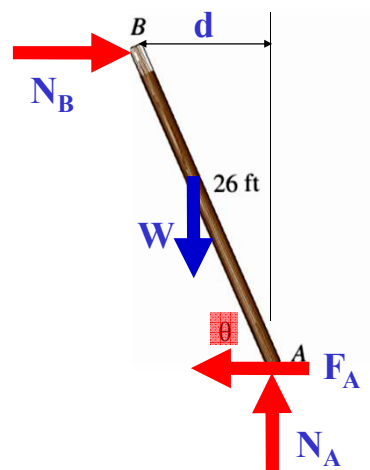
Solution:



گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

8 - 25

مسئله نمونه 8.1



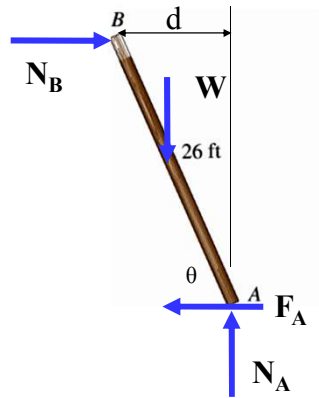
4 unknowns, 3 equilibrium equations and 1 friction equations

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

8 - 26

مسئله نمونه 8.1

Equilibrium Problem



$$\sum F_y = 0 :$$

$$N_A - 30 = 0$$

$$N_A = 30 \text{ lb}$$

$$F_A = (F_A)_{\max} = \mu_s N_A$$

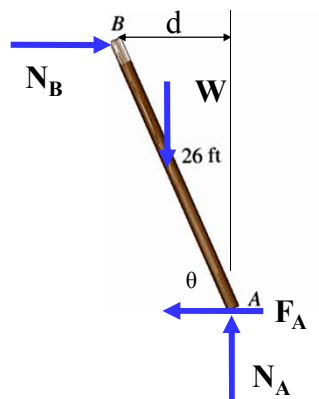
$$F_A = (F_A)_{\max} = .3(30)$$

$$F_A = 9 \text{ lb}$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

8 - 27

مسئله نمونه 8.1



$$\sum F_x = 0 :$$

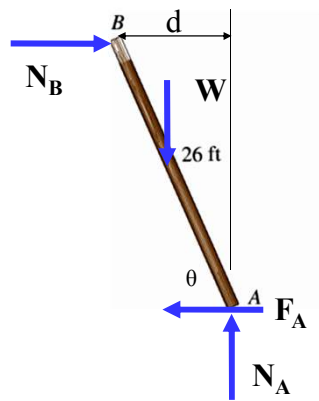
$$N_B - 9 = 0$$

$$N_B = 9 \text{ lb}$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

8 - 28

مسئله نمونه 8.1



$$\sum M_A = 0:$$

$$30(13\cos\theta) - 9(26\sin\theta) = 0$$

$$\theta = 59.04^\circ$$

$$d = 26\cos\theta = 13.4 \text{ ft}$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

8 - 29

گوه‌ها

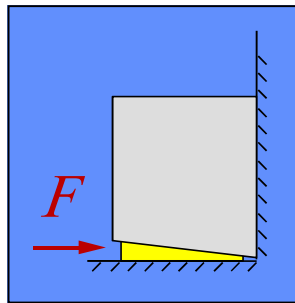


گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

8 - 30

کاربرد گوه‌ها

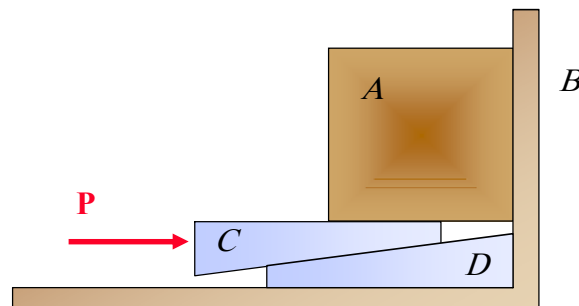
گوه‌ها وسایلی هستند که اغلب برای بوجود آوردن یک بهره مکانیکی استفاده می‌شوند. مثال:



یک نیروی کوچک F بالقوه می‌تواند یک نیروی عمودی بزرگی را بوجود آورد و به بلند شدن جسم بالای خود کمک کند. برای تنظیم ارتفاع اجسام سنگین نیز می‌توان از گوه‌ها استفاده کرد.
یک پیچ (screw) در واقع یک گوه است!

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

8 - 31

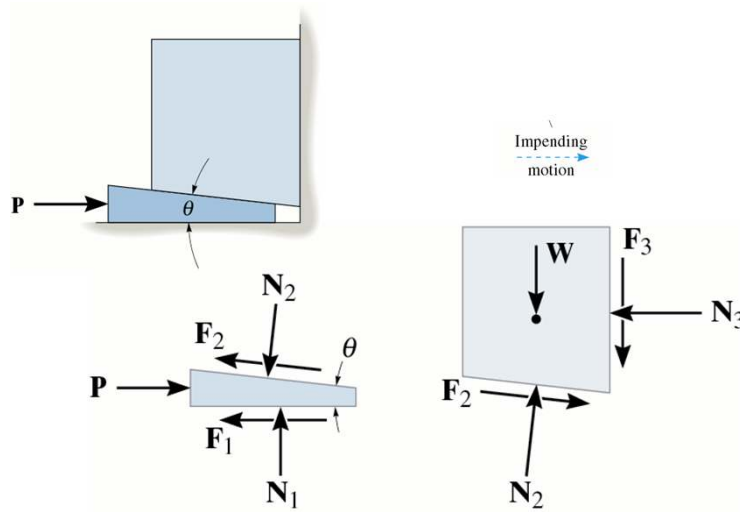


در تحلیل گوه‌ها، برای نشان دادن هر نیروی اصطکاک و جهت آن معمولاً از دو یا چند ترسیمه آزاد استفاده می‌شود.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

8 - 32

گوه‌ها

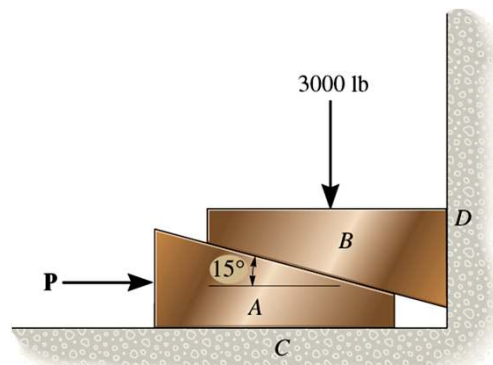


گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالشیری

8 - 33

مسئله نمونه 8.7

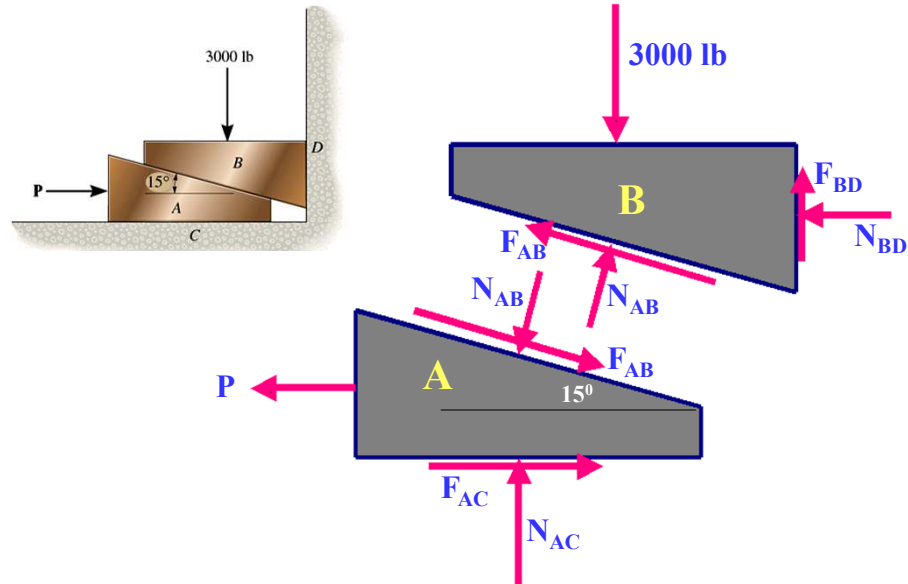
نیروی افقی برعکس P را که برای بیرون کشیدن گوه نیاز است بیابید. ضریب اصطکاک بین A و C و بین B و D برابر با $\mu_s = 0.2$ و بین A و B برابر با $\mu_s' = 0.1$ است. از وزن گوه‌ها صرف‌نظر کنید.



گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالشیری

8 - 34

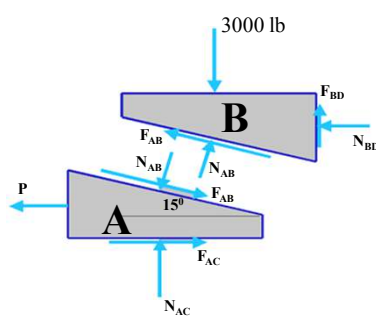
مسئله نمونه 8.7



گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

8 - 35

مسئله نمونه 8.7



Block B

$$\sum F_x = 0:$$

$$N_{AB} \sin 15^\circ - F_{AB} \cos 15^\circ - N_{BD} = 0$$

$$N_{AB} \sin 15^\circ - \mu'_s N_{AB} \cos 15^\circ - N_{BD} = 0$$

$$\sum F_y = 0:$$

$$N_{AB} \cos 15^\circ + F_{AB} \sin 15^\circ + F_{BD} - 3000 = 0$$

$$N_{AB} \cos 15^\circ + \mu'_s N_{AB} \sin 15^\circ + \mu N_{BD} - 3000 = 0$$

Solving

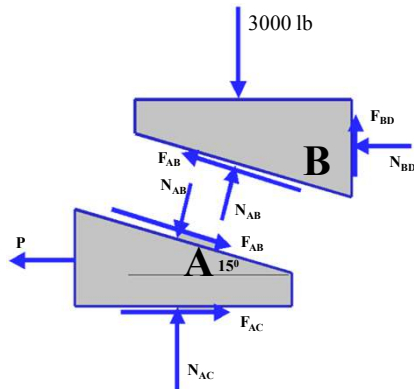
$$N_{AB} = 2929 \text{ lb}$$

$$N_{BD} = 475.2 \text{ lb}$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

8 - 36

مسئله نمونه 8.7



Block A

$$\sum F_y = 0:$$

$$N_{AC} - F_{AB}\sin 15^\circ - N_{AB}\cos 15^\circ = 0$$

$$N_{AC} - \mu'_s N_{AB}\sin 15^\circ - N_{AB}\cos 15^\circ = 0$$

$$N_{AC} = 2905 \text{ lb}$$

$$\sum F_x = 0:$$

$$F_{AC} + F_{AB}\cos 15^\circ - N_{AB}\sin 15^\circ - P = 0$$

$$\mu_s N_{AC} + \mu'_s N_{AB}\cos 15^\circ$$

$$- N_{AB}\sin 15^\circ - P = 0$$

Solving

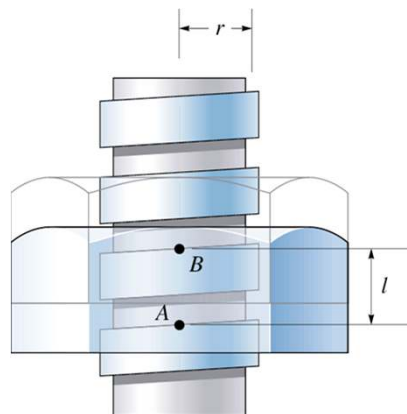
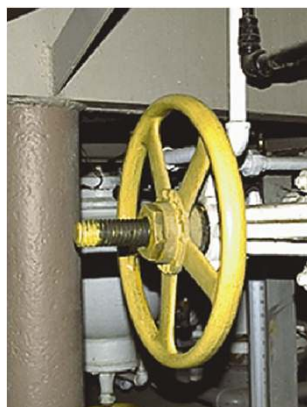
$$P = 106 \text{ lb}$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

8 - 37

نیروهای اصطکاکی در پیچها

تحلیل اصطکاکی



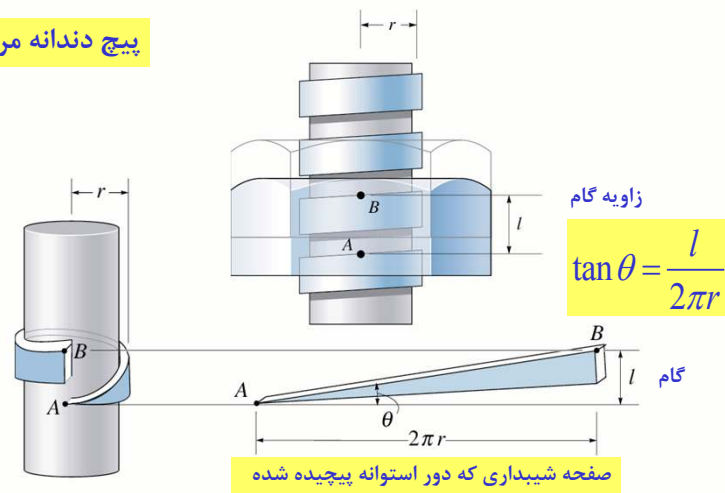
گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

8 - 38

نیروهای اصطکاکی در پیچ‌ها

تحلیل اصطکاکی

پیچ دندانه مربع



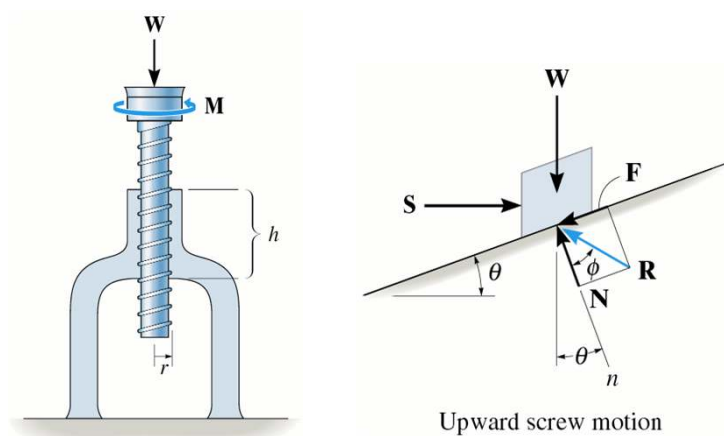
گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالشیری

8 - 39

نیروهای اصطکاکی در پیچ‌ها

حرکت به طرف بالای پیچ در جک

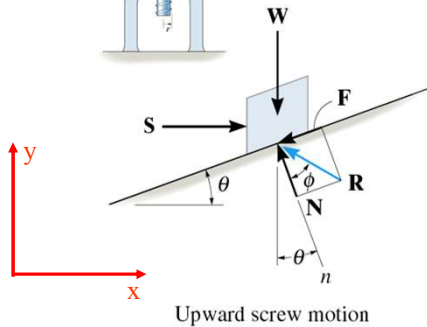
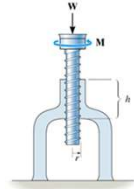
اگر M برای چرخاندن پیچ کافی باشد، دندانه‌های پیچ روی مهره ثابت پایه لغزیده و بالا می‌رود.



8 - 40

نیروهای اصطکاکی در پیچ‌ها

حرکت به طرف بالای پیچ در جک



Upward screw motion

$$\tan \phi = \frac{F}{N} = \frac{\mu N}{N} = \mu$$

معادلات تعادل

$$\sum F_x = 0:$$

$$S - R \sin(\theta + \phi) = 0$$

$$\sum F_y = 0:$$

$$R \cos(\theta + \phi) - W = 0$$

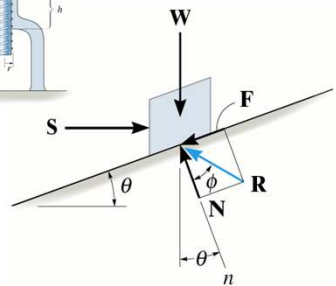
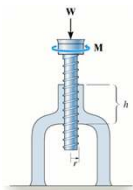
گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

8 - 41

نیروهای اصطکاکی در پیچ‌ها

حرکت به طرف بالای پیچ در جک

M ممان مورد نیاز برای آستانه حرکت به طرف بالا است.



