

2.10- قاعده کوشنت (تشخیص نوع تانسور یک کمیت اندیسی) (Quotient Rule)

© M.H. Abolbashari, Ferdowsi University of Mashhad

- اگر ζ^α یک **تانسور** دلخواه از رنک (رتبه) ۱ (یک بردار) باشد و
- اگر حاصل ضرب $A(\alpha, j, k) \zeta^\alpha$ (قرارداد جمع برای α استفاده می‌شود) یک **تانسور** از نوع B_k^j باشد:

$$A(\alpha, j, k) \overset{?}{\zeta^\alpha} = \overset{\text{Known}}{B_k^j}$$

آنگاه می‌توان ثابت کرد که $A(i, j, k)$ یک **تانسور** از نوع A_{ik}^j است.

یک مورد از کاربردهای این قانون در روابط بین بردار تنش و تانسور تنش در مختصات عمومی است که نوع تانسور تنش را می‌توان به دست آورد.

$$T^j = \underset{\tau_i^j}{\tau(i, j)} v^i, \quad T_j = \underset{\tau_{ij}}{\tau(i, j)} v^i,$$

اثبات:

از آنجا که $\zeta^\alpha(\alpha, j, k)$ تانسوری از نوع B_k^j است، انتقال آن به سیستم مختصات $\bar{\theta}$ به شکل زیر است:

$$\begin{aligned}\bar{A}(\alpha, j, k) \bar{\zeta}^\alpha &= \bar{B}_k^j = \frac{\partial \bar{\theta}^j}{\partial \theta^r} \frac{\partial \theta^s}{\partial \bar{\theta}^k} B_s^r \\ &= \frac{\partial \bar{\theta}^j}{\partial \theta^r} \frac{\partial \theta^s}{\partial \bar{\theta}^k} [A(\beta, r, s) \zeta^\beta] \\ &= \frac{\partial \bar{\theta}^j}{\partial \theta^r} \frac{\partial \theta^s}{\partial \bar{\theta}^k} \frac{\partial \theta^\beta}{\partial \theta^\alpha} \bar{\zeta}^\alpha A(\beta, r, s)\end{aligned}$$

اما $\bar{\zeta}^\alpha = \frac{\partial \theta^\beta}{\partial \bar{\theta}^\alpha} \zeta^\beta$ داریم:

$$\left[\bar{A}(\alpha, j, k) - \frac{\partial \bar{\theta}^j}{\partial \theta^r} \frac{\partial \theta^s}{\partial \bar{\theta}^k} \frac{\partial \theta^\beta}{\partial \bar{\theta}^\alpha} A(\beta, r, s) \right] \bar{\zeta}^\alpha = 0$$

اکنون $\bar{\zeta}^\alpha$ یک بردار اختیاری است. بنابراین، عبارت داخل کروشه باید صفر باشد.

$$\bar{A}(\alpha, j, k) = \frac{\partial \bar{\theta}^j}{\partial \theta^r} \frac{\partial \theta^s}{\partial \bar{\theta}^k} \frac{\partial \theta^\beta}{\partial \bar{\theta}^\alpha} A(\beta, r, s)$$

که دقیقاً قانون انتقال یک تانسور از نوع $A_{\beta s}^r$ یا A_{ik}^j است.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

3/34

سبک مثال قبل را می توان تعمیم داد و قضیه زیر را اثبات کرد.

اگر $A(\alpha, i_1, i_2, \dots, i_r)$ یک مجموعه از توابع بر حسب متغیرهای x^i باشند و اگر حاصل ضرب $\zeta^\alpha A(\alpha, i_1, i_2, \dots, i_r)$ که در آن ζ^α یک بردار اختیاری است، تانسوری از نوع $B_{k_1 \dots k_p}^{j_1 \dots j_q}$ باشد، که $p+q=r$ است، آنگاه مجموعه $A(\alpha, i_1, i_2, \dots, i_r)$ تانسوری از نوع $A_{\alpha k_1 \dots k_p}^{j_1 \dots j_q}$ است.

$$A(\alpha, i_1, i_2, \dots, i_r) \zeta^\alpha = B_{k_1 \dots k_p}^{j_1 \dots j_q}$$

$A_{\alpha k_1 \dots k_p}^{j_1 \dots j_q}$

به طور مشابه، اگر حاصل ضرب یک مجموعه از توابع n^2 از $A(\alpha, j)$ در تانسور اختیاری $E_{\alpha k}$ (و جمع روی α) تانسور کوارینت از رنک دو باشد، آنگاه $A(i, j)$ تانسوری از نوع A_j^i است.

$$A(\alpha, j) E_{\alpha k} = B_{jk}$$

A_j^i

این ها و قضایای مشابهی که می تواند به دست آید را قواعد کوشنت می نامند.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

4/34

به طور مشابه، اگر $A(\alpha, i_1, i_2, \dots, i_r) \zeta_\alpha = B_{k_1 \dots k_p}^{j_1 \dots j_q}$ باشد، آنگاه A تانسوری از نوع $A_{k_1 \dots k_p}^{\alpha j_1 \dots j_q}$ خواهد بود.

$$A(\alpha, i_1, i_2, \dots, i_r) \overset{?}{\zeta_\alpha} = \overset{\text{Known}}{B_{k_1 \dots k_p}^{j_1 \dots j_q}}$$

$$A_{k_1 \dots k_p}^{\alpha j_1 \dots j_q}$$

مثال: می‌دانیم $A(\alpha, i, j, k) \zeta_\alpha = B_{jk}^i$ ، نوع A را مشخص کنید.

صرفنظر از روش فوق یک راه میان‌بر نیز وجود دارد:

$$A(\alpha, i, j, k) = \frac{B_{jk}^i}{\zeta_\alpha} \Leftrightarrow B_{jk}^i \bar{\zeta}_\alpha \Leftrightarrow A_{jk}^{\alpha i}$$

دقت شود که:

۱- علامت مساوی در اینجا معنی تساوی

نمی‌دهد؛ زیرا جمع اندیسی روی اندیس

دامی α را نمی‌رساند.

P67-69 Sokolnikoff

۲- همچنین اگر در نتیجه ما قبل آخر اندیس

مشترک وجود داشت حذف می‌شود.

$$B_{jk} \bar{E}^{\alpha k} = A_j^\alpha$$

مثلاً:

5/34

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

بیان متفاوت قاعده کوشنت در کارتیزین

اگر حاصل ضرب کمیتی در یک بردار اختیاری، تانسوری از مرتبه (رنک) n باشد، آن کمیت از مرتبه $n+1$ خواهد بود.

