

Eighth Edition

CHAPTER

2

VECTOR MECHANICS FOR ENGINEERS: STATICS

Ferdinand P. Beer
E. Russell Johnston, Jr.

Lecture Notes:
J. Walt Oler
Texas Tech University

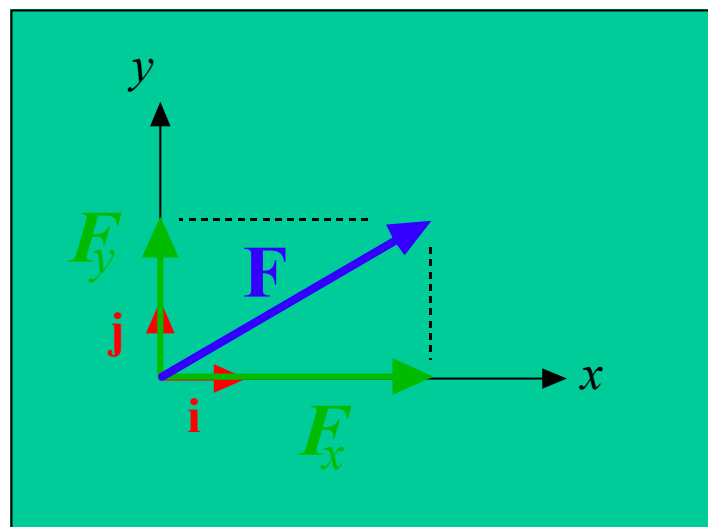
استاتیک ذرات
(ادامه)

Mc
Graw
Hill

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2007 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

بردارهای کارتزین



گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

۲/۲۹

نمایش بردارها بر حسب مؤلفه‌های کارتیزین

بردارهای یکه:

$$\mathbf{i}, \mathbf{j} \quad \dots \text{or} \dots \quad \hat{i}, \hat{j}$$

$$|\mathbf{i}| = |\mathbf{j}| = 1$$

نمایش:

$$\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j}$$

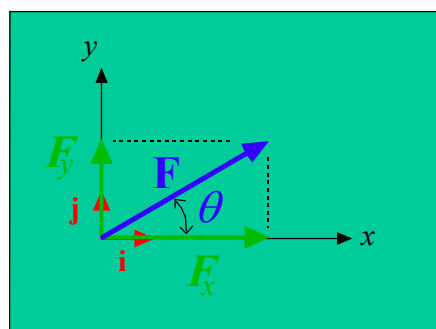
مقدار و جهت یک بردار بر حسب مؤلفه‌هایش

مقدار

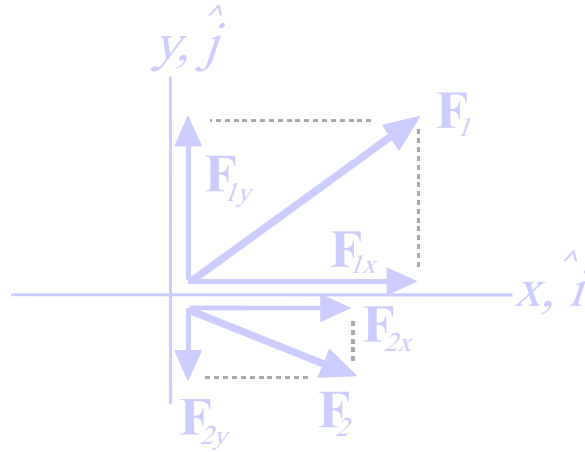
$$|\mathbf{F}| = F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

جهت

$$\theta = \tan^{-1} \left| \frac{F_y}{F_x} \right|$$



جمع بردارها با استفاده از مؤلفه‌های کارترین



$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = (F_{1x} + F_{2x}) \mathbf{i} + (F_{1y} + F_{2y}) \mathbf{j}$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

۵/۲۹

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = (F_{1x} + F_{2x}) \mathbf{i} + (F_{1y} + F_{2y}) \mathbf{j}$$

دقت کنید که در حالت کلی:

$$R_x = \sum F_{ix}$$

$$R_y = \sum F_{iy}$$

محاسبه مؤلفه‌های بردار با استفاده از روش فوق گاهی «راهبرد اسکالر» نامیده می‌شود.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

۶/۲۹

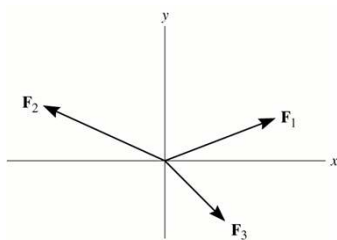
وقتی سه یا تعداد بیشتری نیروی متقاطع روی ذره‌ای اثر کنند، مؤلفه‌های متعامد برآیند $\mathbf{R}$ را می‌توان از جمع جبری مؤلفه‌های آن نیروها به دست آورد.