Upward screw motion

$$M = Sr$$

$$M = rR \sin(\theta + \phi)$$

$$M = r \left(\frac{W}{\cos(\theta + \phi)} \right) \sin(\theta + \phi)$$

$$M = rW \tan(\theta + \phi)$$

$\tan(\phi_s) = \mu_s$ زاویه اصطکاک استاتیکی

$\tan(\phi_k) = \mu_k$ زاویه اصطکاک جنبشی

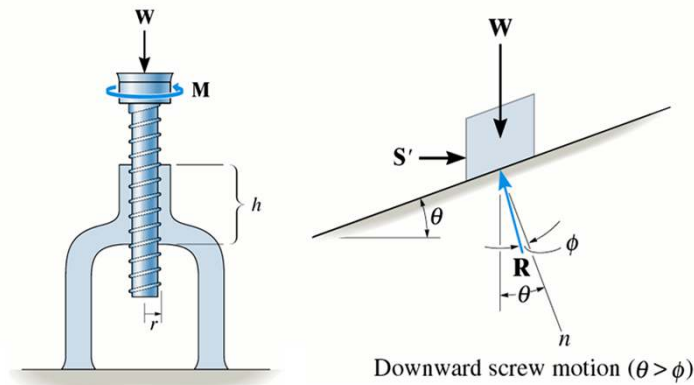
گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

8 - 42

نیروهای اصطکاکی در پیچ‌ها

حرکت به طرف پایین پیچ

اگر سطح پیچ لغزنده باشد و ممان نیز به $M' < M$ کاهش یابد، پیچ به طرف پایین می‌لغزد.



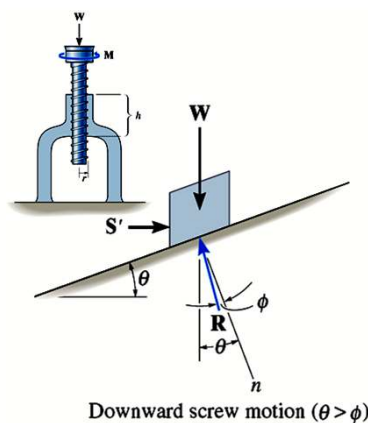
گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

8 - 43

نیروهای اصطکاکی در پیچ‌ها

حرکت به طرف پایین پیچ

$$\theta > \phi$$



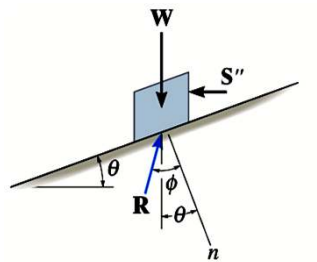
$$M' = rW \tan(\theta - \phi)$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

8 - 44

نیروهای اصطکاکی در پیچ‌ها

وقتی سطح پیچ به اندازه کافی اصطکاک داشته باشد، پیچ به طرف پایین نمی‌آید. در عوض، جهت مماس اعمال شده M'' باید برعکس شود تا باعث حرکت شود.



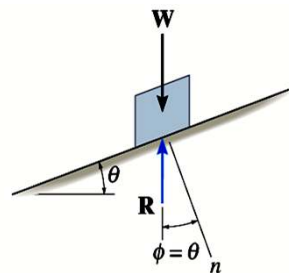
Downward screw motion ($\theta < \phi$)

$$\theta < \phi$$

$$M'' = rW \tan(\phi - \theta)$$

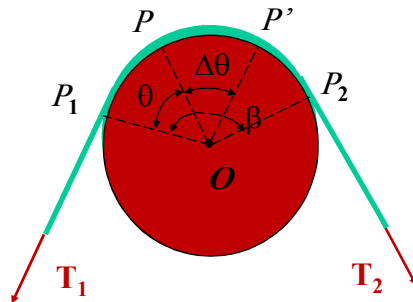
پیچ‌های خود قفل شونده

اگر مماس M برداشته شود، پیچ خود قفل شونده است؛ یعنی بار W را تنها با نیروی اصطکاک تحمل می‌کند به شرطی که: $\phi \geq \theta$



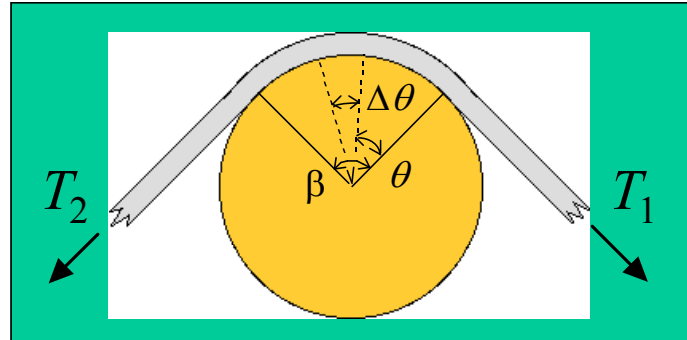
Self-locking screw ($\theta = \phi$)
(on the verge of rotating downward)

8 - 45



اگر **تسمه تختی** روی استوانه‌ای قرار گرفته باشد، به دست آوردن جهت لغزش یا آستانه لغزش تسمه مهم است. اگر استوانه دوران کند، حرکت یا تمایل به حرکت تسمه **نسبت** به استوانه باید بررسی شود. روابط این بخش برای مسائلی که تسمه در آستانه لغزش است با در نظر گرفتن $\mu = \mu_s$ و برای مسائلی که تسمه می‌لغزد با $\mu = \mu_K$ معتبر است.

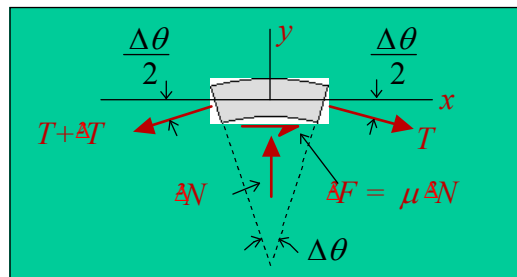
تسمه اصطکاکی روی یک سطح استوانه‌ای



اگر $T_2 > T_1$ ، آنگاه تسمه در جهت T_2 می‌لغزد.
گرچه تسمه پیوسته است، کشش T_1 و T_2 برابر نیستند.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

8 - 47



$$\sum F_x = 0 = -(T + \Delta T) \cos(\Delta\theta/2) + T \cos(\Delta\theta/2) + \mu \Delta N$$

$$\sum F_y = 0 = -(T + \Delta T) \sin(\Delta\theta/2) - T \sin(\Delta\theta/2) + \Delta N$$

دقت کنید که برای $\Delta\theta$ (بر حسب رادیان) $\sin(\Delta\theta) \approx \Delta\theta$ و $\cos(\Delta\theta) \approx 1$
با تقسیم بر $\Delta\theta$ و گرفتن حد $\Delta\theta \rightarrow 0$ ، ترکیب معادلات داریم:

$$-(T + \Delta T) + T + \mu \Delta N = 0 \rightarrow \mu = \frac{\Delta T}{\Delta N}$$

$$-(T + \Delta T) \frac{\Delta\theta}{2} - T \frac{\Delta\theta}{2} + \Delta N = 0 \rightarrow -T \Delta\theta + \frac{\Delta T}{\mu} = 0$$

$$\frac{dT}{d\theta} - \mu T = 0$$

8 - 48

$$\frac{dT}{d\theta} - \mu T = 0$$

multiply by $d\theta/T$ and integrate both sides for

$$\int_{T_1}^{T_2} \frac{1}{T} dT = \int_0^{\beta} \mu d\theta$$

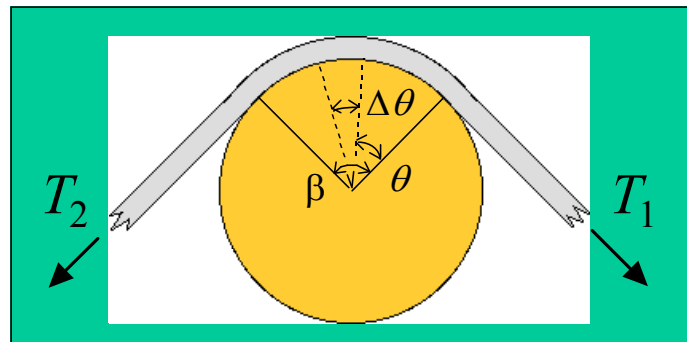
$$\ln T_2 - \ln T_1 = \mu\beta$$

$$\ln \frac{T_2}{T_1} = \mu\beta \quad \text{or} \quad \frac{T_2}{T_1} = e^{\mu\beta} \quad T_2 > T_1$$