مثال: می‌دانیم $A(i, j, k) \zeta_i = B_{jk}^{\alpha}$ ، نوع A را مشخص کنید.

$$\bar{A}(i, j, k) \bar{\zeta}_i = \bar{B}_{jk} = \beta_{jr} \beta_{ks} B_{rs} = \beta_{jr} \beta_{ks} [A(m, r, s) \zeta_m]$$

$$\bar{A}(i, j, k) \bar{\zeta}_i = \beta_{jr} \beta_{ks} \beta_{im} A(m, r, s) \bar{\zeta}_i$$

$$[\bar{A}(i, j, k) - \beta_{jr} \beta_{ks} \beta_{im} A(m, r, s)] \bar{\zeta}_i = 0$$

و چون $\bar{\zeta}_i$ یک بردار اختیاری است، داخل کروشه باید صفر باشد. یعنی:

$$\bar{A}(i, j, k) = \beta_{im} \beta_{jr} \beta_{ks} A(m, r, s)$$

و این قانون انتقال تانسور A_{ijk} است که از مرتبه ۳ می‌باشد.

6/34

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

2.11- مشتقات جزئی در مختصات کارتزین (Partial Derivatives in Cartesian Coordinates)

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

تولید تانسور رنک یک از یک تانسور رنک صفر با دیفرانسیل گیری، مانند **گرادیان** یک پتانسیل اسکالر، یک راه برای تولید تانسورهای از رنک بالاتر است.

$$\text{grad } \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x_i}$$

↓
Scalar ↓
Vector

اما در حالت کلی، مجموعه مشتقات جزئی یک تانسور مانند یک تانسور عمل نمی کنند (تانسور نیستند).

با این همه، اگر مختصات کارتزین باشد، آنگاه مشتقات جزئی از هر میدان تانسوری مانند مؤلفه های یک میدان تانسوری از یک مختصات کارتزین به مختصات کارتزین دیگر انتقال می یابند و تانسورند.

برای نشان دادن این موضوع، دو سیستم مختصات کارتزین (x_1, x_2, x_3) و $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ را در نظر بگیرید که به شکل زیر به هم مربوط می شوند.

$$\begin{aligned} (1) \quad & \bar{x}_i = \beta_{ij} x_j + b_i \\ & \text{که } b_i \text{ و } \beta_{ij} \text{ اعداد ثابتی هستند. از معادله (1) داریم:} \\ (2) \quad & \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_j} = \beta_{ij} \end{aligned}$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

8/34

$$\frac{\partial^2 \bar{x}_i}{\partial x_j \partial x_k} = 0 \quad (3)$$

اکنون اگر $\zeta^i(x_1, x_2, x_3)$ یک تانسور کنتراورینت باشد، یعنی:

$$\bar{\zeta}^i(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = \zeta^\alpha(x_1, x_2, x_3) \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_\alpha} \quad (4)$$

آنگاه، با دیفرانسیل گیری از دو طرف معادله داریم:

$$\frac{\partial \bar{\zeta}^i}{\partial \bar{x}^j} = \left(\frac{\partial \zeta^\alpha}{\partial x_\beta} \frac{\partial x_\beta}{\partial \bar{x}^j} \right) \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_\alpha} + \zeta^\alpha \left(\frac{\partial^2 \bar{x}_i}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \right) \frac{\partial x_\beta}{\partial \bar{x}^j} \quad (5)$$

اگر x_i و $\bar{x}_i$ مختصات کارتزین باشند، جمله آخر بر اساس معادله (3) صفر می شود. بنابراین:

$$\frac{\partial \bar{\zeta}^i}{\partial \bar{x}^j} = \frac{\partial \zeta^\alpha}{\partial x_\beta} \frac{\partial x_\beta}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_\alpha} \quad (6)$$

بنابراین، مجموعه مشتقات جزئی $\partial \zeta^\alpha / \partial x_\beta$ در انتقال از یک مختصات کارتزین به یک مختصات کارتزین دیگر از قانون انتقال یک **تانسور مخلوط از رنک دو** تبعیت می کند.

با این همه، وجود جملات مشتق دوم در معادله (5) که در مختصات منحنی الخط صفر نیستند نشان می دهد که $\partial \zeta^\alpha / \partial x_\beta$ در مختصات عمومی مؤلفه های میدان تانسوری نیستند. بدیهی است که این نتیجه برای میدان های تانسوری از رنک های بالاتر نیز صادق است.

تابعی از x است و برای مشتق آن نسبت به $\bar{x}_j$ باید از قانون زنجیره ای استفاده شود.

9/34

نماد جایگزین برای نشان دادن مشتق جزئی در کارتزین

هنگامی که مختصات کارتزین باشد، برای نشان دادن مشتق جزئی از کاما (,) استفاده می شود. بنابراین:

10/34

اگر خود را محدود به **مختصات کارتزین** نماییم، $\phi_i, \zeta_{i,j}, \sigma_{ij,k}$ به ترتیب تانسورهایی از رنک یک، دو و سه اند به شرطی که $\phi, \zeta_i, \sigma_{ij}$ تانسور باشند.

توجه: معادلات تانسوری کارتزین که با استفاده از دیفرانسیل گیری به دست آمده باشند، در حالت کلی در مختصات منحنی الخط معتبر نیستند. این نکته مهم بعداً نیز بحث خواهد شد.

2.12- مشتق کوارینت میدان‌های برداری (Covariant Differentiation of Vector Fields)

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

تعمیم مشتقات جزئی به مفهوم مشتق کوارینت، آنچنان که مشتق کوارینت یک میدان تانسوری، خود یک میدان تانسوری باشد، نقطه عطف مهمی در وجود آمدن حساب تانسورهاست.