μ = ضریب اصطکاک استاتیکی یا جنبشی
 β = زاویه سطح تماس (رادیان)

8 - 49

تسمه اصطکاکی روی یک سطح استوانه‌ای



$$T_2 = T_1 e^{\mu\beta} \quad T_2 > T_1$$

μ = ضریب اصطکاک استاتیکی یا جنبشی
 β = زاویه سطح تماس (رادیان)

8 - 50

مسئله نمونه 8.8

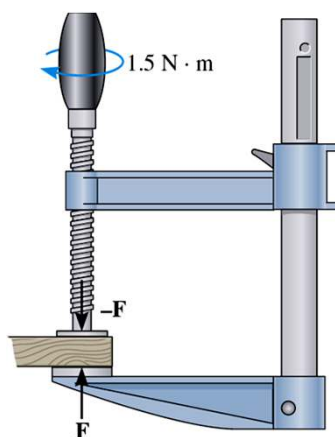
گیره‌ای با پیچ دندانه مربع به قطر متوسط 14 mm و اندازه گام 6mm بلوک را می‌فشارد. اگر $\mu_s = 0.2$ باشد، و گشتاور اعمال شده بر دسته 1.5 N.m باشد، نیروی فشاری F وارد شده بر بلوک را به دست آورید.

Given: $D_{\min}$, L , μ_s , M

Find: F

Solution:

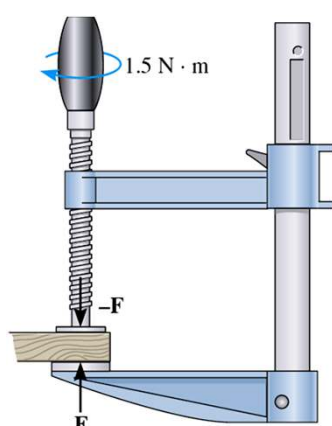
پیچ در آستانه حرکت به طرف بالا بیشترین نیروی فشاری را وارد می‌کند.



گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

8 - 51

Sample Problem 8.8



$$\tan \theta = \frac{l}{2\pi r} = \frac{6}{2\pi 7}$$

$$\theta = 7.77^\circ$$

$$W = F$$

$$\tan \phi = \mu = .2$$

$$\phi = 11.3^\circ \quad \Phi > \theta \quad \text{و پیچ در آستانه}$$

Then حرکت به بالا است.

$$M = Wr \tan(\theta + \phi)$$

$$M = Fr \tan(\theta + \phi)$$

$$F = \frac{M}{r \tan(\theta + \phi)}$$

$$F = \frac{1.5}{(.007) \tan(7.77^\circ + 11.3^\circ)}$$

$$F = 620 \text{ N}$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

8 - 52

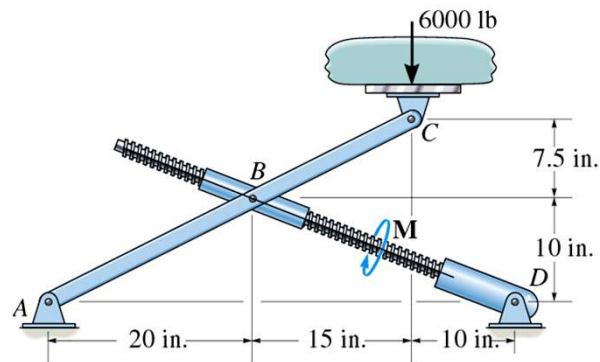
Sample Problem 8.9

The jacking mechanism consists of a link that has a square-threaded screw with a mean diameter of 0.5 in. and a lead of 0.20 in., and the coefficient of static friction is $\mu_s = 0.4$. Determine the torque M that should be applied to the screw to start lifting the 6000 lb load acting at the end of member ABC.

Given: D_{min} , L , μ_s , F

Find: M

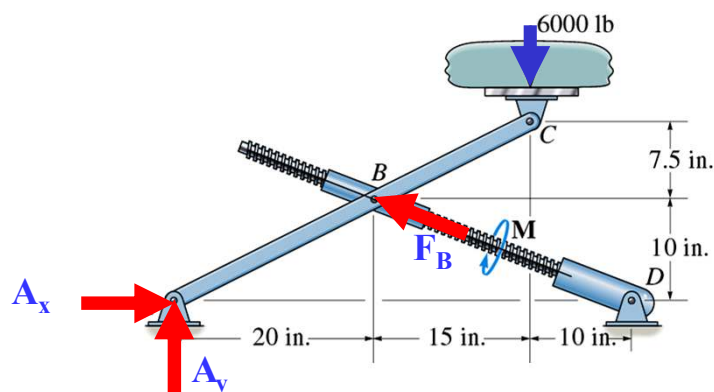
Solution:



گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

8 - 53

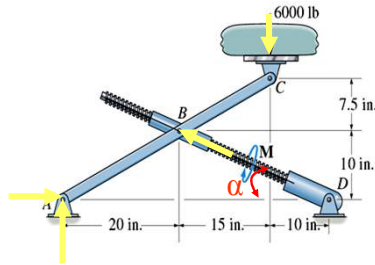
Sample Problem 8.9



گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

8 - 54

Sample Problem 8.9



$$\tan \alpha = \frac{10}{25} = .4$$

$$\alpha = 21.8^\circ$$

and

$$\tan \phi_s = \mu_s = .4$$

$$\phi_s = 21.8^\circ$$

$$\tan \theta = \frac{l}{2\pi r} = \frac{.2}{2\pi(.25)}$$

$$\theta = 7.256^\circ$$

Find F_{BD} from $\sum M_A = 0$

$$F_{BD} \cos \alpha (10) + F_{BD} \sin \alpha (20) - 6000(35) = 0$$

$$F_{BD} = 12565 \text{ lb}$$

Then

$$M = Wr \tan(\theta + \phi)$$

$$M = (12565)(.25) \tan(7.256^\circ + 21.8^\circ)$$

$$M = 1745 \text{ lb} \cdot \text{ft}$$

8 - 55

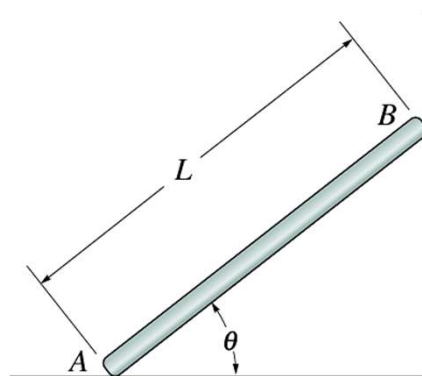
Sample Problem 8.2

The rod has a weight W and rests against the floor and wall for which the coefficients of static friction are μ_A and μ_B , respectively. Determine the smallest value of θ for which the rod will not move.

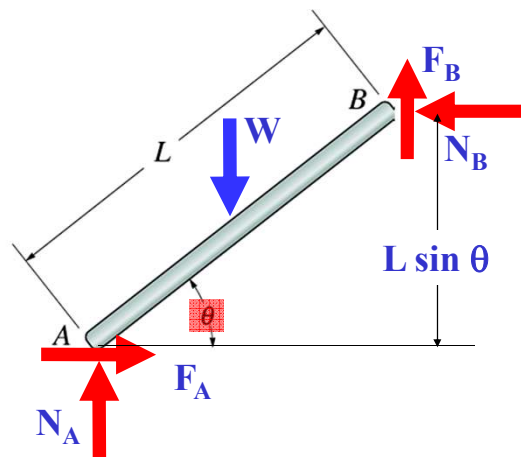
Given: W, L, μ_A, μ_B

Find: $\theta_{\min}$

Solution:



Sample Problem 8.2



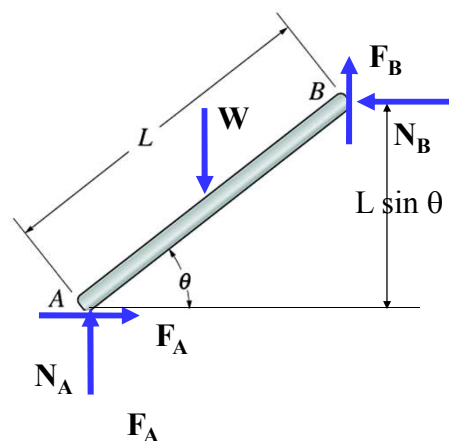
5 unknowns, 3 equilibrium equations and 2 friction equations

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

8 - 57

Sample Problem 8.2

Impending Motion at All Points



گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

8 - 58

Sample Problem 8.2

Equilibrium Eqs.

$$\sum F_x = 0:$$

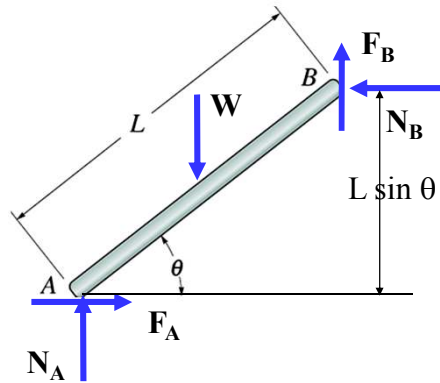
$$F_A - N_B = 0$$

$$\sum F_y = 0:$$

$$F_B + N_A - W = 0$$

$$\sum M_A = 0:$$

$$N_B(L \sin \theta) + F_B(L \cos \theta) - W\left(\frac{L}{2} \cos \theta\right) = 0$$



گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

8 - 59

Sample Problem 8.2

slipping must
occur at A & B

$$F_A = \mu_A N_A$$

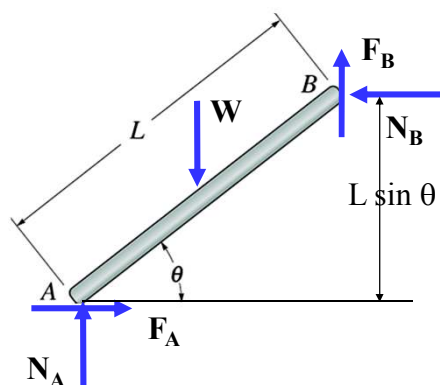
$$F_B = \mu_B N_B$$

and substituting

$$N_A = \frac{W}{1 + \mu_A \mu_B}$$

$$N_B = \frac{\mu_A W}{1 + \mu_A \mu_B}$$

$$\tan \theta = \frac{1 - \mu_A \mu_B}{2\mu_A}$$



گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

8 - 60

Sample Problem 8.3

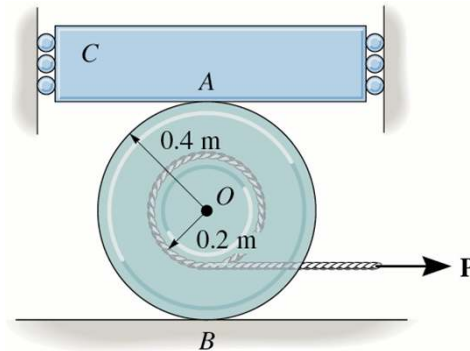
The block C has a mass of 50 kg and is confined between two walls by smooth rollers. If the block rests on top of the 40 kg spool, determine the minimum cable force P needed to move the spool. The cable is wrapped around the spool's inner core. The coefficient of static friction at A and B are $\mu_A=0.3$ and $\mu_B=0.6$.

MF1

Given: W_C , W_S , μ_A , μ_B

Find: P

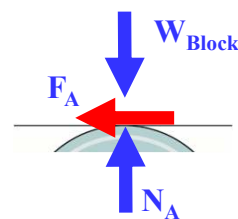
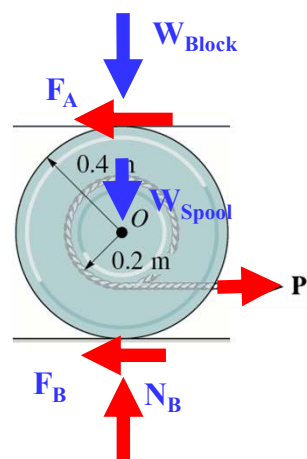
Solution:



گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

8 - 61

Sample Problem 8.3



4 unknowns, 3 equilibrium equations and 2 friction equations
Find where slipping occurs first

Note that the spool will move (translate) to the right and the friction forces are opposed to that.

8 - 62

Slide 61

MF1

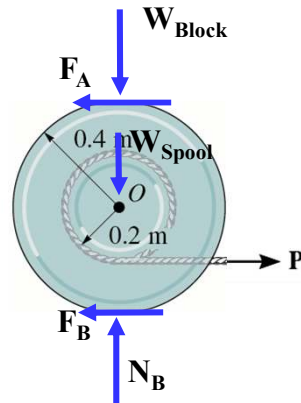
confine: restrict

spool: فرقہ سیم

My Friend ۱۸/۰۵/۲۰۰۹ :

Sample Problem 8.3

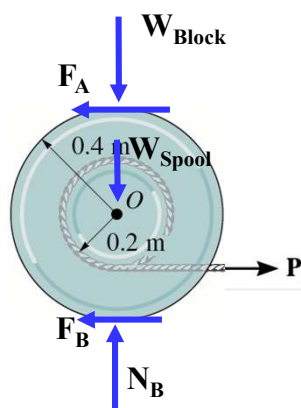
Impending Motion at Some Points



گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالشیری

8 - 63

Sample Problem 8.3



$$\sum F_y = 0:$$

$$N_B - 40(9.81) - 50(9.81) = 0$$

$$N_B = 882.9 \text{ N}$$

$$\sum M_O = 0:$$

$$F_A(0.4) - F_B(0.4) + P(0.2) = 0$$

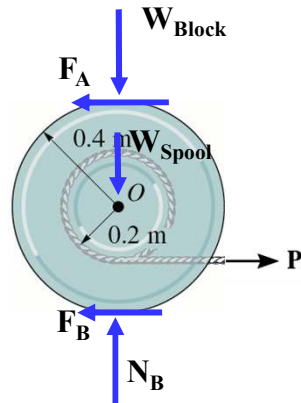
$$\sum F_x = 0:$$

$$-F_A - F_B + P = 0$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالشیری

8 - 64

Sample Problem 8.3



Assume spool slips at A, then

$$F_A = \mu_A N_A$$

$$F_A = (.3)(50)(9.81)$$

$$F_A = 147.2 \text{ N}$$

Solving

$$F_B = 441.4 \text{ N}$$

$$P = 589 \text{ N}$$

Assume slipping at B, then

$$F_B = \mu_B N_B = .6(882.9) = 529 \text{ N}$$

Since this larger than 441.4 N, then the original assumption is correct.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

8 - 65

Sample Problem 8.4

The three bars have a weight of $W_A = 20 \text{ lb}$, $W_B = 40 \text{ lb}$ and $W_C = 60 \text{ lb}$, respectively. If the coefficients of static friction at the surfaces are as shown, determine the smallest horizontal force P needed to move block A.