طبیعی است که چنین ترکیب اضافه‌ای را به شکل یک تابع تصحیحی بیابیم که به خود بردار وابسته باشد. بنابراین اگر ζ^i یک بردار باشد، انتظار داریم که ترکیب زیر یک تانسور باشد.

$$\frac{\partial \zeta^i}{\partial x^j} + \overset{\text{gamma}}{\Gamma(i, j, \alpha)} \zeta^\alpha$$

در اینجا x یک مختصات عمومی است. تصحیح پیشنهادی در اینجا یک تابع خطی از ζ^i است، و $\Gamma(i, j, \alpha)$ توابعی سه اندیسی‌اند.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

12/34

کریستوفل سیمبل‌های اقلیدسی $\Gamma_{\alpha\beta}^i(x^1, x^2, x^3)$ به شکل زیر تعریف می‌شوند.

کتاب را تصحیح کنید. $\Gamma_{\alpha\beta}^i(x^1, x^2, x^3) = \frac{1}{2} g^{i\sigma} \left(\frac{\partial g_{\sigma\beta}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial g_{\alpha\sigma}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\sigma} \right)$ (1)

کمیت $\Gamma_{\alpha\beta}^i$ یک تانسور نیست. تحت یک انتقال مختصات $\bar{x}^i = f^i(x^1, x^2, x^3)$ به شکل زیر انتقال می‌یابد. (مسئله 2.24 صفحه 63 را ببینید)

(2) $\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^i(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3) = \Gamma_{\mu\gamma}^\lambda(x^1, x^2, x^3) \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\alpha} \frac{\partial x^\gamma}{\partial \bar{x}^\beta} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial \bar{x}^\alpha \partial \bar{x}^\beta} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^\lambda}$

با ضرب طرفین معادله در $\partial x^m / \partial \bar{x}^i$ و جمع بستن روی i می‌توان $\partial^2 x^\lambda / \partial \bar{x}^\alpha \partial \bar{x}^\beta$ را محاسبه کرد.

$$\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^i} \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^i = \Gamma_{\mu\gamma}^\lambda \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\alpha} \frac{\partial x^\gamma}{\partial \bar{x}^\beta} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^i} + \frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial \bar{x}^\alpha \partial \bar{x}^\beta} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^i}$$

$$\delta_\lambda^m \frac{\partial x^\lambda}{\partial \bar{x}^i} \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^i = \Gamma_{\mu\gamma}^\lambda \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\alpha} \frac{\partial x^\gamma}{\partial \bar{x}^\beta} \delta_\lambda^m + \frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial \bar{x}^\alpha \partial \bar{x}^\beta} \delta_\lambda^m$$

با حذف δ_λ^m از طرفین داریم:

(3) $\frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial \bar{x}^\alpha \partial \bar{x}^\beta} = \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^i(\bar{x}) \frac{\partial x^\lambda}{\partial \bar{x}^i} - \Gamma_{\mu\gamma}^\lambda(x) \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\alpha} \frac{\partial x^\gamma}{\partial \bar{x}^\beta}$

با عوض کردن جای x و $\bar{x}$ داریم:

این مقدار را در رابطه مشتق جزئی (2.11-5) قرار می‌دهیم، ولی بهتر است ابتدا چند اندیس را تغییر نام دهیم:

$$\frac{\partial^2 \bar{x}^\lambda}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} = \frac{\partial \bar{x}^\lambda}{\partial x^i} \Gamma_{\alpha\beta}^i - \bar{\Gamma}_{\mu\gamma}^\lambda \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \bar{x}^\gamma}{\partial x^\beta}$$

$$\frac{\partial \bar{\zeta}^i}{\partial \bar{x}^j} = \left(\frac{\partial \zeta^\alpha}{\partial x_\beta} \frac{\partial x_\beta}{\partial \bar{x}_j} \right) \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_\alpha} + \zeta^\alpha \frac{\partial^2 \bar{x}_i}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \frac{\partial x_\beta}{\partial \bar{x}_j}$$

↓ β to μ

$$+ \zeta^\alpha \frac{\partial^2 \bar{x}_i}{\partial x_\alpha \partial x_\mu} \frac{\partial x_\mu}{\partial \bar{x}_j}$$

↓ α to λ ↓ α to λ

$$= \left(\frac{\partial \zeta^\lambda}{\partial x_\beta} \frac{\partial x_\beta}{\partial \bar{x}_j} \right) \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_\lambda} + \zeta^\lambda \frac{\partial^2 \bar{x}_i}{\partial x_\lambda \partial x_\mu} \frac{\partial x_\mu}{\partial \bar{x}_j}$$

↓ j to α ↓ j to α ↓ j to α

$$\frac{\partial \bar{\zeta}^i}{\partial \bar{x}^\alpha} = \left(\frac{\partial \zeta^\lambda}{\partial x_\beta} \frac{\partial x_\beta}{\partial \bar{x}^\alpha} \right) \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_\lambda} + \zeta^\lambda \frac{\partial^2 \bar{x}_i}{\partial x_\lambda \partial x_\mu} \frac{\partial x_\mu}{\partial \bar{x}^\alpha}$$

اکنون مقدار $\frac{\partial^2 \bar{x}^\lambda}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}$ را در

$$\frac{\partial \bar{\zeta}^i}{\partial \bar{x}^\alpha} = \left(\frac{\partial \zeta^\lambda}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^\alpha} \right) \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x^\lambda} + \zeta^\lambda \frac{\partial^2 \bar{x}_i}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\alpha}$$

جایگزین می‌کنیم:

$$\frac{\partial \bar{\zeta}^i}{\partial \bar{x}^\alpha} = \left(\frac{\partial \zeta^\lambda}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^\alpha} \right) \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x^\lambda} + \zeta^\lambda \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\alpha} \left[\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^s} \Gamma_{\lambda\mu}^s - \bar{\Gamma}_{mn}^i \frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^\lambda} \frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^\mu} \right]$$

↓

$$\frac{\partial \bar{\zeta}^i}{\partial \bar{x}^\alpha} = \frac{\partial \zeta^\lambda}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^\alpha} \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x^\lambda} + \zeta^\lambda \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\alpha} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^s} \Gamma_{\lambda\mu}^s - \zeta^\lambda \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\alpha} \bar{\Gamma}_{mn}^i \frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^\lambda} \frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^\mu}$$

↓

$$\frac{\partial \bar{\zeta}^i}{\partial \bar{x}^\alpha} + \bar{\Gamma}_{m\alpha}^i \zeta^m = \frac{\partial \zeta^\lambda}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\alpha} \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x^\lambda} + \zeta^s \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\alpha} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^\lambda} \Gamma_{s\mu}^\lambda = \left(\frac{\partial \zeta^\lambda}{\partial x^\mu} + \Gamma_{s\mu}^\lambda \zeta^s \right) \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\alpha} \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x^\lambda}$$

بنابراین داریم:

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

15/34

(4) $\frac{\partial \bar{\zeta}^i}{\partial \bar{x}^\alpha} + \bar{\Gamma}_{m\alpha}^i \zeta^m = \left(\frac{\partial \zeta^\lambda}{\partial x^\mu} + \Gamma_{s\mu}^\lambda \zeta^s \right) \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\alpha} \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x^\lambda}$

بنابراین $\frac{\partial \zeta^\lambda}{\partial x^\mu} + \Gamma_{s\mu}^\lambda \zeta^s$ تانسور مخلوط از مرتبه ۲ است و آن را به عنوان مشتق کوارینت یک بردار کنتراورینت تعریف می‌کنیم.

(نکته: در یک معادله اندیسی لازم نیست همه کمیت‌ها تانسور باشند. در رابطه فوق کریستوفل سیمبل‌ها تانسور نیستند ولی معادله اندیسی صحیح است.)

(5) $\zeta^i|_\alpha \equiv \frac{\partial \zeta^i(x^1, x^2, x^3)}{\partial x^\alpha} + \Gamma_{\sigma\alpha}^i(x^1, x^2, x^3) \zeta^\sigma(x^1, x^2, x^3)$

محل اندیسی α همیشه به همین شکل است.

ζ^i

مشتق کوارینت یک بردار کنتراورینت

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

16/34

با روش مشابهی می‌توان نشان داد که هر گاه ζ_i مؤلفه‌های یک میدان بردار کوارینت باشند. توابع

$$(6) \quad \zeta_i|_\alpha \equiv \frac{\partial \zeta_i}{\partial x^\alpha} - \Gamma_{i\alpha}^\sigma \zeta_\sigma$$

مؤلفه‌های یک میدان تانسوری کوارینت از رنک دو است. این را مشتق کوارینت ζ_i می‌گویند و با $\zeta_i|_\alpha$ نشان می‌دهند.

برای حالت کلی‌تر، محاسبات طولانی ولی سراسر شبیه به بالا می‌تواند انجام شود و مشتق کوارینت تانسور $T_{\beta_1 \dots \beta_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_p}$ (از رنک $p+q$ ، کنتراورینت از رنک p و کوارینت از رنک q) را به دست آورد:

$$T_{\beta_1 \dots \beta_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_p} \Big|_\gamma = \frac{\partial T_{\beta_1 \dots \beta_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_p}}{\partial x^\gamma} + \Gamma_{\sigma\gamma}^{\alpha_1} T_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_q}^{\sigma \alpha_2 \dots \alpha_p} + \dots + \Gamma_{\sigma\gamma}^{\alpha_p} T_{\beta_1 \dots \beta_{q-1} \beta_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_{p-1} \sigma} - \Gamma_{\beta_1\gamma}^\sigma T_{\sigma \beta_2 \dots \beta_q}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p} - \dots - \Gamma_{\beta_q\gamma}^\sigma T_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_{q-1} \sigma}^{\alpha_1 \dots \alpha_{p-1} \alpha_p}$$

کتاب را تصحیح نمایید. محل γ تغییر نمی‌کند.

که کنتراورینت از رنک p و کوارینت از رنک $q+1$ است. مشتق کوارینت یک اندیس کوارینت به تانسور اضافه می‌کند.

17/34

از آنجا که مؤلفه‌های تانسور g_{ij} در مختصات کارتزین (یعنی δ_{ij}) ثابت هستند، از تعریف کریستوفل سیمبل

$$(1) \quad \Gamma_{\alpha\beta}^i(x^1, x^2, x^3) = \frac{1}{2} g^{i\sigma} \left(\frac{\partial g_{\sigma\beta}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial g_{\alpha\sigma}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\sigma} \right)$$

می‌توان دید که کریستوفل سیمبل در مختصات کارتزین متعامد صفر است. ($\Gamma = 0$ in Rcc)

بنابراین در مختصات کارتزین مشتق کوارینت یک میدان تانسوری با مشتق جزئی آن یکی است.

$$T_{\beta_1 \dots \beta_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_p} \Big|_\gamma = \frac{\partial T_{\beta_1 \dots \beta_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_p}}{\partial x^\gamma}, \text{ in Rcc}$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

18/34

2.13- معادلات تانسوری (Tensor Equations)

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

دو قضیه مهم

آنگاه	اگر
آن مؤلفه‌ها به طور متناظر در همه سیستم‌های مختصات دیگر صفرند.	تمامی مؤلفه‌های یک میدان تانسوری در یک سیستم مختصات صفر باشند،
در تمامی سیستم‌های مختصات دیگر نیز صادق است.	یک معادله تانسوری در یک سیستم مختصات صادق باشد،

بار دیگر یادآور می‌شود:

- مشتقات جزئی تنها در مختصات کارتزین تانسورند. در مختصات منحنی‌الخط تانسور نیستند. در سیستم مختصات منحنی‌الخط برای تولید تانسور جدید باید از مشتق کوارینت استفاده شود.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

20/34

مثال‌هایی از کاربرد معادلات تانسوری

مثال ۱- ثابت کنید مشتق دوم کوارینت یک تانسور جابجایی پذیر (Commutativeness) است.

$$T_{kl}^{ij} \Big|_{\gamma\delta} = T_{kl}^{ij} \Big|_{\delta\gamma}$$

از آنجا که مشتق کوارینت یک تانسور خود نیز یک تانسور است، بنابراین می‌توانیم مشتق کوارینت آن را نیز به دست آوریم که مشتق دوم کوارینت تانسور اولیه نامیده می‌شود. مشتق دوم کوارینت را در اسلایدهای بعدی به دست می‌آوریم.

اگر T_{kl}^{ij} تانسور اولیه باشد، مشتق کوارینت دوم آن عبارت است از $T_{kl}^{ij} \Big|_{\gamma\delta}$. اکنون اگر فضا اقلیدسی باشد، آن را می‌توان در سیستم مختصات کارتزین نشان داد و می‌دانیم:

۱. در مختصات کارتزین، همه کریستوفل سیمبل‌های اقلیدسی صفرند و مشتق کوارینت یک تانسور تبدیل به مشتق جزئی تانسور می‌شود.