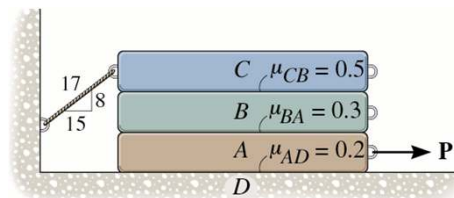
Given: $W_A, W_B, W_C, \mu_{AD}, \mu_{AB}, \mu_{CD}$

Find: $P_{\min}$ to move A

Solution:

We should consider one of the following conditions:

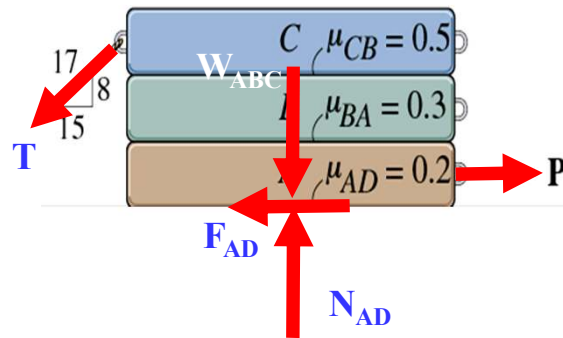
- 1- If blocks A & B move first
- 2- If blocks A move first



گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

8 - 66

Sample Problem 8.4

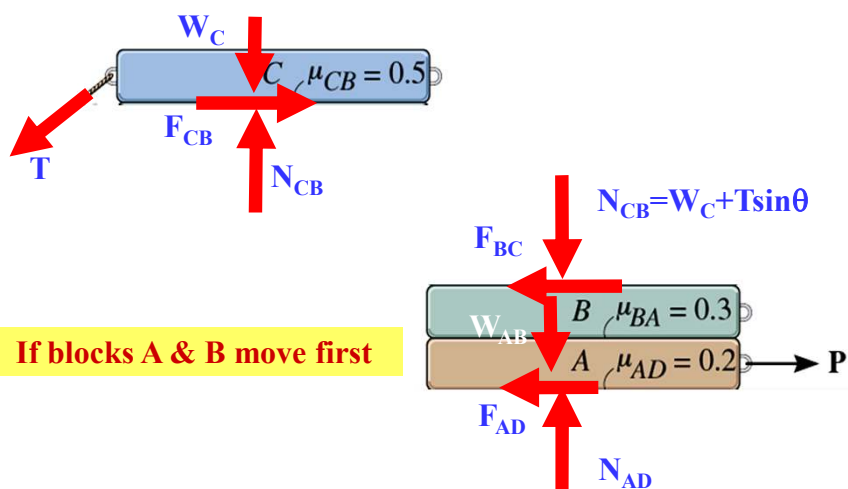


Entire series of boxes

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

8 - 67

Sample Problem 8.4

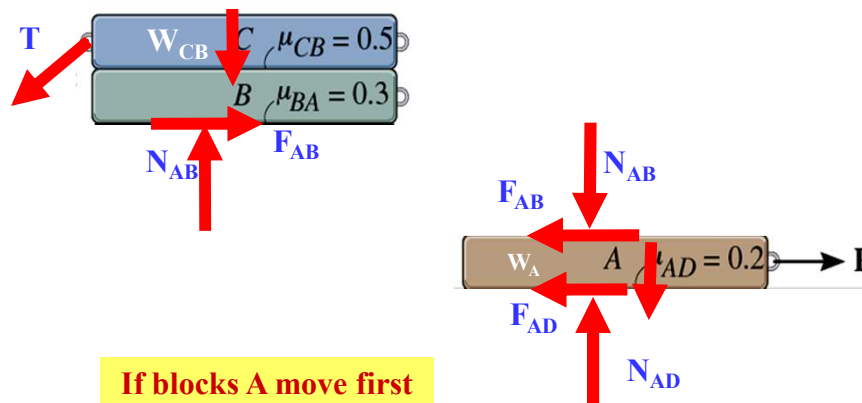


If blocks A & B move first

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

8 - 68

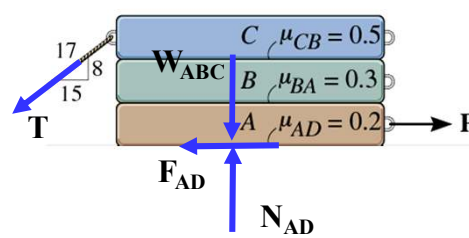
Sample Problem 8.4



گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

8 - 69

Sample Problem 8.4

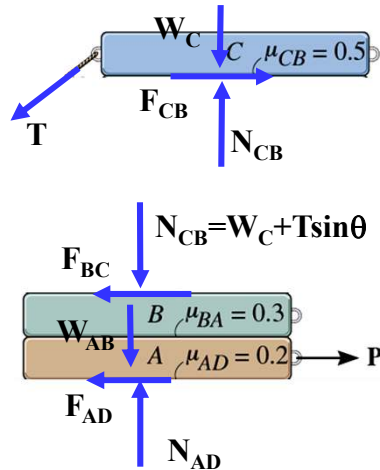


گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

8 - 70

Sample Problem 8.4

If blocks A & B move first



$$\sum F_y = 0:$$

$$N_{CB} - T\left(\frac{8}{17}\right) - 60 = 0$$

$$\sum F_x = 0:$$

$$F_{CB} - T\left(\frac{15}{17}\right) = 0$$

$$\mu_{CB} N_{CB} - T\left(\frac{15}{17}\right) = 0$$

$$(.5)N_{CB} - T\left(\frac{15}{17}\right) = 0$$

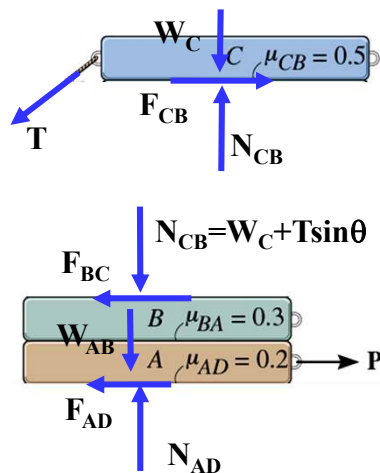
$$T = 46.36 \text{ lb and } N_{CB} = 81.82 \text{ lb}$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

8 - 71

Sample Problem 8.4

If blocks A & B move first



$$\sum F_y = 0:$$

$$N_{AD} - N_{CB} - 60 = 0$$

$$N_{AD} = N_{CB} + 60 = 0$$

$$N_{AD} = 141.82 \text{ lb}$$

$$\sum F_x = 0:$$

$$P - \mu_{CB} N_{CB} - \mu_{AD} N_{AD} = 0$$

$$P = .5N_{CB} + .2N_{AD}$$

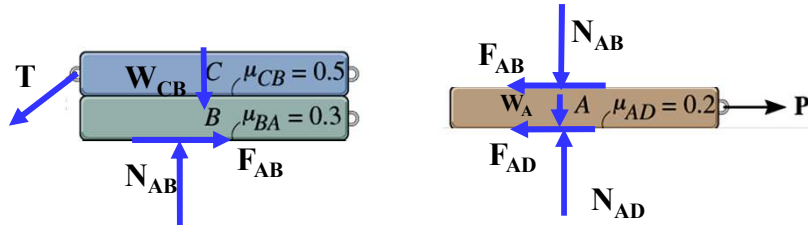
$$P = 69.27 \text{ lb}$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

8 - 72

Sample Problem 8.4

If blocks A move first



$$\sum F_y = 0:$$

$$N_{AB} - T\left(\frac{8}{17}\right) - 100 = 0$$

$$\sum F_x = 0:$$

$$\mu_{AB} N_{AB} - T\frac{15}{17} = 0$$

$$.3N_{AB} - T\frac{15}{17} = 0$$

$$\sum F_y = 0:$$

$$N_{AD} - N_{AB} - 20 = 0$$

$$\sum F_x = 0:$$

$$P - \mu_{AB} N_{AB} - \mu_{AD} N_{AD} = 0$$

$$\begin{aligned} T &= 40.48 \text{ lb} \\ N_{AB} &= 119.05 \text{ lb} \\ N_{AD} &= 139.05 \text{ lb} \\ P &= 63.52 \text{ lb} \end{aligned}$$

Therefore block A moves first

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالشیری

8 - 73

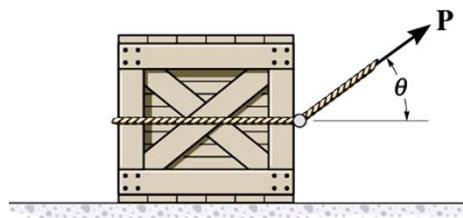
Sample Problem 8.5

The crate has a weight W and the coefficient of static friction at the surface is $\mu_s = 0.3$. Determine the orientation of the cord and the smallest possible force P that has to be applied to the cord so that the crate is on the verge of moving.