۲. اما مشتقات جزئی اگر پیوسته باشند، جابجایی پذیرند.

۳. بنابراین، معادله زیر به شرطی که تمامی مؤلفه‌ها پیوسته باشند، در مختصات کارتزین صادق است:

$$(1) \quad T_{kl}^{ij} \Big|_{\gamma\delta} = T_{kl}^{ij} \Big|_{\delta\gamma}$$

21/34

۴. بنابراین، معادله در تمامی سیستم‌های مختصات دیگر هم صادق است.

باید یادآور شویم که جابجایی پذیر بودن مشتق دوم کوارینت که بیان شد فقط در فضای اقلیدسی صحیح است. در فضای عمومی‌تر ریمنی (Riemannian) یک مختصات ممکن است به کارتزین تبدیل نشود و روش اثبات پیش‌گفته شده نمی‌تواند به کار رود. در حقیقت، قضیه مطرح شده در معادله (1) در حالت کلی در فضای ریمنی صحیح نیست:

مشتقات کوارینت متوالی در حالت کلی در فضای ریمنی جابجایی پذیر نیستند.

(مسئله 2.31 را ببینید)

بیانی مشابه مسئله 2.31 در اینجا مطرح می‌شود.

مشتق کوارینت مرتبه دو و شرط جابجایی پذیر بودن مشتق دوم کوارینت

مشتق کوارینت مرتبه دو را می‌توان به سادگی از تعریف مشتق کوارینت مرتبه یک به دست آورد، زیرا مشتق کوارینت مرتبه یک، خود نیز تانسور است.

$$A_i|_j = \frac{\partial A_i}{\partial x^j} - \Gamma_{ij}^\alpha A_\alpha$$

داریم:

$$A_i|_{jk} = \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\partial A_i}{\partial x^j} - \Gamma_{ij}^\alpha A_\alpha \right) - \Gamma_{ik}^\alpha \left(\frac{\partial A_i}{\partial x^j} - \Gamma_{ij}^\alpha A_\alpha \right) - \Gamma_{jk}^\alpha \left(\frac{\partial A_i}{\partial x^k} - \Gamma_{ik}^\alpha A_\alpha \right)$$

زیرا $\Gamma_{nm}^r = \Gamma_{mn}^r$ و این در تمرین 2.26 اثبات می‌شود.

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\partial A_i}{\partial x^j} - \Gamma_{ij}^\alpha A_\alpha \right) - \Gamma_{ik}^\alpha \left(\frac{\partial A_i}{\partial x^j} - \Gamma_{ij}^\alpha A_\alpha \right) - \Gamma_{jk}^\alpha \left(\frac{\partial A_i}{\partial x^k} - \Gamma_{ik}^\alpha A_\alpha \right) \\ &= \frac{\partial^2 A_i}{\partial x^k \partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_{ij}^\alpha}{\partial x^k} A_\alpha - \Gamma_{ij}^\alpha \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^k} - \Gamma_{ik}^\alpha \frac{\partial A_i}{\partial x^j} + \Gamma_{ik}^\alpha \Gamma_{ij}^\beta A_\beta - \Gamma_{jk}^\alpha \frac{\partial A_i}{\partial x^k} + \Gamma_{jk}^\alpha \Gamma_{ik}^\beta A_\beta + \Gamma_{ik}^\alpha \Gamma_{jk}^\beta A_\beta \end{aligned} \quad (1)$$

به همین ترتیب $A_i|_{kj}$ را می‌توان با تعویض جای اندیس‌های j و k در رابطه فوق به دست آورد.

$$A_i|_{kj} = \frac{\partial^2 A_i}{\partial x^j \partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^\alpha}{\partial x^j} A_\alpha - \Gamma_{ik}^\alpha \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^j} - \Gamma_{ij}^\alpha \frac{\partial A_i}{\partial x^k} + \Gamma_{ij}^\alpha \Gamma_{ik}^\beta A_\beta - \Gamma_{kj}^\alpha \frac{\partial A_i}{\partial x^k} + \Gamma_{kj}^\alpha \Gamma_{ik}^\beta A_\beta + \Gamma_{ik}^\alpha \Gamma_{kj}^\beta A_\beta \quad (2)$$

با کم کردن (2) از (1) داریم:

$$A_i|_{jk} - A_i|_{kj} = -\frac{\partial \Gamma_{ij}^\alpha}{\partial x^k} A_\alpha + \Gamma_{ik}^\alpha \Gamma_{ij}^\beta A_\beta + \frac{\partial \Gamma_{ik}^\alpha}{\partial x^j} A_\alpha - \Gamma_{ij}^\alpha \Gamma_{ik}^\beta A_\beta$$

23/34

$$A_i|_{jk} - A_i|_{kj} = -\frac{\partial \Gamma_{ij}^\alpha}{\partial x^k} A_\alpha + \Gamma_{ik}^\alpha \Gamma_{ij}^\beta A_\beta + \frac{\partial \Gamma_{ik}^\alpha}{\partial x^j} A_\alpha - \Gamma_{ij}^\alpha \Gamma_{ik}^\beta A_\beta$$

با تعویض اندیس‌های دامی α و β در جملات دوم و چهارم داریم:

$$A_i|_{jk} - A_i|_{kj} = -\frac{\partial \Gamma_{ij}^\alpha}{\partial x^k} A_\alpha + \Gamma_{ik}^\beta \Gamma_{ij}^\alpha A_\alpha + \frac{\partial \Gamma_{ik}^\alpha}{\partial x^j} A_\alpha - \Gamma_{ij}^\beta \Gamma_{ik}^\alpha A_\alpha = \left[-\frac{\partial \Gamma_{ij}^\alpha}{\partial x^k} + \Gamma_{ik}^\beta \Gamma_{ij}^\alpha + \frac{\partial \Gamma_{ik}^\alpha}{\partial x^j} - \Gamma_{ij}^\beta \Gamma_{ik}^\alpha \right] A_\alpha \quad (*)$$

از آنجا که A_i یک تانسور کوارینت از مرتبه ۱ است و تفاضل دو تانسور $A_i|_{jk} - A_i|_{kj}$ یک تانسور کوارینت از مرتبه ۳ است (چون هر مشتق کوارینت یک مرتبه کوارینت به تانسور اضافه می‌کند)،

بنابراین: از قانون کوشنت می‌توان نتیجه گرفت که جمله داخل کروشه تانسوری از مرتبه ۴ است که یک مرتبه کنتراورینت و ۳ مرتبه کوارینت است. این نتیجه را از رابطه میانبر استفاده می‌کنیم:

$$\left[-\frac{\partial \Gamma_{ij}^\alpha}{\partial x^k} + \Gamma_{ik}^\beta \Gamma_{ij}^\alpha + \frac{\partial \Gamma_{ik}^\alpha}{\partial x^j} - \Gamma_{ij}^\beta \Gamma_{ik}^\alpha \right] A_\alpha = \frac{A_i|_{jk} - A_i|_{kj}}{A_\alpha} = (A_i|_{jk} - A_i|_{kj}) \bar{A}^\alpha = R_{ijk}^\alpha$$

تانسور R_{ijk}^α را تانسور کریستوفل ریمنی مخلوط می‌گویند و می‌توان آن را به شکل دترمینان زیر نوشت:

$$R_{ijk}^\alpha = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x^j} & \frac{\partial}{\partial x^k} \\ \Gamma_{ij}^\alpha & \Gamma_{ik}^\alpha \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \Gamma_{\beta j}^\alpha & \Gamma_{\beta k}^\alpha \\ \Gamma_{ij}^\beta & \Gamma_{ik}^\beta \end{vmatrix}$$

از رابطه (*) می‌توان نتیجه گرفت که شرط لازم و کافی برای جابجایی پذیر بودن مشتق دوم کوارینت این است که R_{ijk}^α صفر باشد (در فضای اقلیدسی این امکان وجود دارد). در حالت کلی (مثلاً اگر فضا ریمنی باشد) $R_{ijk}^\alpha \neq 0$ و ترتیب مشتق دوم کوارینت مهم است.

24/34

تعریف دیگر فضای اقلیدسی

قضیه II (P 96 Sokonikoff):

شرط لازم و کافی برای اینکه تانسور متقارن g_{ij} با $|g_{ij}| \neq 0$ به $\bar{g}_{ij}$ انتقال یابد که $\bar{g}_{ij}$ ها اعداد ثابتی اند، این است که **تانسور کریستوفل ریمنی** از g_{ij} ها (R_{ijk}^a) تانسور صفر باشد.

R_n (فضای n-بعدی) **اقلیدسی** است اگر و تنها اگر تانسور ریمنی مانیفولد (manifold) یک تانسور صفر باشد.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

25/34

مثال: مشتق کوارینت مرتبه دو یک تانسور مرتبه ۲

با توجه به مشتق کوارینت یک میدان تانسوری مرتبه دو: $A_{ij|k} = \frac{\partial A_{ij}}{\partial x^k} - \Gamma_{ik}^\alpha A_{\alpha j} - \Gamma_{jk}^\alpha A_{i\alpha}$ ، $A_{ij|kl}$ را به دست آورید.

(کاربرد: در معادلات سازگاری در مختصات عمومی)

$$\begin{aligned} A_{ij|kl} &= \frac{\partial}{\partial x^l} \left(\frac{\partial A_{ij}}{\partial x^k} - \Gamma_{ik}^\alpha A_{\alpha j} - \Gamma_{jk}^\alpha A_{i\alpha} \right) - \Gamma_{il}^\alpha \left(\frac{\partial A_{\alpha j}}{\partial x^k} - \Gamma_{\alpha k}^\beta A_{\beta j} - \Gamma_{jk}^\beta A_{\alpha\beta} \right) \\ &\quad - \Gamma_{jl}^\alpha \left(\frac{\partial A_{i\alpha}}{\partial x^k} - \Gamma_{ik}^\beta A_{\beta\alpha} - \Gamma_{\alpha k}^\beta A_{i\beta} \right) - \Gamma_{kl}^\alpha \left(\frac{\partial A_{ij}}{\partial x^\alpha} - \Gamma_{i\alpha}^\beta A_{\beta j} - \Gamma_{j\alpha}^\beta A_{i\beta} \right) \\ &= \frac{\partial^2 A_{ij}}{\partial x^l \partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^\alpha}{\partial x^l} A_{\alpha j} - \frac{\partial A_{\alpha j}}{\partial x^l} \Gamma_{ik}^\alpha - \frac{\partial \Gamma_{jk}^\alpha}{\partial x^l} A_{i\alpha} - \frac{\partial A_{i\alpha}}{\partial x^l} \Gamma_{jk}^\alpha - \Gamma_{il}^\alpha \frac{\partial A_{\alpha j}}{\partial x^k} + \Gamma_{il}^\alpha \Gamma_{\alpha k}^\beta A_{\beta j} + \Gamma_{il}^\alpha \Gamma_{jk}^\beta A_{\alpha\beta} \\ &\quad - \Gamma_{jl}^\alpha \frac{\partial A_{i\alpha}}{\partial x^k} + \Gamma_{jl}^\alpha \Gamma_{ik}^\beta A_{\beta\alpha} + \Gamma_{jl}^\alpha \Gamma_{\alpha k}^\beta A_{i\beta} - \Gamma_{kl}^\alpha \frac{\partial A_{ij}}{\partial x^\alpha} + \Gamma_{kl}^\alpha \Gamma_{i\alpha}^\beta A_{\beta j} + \Gamma_{kl}^\alpha \Gamma_{j\alpha}^\beta A_{i\beta} \end{aligned}$$

به طور مشابه می توان $A_{ij|kl}$ و $A_{j|kl}^i$ را نیز به دست آورد. داریم:

$$A_{ij|kl} = \frac{\partial A_{ij}}{\partial x^k} + \Gamma_{ak}^i A_{\alpha j} + \Gamma_{ak}^j A_{i\alpha} - \Gamma_{kl}^\alpha A_{ij|_\alpha}$$

$$A_{j|kl}^i = \frac{\partial A_j^i}{\partial x^k} + \Gamma_{ak}^i A_j^\alpha + \Gamma_{ak}^j A_{\alpha}^i - \Gamma_{kl}^\alpha A_{j|_\alpha}^i$$

به علامت منفی جملات آخر دقت کنید که به خاطر کوارینت بودن اندیس مشتق کوارینت است که باید روی اندیس بالای کریستوفل جمع بسته شود.