Given:

Find:

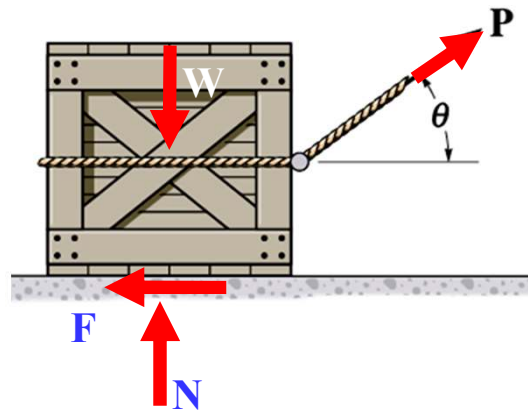
Solution:



گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالشیری

8 - 74

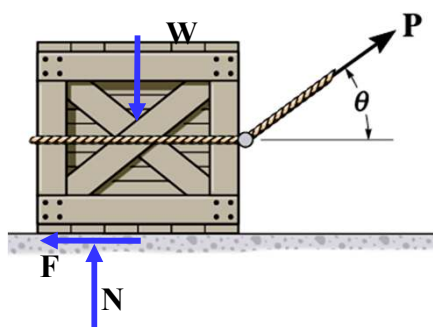
Sample Problem 8.5



گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

8 - 75

Sample Problem 8.5



Equilibrium Equations

$$\sum F_y = 0 :$$

$$N + P \sin \theta - W = 0$$

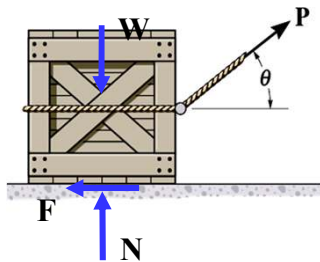
$$\sum F_x = 0 :$$

$$P \cos \theta - F = 0$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

8 - 76

Sample Problem 8.5



Friction Equations

$$F = \mu N = .3(N)$$

substituting into the equilibrium equations

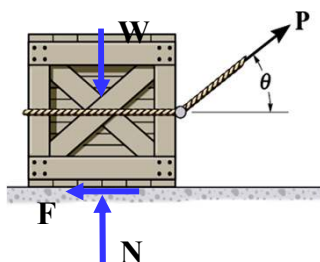
$$P \cos \theta - .3N = 0$$

$$P = \frac{.3N}{\cos \theta}$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

8 - 77

Sample Problem 8.5



and

$$N + P \sin \theta - W = 0$$

$$N + \left(\frac{.3N}{\cos \theta} \right) \sin \theta - W = 0$$

$$N(\cos \theta + .3 \sin \theta) = W \cos \theta$$

$$N = \frac{W \cos \theta}{(\cos \theta + .3 \sin \theta)}$$

$$P = \frac{.3W}{(\cos \theta + .3 \sin \theta)}$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

8 - 78

Sample Problem 8.5

for minimum P , $\frac{dP}{d\theta} = 0$

$$\frac{dP}{d\theta} = .3W \left[\frac{\sin\theta - .3\cos\theta}{(\cos\theta + .3\sin\theta)^2} \right] = 0$$

or

$$\sin\theta - .3\cos\theta = 0$$

and

$$\theta = 16.7^\circ$$

$$\frac{d^2P}{d\theta^2} = .3W \left[\frac{(\cos\theta + .3\sin\theta)^2 + 2(\sin\theta - .3\cos\theta)^2}{(\cos\theta + .3\sin\theta)^3} \right]$$

$$\text{at } \theta = 16.7^\circ$$

$$\frac{d^2P}{d\theta^2} = .2873W > 0 \text{ therefore, } P \text{ is a minimum}$$

$$P = \frac{.3W}{(\cos\theta + .3\sin\theta)} = P = \frac{.3W}{(\cos 16.7^\circ + .3\sin 16.7^\circ)}$$

$$P = .287W$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

8 - 79

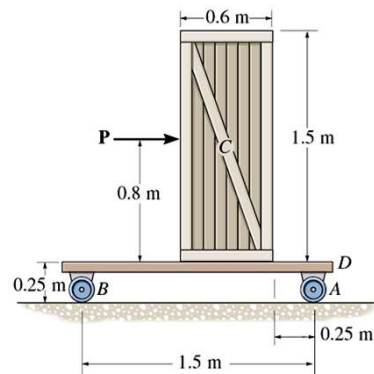
Sample Problem 8.6

The uniform 60 kg crate C rests uniformly on a 10 kg dolly D. If the front casters of the dolly at A are locked to prevent rolling while the casters at B are free to roll, determine the maximum force P that may be applied without causing motion of the crate. The coefficient of static friction between the casters and the floor is $\mu_f = 0.35$ and between the dolly and the crate, $\mu_d = 0.6$.

Given:

Find:

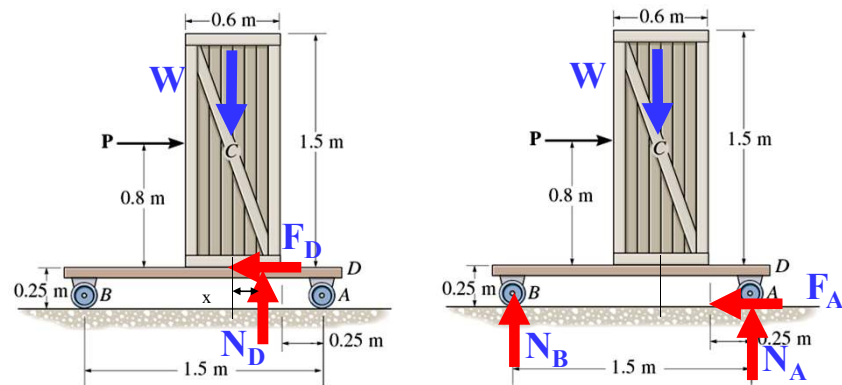
Solution:



گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

8 - 80

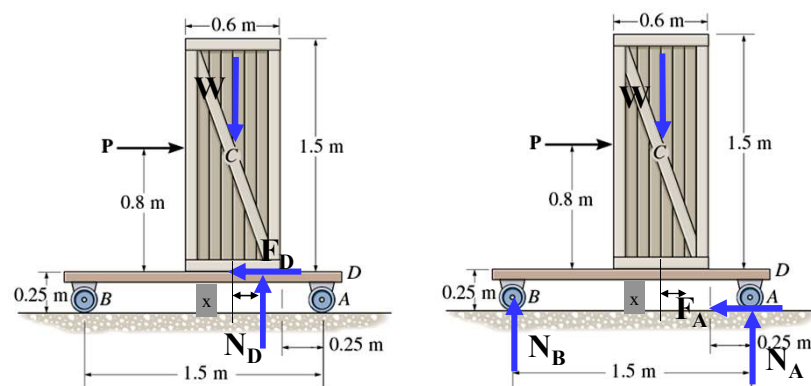
Sample Problem 8.6



گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

8 - 81

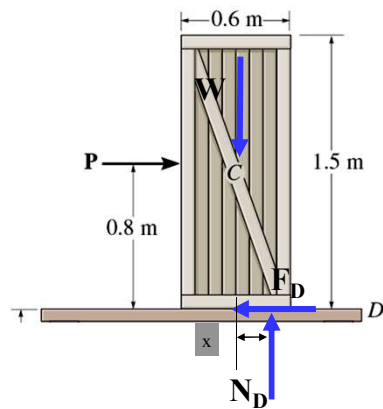
Sample Problem 8.6



گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

8 - 82

Sample Problem 8.6



Equilibrium For Tipping

$$\sum F_y = 0:$$

$$N_D - 60(9.81) = 0$$

$$N_D = 588.6 \text{ N}$$

$$\sum F_x = 0:$$

$$P - F_D = 0$$

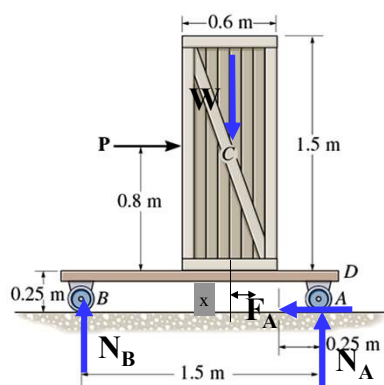
$$\sum M_A = 0:$$

$$588.6(x) - P(0.8) = 0$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالشیری

8 - 83

Sample Problem 8.6



Equations for Sliding at A

$$\sum F_y = 0:$$

$$N_B + N_A - 60(9.81) - 10(9.81) = 0$$

$$\sum F_x = 0:$$

$$P - F_A = 0$$

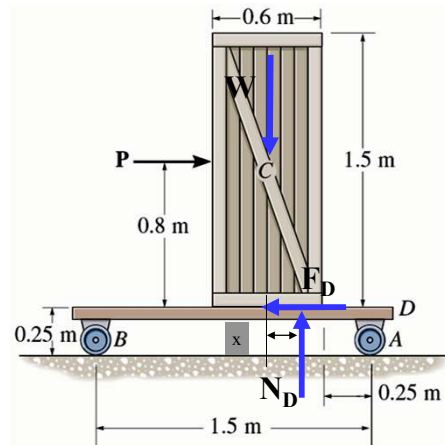
$$\sum M_B = 0:$$

$$N_A(1.5) + P(1.05) - 60(9.81)(0.95) - 10(9.81)(0.75) = 0$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالشیری

8 - 84

Sample Problem 8.6



Friction at D

Assume crate slips on dolly

$$F_D = \mu_D N_D = .5(588.6)$$

$$F_D = 294.3 \text{ N}$$

Substituting

$$P = 294.3 \text{ N}$$

$$x = .4 \text{ m}$$

since $x > .3$ the crate tips and tipping occurs when $x = .3 \text{ m}$. Then

$$P = 220.7 \text{ N}$$

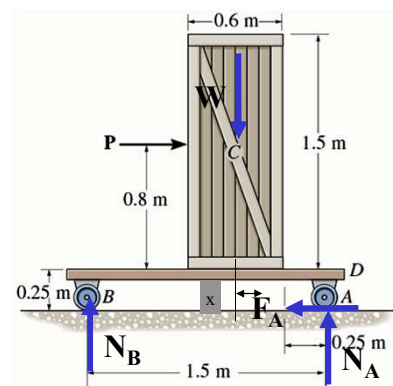
$$F_D = 220.7 \text{ N}$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

8 - 85

Sample Problem 8.6

Sliding at A



Assume crate slips on dolly

$$F_A = \mu_A N_A = .35 N_A$$

and

$$P - F_A = 0$$

$$P = .35 N_A$$

substituting

$$N_B(1.5) + (.35 N_A)(1.05) - 60(9.81)(.75) - 10(9.81)(.75) = 0$$

and

$$N_B + N_A - 60(9.81) - 10(9.81) = 0$$

solving

$$N_A = 454.8 \text{ N}$$

$$N_B = 231.9 \text{ N}$$

$$P = 159.2 \text{ N}$$

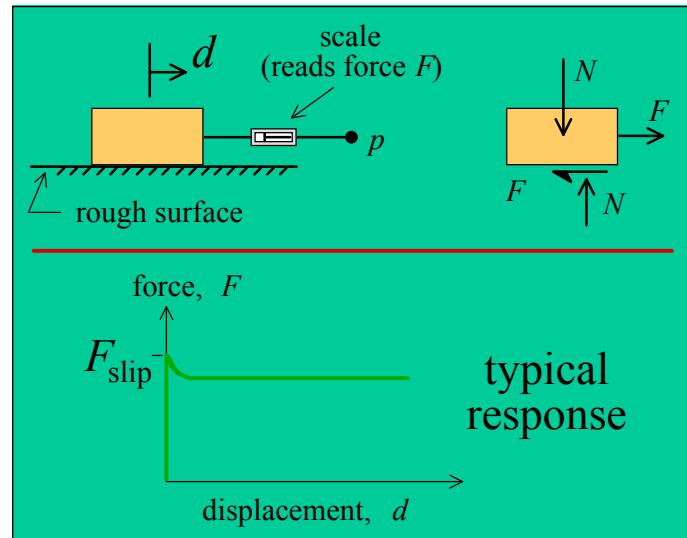
گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

8 - 86

MF9

Coulomb (“Dry”) friction

Consider a simple experiment where we slowly pull point p :



8 - 87

Remarkably, the force that produces slipping is reasonably accurately given by

$$F_{\text{slip}} = \mu N$$

coefficient of friction *contact normal force*

- μ depends on:
- the contacting materials
 - surface roughness &/or preparation
 - environment
 - many other factors ...

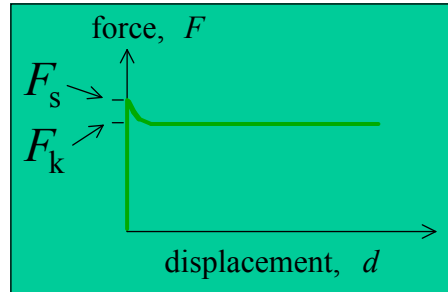
- μ is assumed to be independent of:
- area of contact
 - sliding velocity

MF9

read: showing

My Friend • V / • Δ / γ • \ • † :

Closer look at the behavior when slipping initiates:



for:

initiation of slip (impending slip) $F_s = \mu_s N$

for subsequent slip (sliding) $F_k = \mu_k N$

μ_s = coefficient of static friction

μ_k = coefficient of kinetic friction

8 - 89

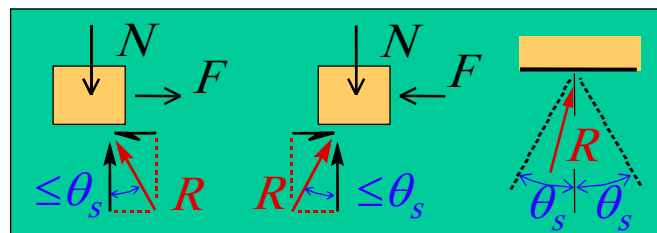
Angle of friction

In some fields of engineering (e.g., geomechanics), it is customary to use the *angle of friction* rather than the coefficient of friction to characterize frictional resistance.

The *angle of friction* is defined to be

$$\theta_s = \tan^{-1} \mu_s$$

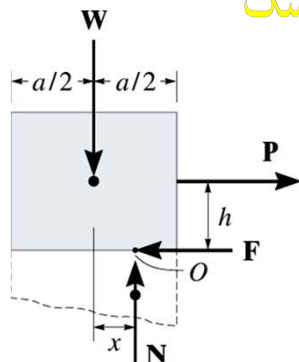
θ_s defines the maximum angle of the resultant reaction force with respect to the *normal* direction:



8 - 90

ویژگی‌های اصطکاک خشک

Theory of Dry Friction

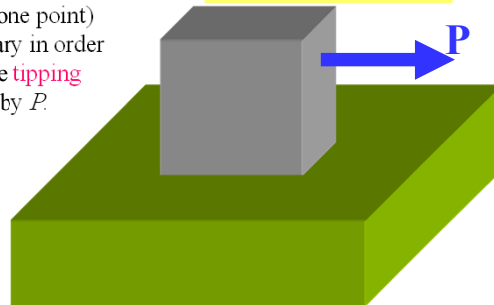


Resultant Normal and Frictional Forces

The location x of N coincides with the centroid of the loading diagram (3 forces should pass through one point) and is necessary in order to balance the **tipping effect** caused by P .

Equilibrium - Tipping

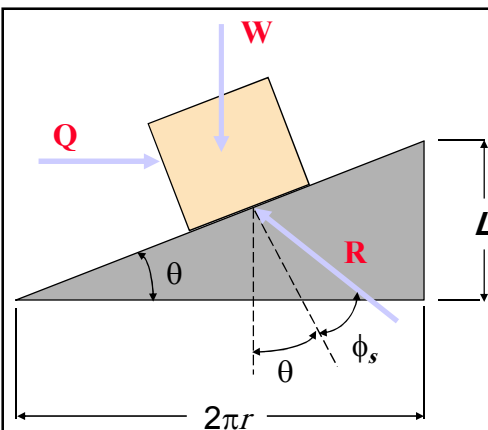
$$Wx = Ph$$



In particular, the block will be on the **verge of tipping** if N acts at the right corner of the block, $x = a/2$

Impending Motion: In cases where h is small or the surfaces of contact are rather slippery, the friction force F may not be great enough to balance P , and consequently the block will tend to **slip before it can tip**.

8 - 91



The analysis of **square-threaded screws** (frequently used in jacks, presses and other mechanisms) is reduced to the analysis of a block sliding on an incline by unwrapping the thread of the screw and showing it as a straight line.

In doing this, r denotes the **mean radius** of the thread, L is the **lead** of the screw (the distance through which the screw advances in one turn), W is the load, and or is the torque exerted on the screw.