26/34

مثال 2- به عنوان کاربرد دیگر معادلات تانسوری می‌توان قضیه زیر را اثبات کرد:

مشتقات کوارینت تانسورهای متریک اقلیدسی g_{ij} و تانسورهای کنتراورینت اسوشیتد g^{ij} صفرند.

$$(2) \quad g_{ij}|_k = 0, \quad g^{ij}|_k = 0$$

اثبات:

از آنجا که $g_{ij}|_k$ و $g^{ij}|_k$ تانسورند، اگر بتوانیم صحت معادله (2) را در یک سیستم مختصات خاص بررسی و اثبات کنیم، قضیه اثبات می‌شود.

۱. می‌دانیم در **مختصات کارتزین** مشتقات کوارینت تبدیل به مشتقات جزئی می‌شود.

۲. از طرفی در **کارتزین** g_{ij} ها و g^{ij} ها اعداد ثابت‌اند (کرانکر دلتايند) و مشتق آن‌ها صفر می‌شود و معادله (2) در **کارتزین** صادق است.

اما بر خلاف **Eq. (1)** می‌توان ثابت کرد که معادلات (2) در **فضای ریمنی** هم صادق است.

27/34

لاپلاسن در مختصات عمومی ξ_1, ξ_2, ξ_3

در جدول داشتیم:

$$v^j|_{ki} g^{ik} \text{ or } v_j|_{ki} g_{ik}$$

اگر در $v^j|_{ki} g^{ik}$ مشتق کوارینت را جایگزین کنیم داریم:

$$\nabla^2 U = u^i|_{kj} g^{jk} = \left(\frac{\partial u^i}{\partial \xi^j} + \Gamma_{\sigma j}^i u^\sigma|_k - \Gamma_{kj}^\sigma u^i|_\sigma \right) g^{jk}$$

$$\nabla^2 u^i = \left[\frac{\partial}{\partial \xi^j} \left(\frac{\partial u^i}{\partial \xi^k} + \Gamma_{\sigma k}^i u^\sigma \right) + \Gamma_{\sigma j}^i \left(\frac{\partial u^\sigma}{\partial \xi^k} + \Gamma_{\beta k}^\sigma u^\beta \right) - \Gamma_{kj}^\sigma \left(\frac{\partial u^i}{\partial \xi^\sigma} + \Gamma_{\beta \sigma}^i u^\beta \right) \right] g^{jk}$$

برای به دست آوردن رابطه لاپلاسن باید رابطه برای یک بردار u^i باشد. با در نظر گرفتن جملاتی که در دو طرف u^i دارد، لاپلاسن عبارت است از:

$$\nabla^2 = g^{kj} \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^k \partial \xi^j} - \Gamma_{kj}^l \frac{\partial}{\partial \xi^l} \right)$$

28/39

لاپلاسیان در مختصات استوانه‌ای (مسئله ۲.۳۴ و ۲۳) (Cylindrical Polar Coordinates)

$$\zeta^1 = r, \quad \zeta^2 = \theta, \quad \zeta^3 = z$$

Associated Metric Tensor:

$$g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Gamma_{22}^1 = -r, \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{r}, \text{ and other } \Gamma_{jk}^i = 0$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 &= g^{kj} \left(\frac{\partial^2}{\partial \zeta^k \partial \zeta^j} - \Gamma_{kj}^l \frac{\partial}{\partial \zeta^l} \right) \\ &= g^{11} \left(\frac{\partial^2}{\partial \zeta^1 \partial \zeta^1} - \cancel{\Gamma_{11}^l} \frac{\partial}{\partial \zeta^l} \right) + g^{22} \left(\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2 \partial \zeta^2} - \Gamma_{22}^l \frac{\partial}{\partial \zeta^l} \right) + g^{33} \left(\frac{\partial^2}{\partial \zeta^3 \partial \zeta^3} - \cancel{\Gamma_{33}^l} \frac{\partial}{\partial \zeta^l} \right) \\ &= \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \Gamma_{22}^1 \frac{\partial}{\partial \zeta^1} \right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - (-r) \frac{\partial}{\partial r} \right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{aligned}$$

29/39

لاپلاسیان در مختصات کروی (مسئله ۲.۳۴ و ۲۳) (Spherical Coordinates)

$$\zeta^1 = r, \quad \zeta^2 = \phi, \quad \zeta^3 = \theta$$

Associated Metric Tensor: $g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2 \phi} \end{pmatrix}$

The Euclidean Christoffel symbols:

$$\Gamma_{22}^1 = -r, \Gamma_{33}^1 = -r \sin^2 \phi, \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r}, \Gamma_{33}^2 = -\sin \phi \cos \phi$$

$$\Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 = \cot \phi, \quad \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r}, \quad \text{all other } \Gamma_{jk}^i = 0$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 &= g^{kj} \left(\frac{\partial^2}{\partial \zeta^k \partial \zeta^j} - \Gamma_{kj}^l \frac{\partial}{\partial \zeta^l} \right) \\ &= g^{11} \left(\frac{\partial^2}{\partial \zeta^1 \partial \zeta^1} - \cancel{\Gamma_{11}^l} \frac{\partial}{\partial \zeta^l} \right) + g^{22} \left(\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2 \partial \zeta^2} - \Gamma_{22}^l \frac{\partial}{\partial \zeta^l} \right) + g^{33} \left(\frac{\partial^2}{\partial \zeta^3 \partial \zeta^3} - \Gamma_{33}^l \frac{\partial}{\partial \zeta^l} \right) \\ &= \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} - \Gamma_{22}^1 \frac{\partial}{\partial \zeta^1} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \phi} \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \Gamma_{33}^1 \frac{\partial}{\partial \zeta^1} - \Gamma_{33}^2 \frac{\partial}{\partial \zeta^2} \right) \\ &= \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} - (-r) \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \phi} \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - (-r \sin^2 \phi) \frac{\partial}{\partial r} - (-\sin \phi \cos \phi) \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \\ &= \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\sin \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{\sin^2 \phi} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] \end{aligned}$$

30/39

تانسورهای نسبی (Relative Tensors)

برای کاربرد این روش قدرتمند (معادلات تانسوری)، باید مطمئن بود که همه کمیات **تانسورند**. به ویژه باید مطمئن باشیم که همه اسکالرها اعداد ثابتی اند. این نکته بسیار مهم است زیرا ما در فیزیک کمیاتی را که مانند **تانسورهای نسبی** اند نیز استفاده می کنیم.

یک تانسور نسبی از وزن ω کمیتی است با مؤلفه‌هایی که قوانین انتقال آنها با ظاهر شدن ضریب ژاکوبین به توان ω با قوانین انتقال تانسورها متفاوت است.

$$(3) \quad \bar{\phi}(\theta) = \left| \frac{\partial x_j}{\partial \theta_\beta} \right|^\omega \phi(x) \quad \text{اسکالر نسبی از وزن } \omega$$

$$(4) \quad \bar{\zeta}^i(\theta) = \left| \frac{\partial x_j}{\partial \theta_\beta} \right|^\omega \zeta^\alpha(x) \frac{\partial \theta_i}{\partial x_\alpha} \quad \text{بردار کنتراورینت نسبی از وزن } \omega$$

اگر $\omega=0$ آنگاه همان مفهوم قبلی میدان تانسوری را خواهیم داشت. اینکه یک کمیتی تانسور یا تانسور نسبی است به تعریف ما از آن کمیت بستگی دارد.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

31/34

مثال ۱: جرمی که در یک حجم محصور شده بر حسب چگالی بیان می شود. اگر x_i مختصات کارتزین متعامد باشد که به مختصات منحنی الخط θ_j انتقال می یابد:

$$(5) \quad M = \iiint_V \rho_0(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3$$

هنگامی که برای ارزیابی انتگرال چندگانه یک تابع روی یک ناحیه از دامنه اش (Domain) تغییر متغیر می دهیم دترمینان ژاکوبین استفاده می شود.

$$= \iiint_V \rho_0[x(\theta)] \left| \frac{\partial x_i}{\partial \theta_j} \right| d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3$$

$$= \iiint_V \bar{\rho}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3$$

Cartesian: $V = \iiint dx dy dz$

Spherical: $= \iiint \left| \frac{\partial x_i}{\partial \theta_\alpha} \right| dr d\varphi d\theta$

$$= \iiint r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta$$

اگر $\bar{\rho}(\theta)$ در جمله آخر به عنوان توزیع (تابع) چگالی در مختصات θ تعریف شود، آنگاه، آن یک اسکالر نسبی از وزن یک است.

از طرف دیگر $\rho_0[x(\theta)] = \rho_0(x)$ یک اسکالر مطلق (absolute) است که چگالی (فیزیکی) یک ماده در یک نقطه را تعریف می کند.

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \varphi \end{pmatrix}, \quad \sqrt{g} = r^2 \sin \varphi$$

در اسلاید بعدی نشان داده می شود.

32/34

مثال ۲: دترمینان g تانسور متریک اقلیدسی g_{ij} که قانون انتقال آن به شکل زیر است را در نظر بگیرید.

$$(6) \quad \bar{g}_{\alpha\beta}(\theta) = g_{ij}(x) \frac{\partial x_i}{\partial \theta_\alpha} \frac{\partial x_j}{\partial \theta_\beta}$$

اگر $\bar{g} = |\bar{g}_{\alpha\beta}|$ ، دترمینان $\bar{g}_{\alpha\beta}$ باشد، با دو بار استفاده از رابطه ضرب دو دترمینان در معادله (6) به راحتی می‌توان اثبات کرد که:

$$|\bar{g}_{\alpha\beta}(\theta)| = \left| g_{ij}(x) \frac{\partial x_i}{\partial \theta_\alpha} \frac{\partial x_j}{\partial \theta_\beta} \right| = |g_{ij}(x)| \left| \frac{\partial x_i}{\partial \theta_\alpha} \frac{\partial x_j}{\partial \theta_\beta} \right| = g(x) \left| \frac{\partial x_i}{\partial \theta_\alpha} \right| \left| \frac{\partial x_j}{\partial \theta_\beta} \right| = g(x) \left| \frac{\partial x_i}{\partial \theta_\alpha} \right|^2$$

$$(7) \quad \bar{g}(\theta) = \left| \frac{\partial x_i}{\partial \theta_\alpha} \right|^2 g(x)$$

بنابراین g یک اسکالر نسبی از وزن دو است.

اگر ریشه معادله (7) را بگیریم، داریم:

$$\sqrt{\bar{g}(\theta)} = \left| \frac{\partial x_i}{\partial \theta_\alpha} \right| \sqrt{g(x)}$$

بنابراین $\sqrt{g}$ یک اسکالر نسبی از وزن یک است.

می‌دانیم که اگر x_i مختصات **کارتزین** متعامد باشد، $g=1$. بنابراین معادله (7) نشان می‌دهد که $\sqrt{g[x(\theta)]} = |\partial x_i / \partial \theta_j|$ ژاکوبین انتقال است.

33/34

بنابراین **حجم** محصور در یک سطح بسته را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$(8) \quad \begin{aligned} V &= \iiint dx_1 dx_2 dx_3 \\ &= \iiint \left| \frac{\partial x_i}{\partial \theta_\alpha} \right| d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 \\ &= \iiint \sqrt{g[x(\theta)]} d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3. \end{aligned}$$

انتگرال آخر اهمیت $\sqrt{g}$ را در مکانیک نشان می‌دهد.

روش‌های معادلات تانسوری در تانسورهای نسبی کاربرد ندارند.

بنابراین در یک معادله تانسوری تعریف مناسب تمامی کمیت‌ها که تانسور باشند مهم است.

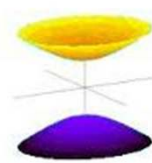
پایان این سری اسلایدها

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

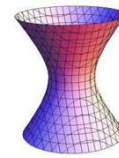
34/34

Note: The results obtained above hold true also for two-dimensional spaces, provided all indices range over 1 and 2 only. A curved shell in a three-dimensional Euclidean space appears, in general, to be a two-dimensional non-Euclidean space to a "two-dimensional" animal who has to measure distances right on the shell surface and is never allowed to leave the shell surface to view the third dimension. For a spherical surface, the nonvanishing components of the two-dimensional Riemann-Christoffel curvature tensor are all equal to a constant, which may be written as 1. For a flat plate, they are zero. For certain hyperboloidal surface all the nonvanishing components of curvature may take on the value -1. Since the spirit of the theory of thin elastic shells is to reduce all the properties of the shells into differential equations describing the middle surface of the shell, an engineer deals with non-Euclidean geometry rather frequently.

Hyperboloidal surfaces



Two sheet



One sheet

35/34