$$R_x = \sum F_{ix} \quad R_y = \sum F_{iy}$$

مقدار و جهت $\mathbf{R}$ از روابط زیر به دست می‌آید.

$$\tan \theta = \frac{R_y}{R_x} \quad R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

برآیند نیروهای متقاطع



$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1 &= F_{1x} \mathbf{i} + F_{1y} \mathbf{j} \\ \mathbf{F}_2 &= -F_{2x} \mathbf{i} + F_{2y} \mathbf{j} \\ \mathbf{F}_3 &= F_{3x} \mathbf{i} - F_{3y} \mathbf{j} \end{aligned}$$

$$\mathbf{F}_R = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3$$

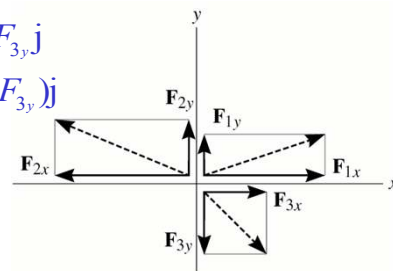
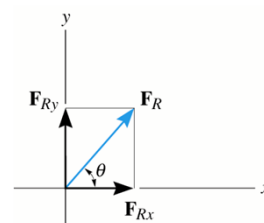
$$\mathbf{F}_R = F_{1x} \mathbf{i} + F_{1y} \mathbf{j} - F_{2x} \mathbf{i} + F_{2y} \mathbf{j} + F_{3x} \mathbf{i} - F_{3y} \mathbf{j}$$

$$\mathbf{F}_R = (F_{1x} - F_{2x} + F_{3x}) \mathbf{i} + (F_{1y} + F_{2y} - F_{3y}) \mathbf{j}$$

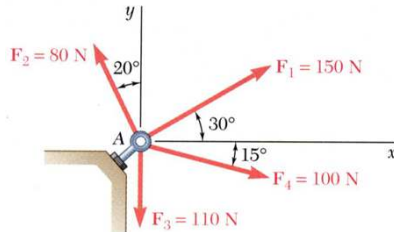
$$\mathbf{F}_R = F_{Rx} \mathbf{i} + F_{Ry} \mathbf{j}$$

$$F_{Rx} = (F_{1x} - F_{2x} + F_{3x})$$

$$F_{Ry} = (F_{1y} + F_{2y} - F_{3y})$$



مسئله نمونه 2.3



چهار نیرو به پیچ A مطابق شکل اثر می‌کنند. برآیند نیروها را به دست آورید.

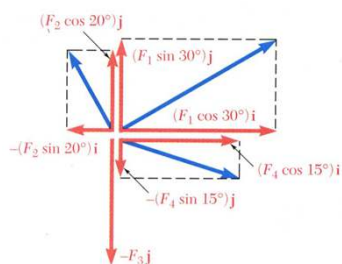
حل:

- هر نیرو را به مؤلفه‌هایش تجزیه کنید.
- مؤلفه‌های برآیند را با جمع مؤلفه‌های مربوط به دست آورید.
- مقدار و جهت برآیند را محاسبه کنید.

مسئله نمونه 2.3 (ادامه)

حل: هر نیرو را به مؤلفه‌هایش تجزیه کنید.

- مؤلفه‌های برآیند را با جمع مؤلفه‌های مربوط به دست آورید.



force	mag	x-comp	y-comp
$\vec{F}_1$	150	+129.9	+75.0
$\vec{F}_2$	80	-27.4	+75.2
$\vec{F}_3$	110	0	-110.0
$\vec{F}_4$	100	+96.6	-25.9
		$R_x = +199.1$	$R_y = +14.3$

- مقدار و جهت برآیند را محاسبه کنید.



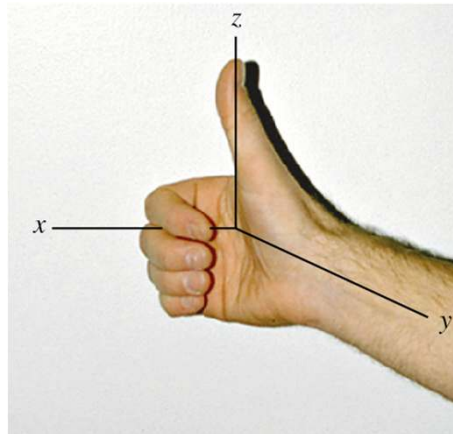
$$R = \sqrt{199.1^2 + 14.3^2}$$

$$\tan \alpha = \frac{14.3 \text{ N}}{199.1 \text{ N}}$$

$$R = 199.6 \text{ N}$$

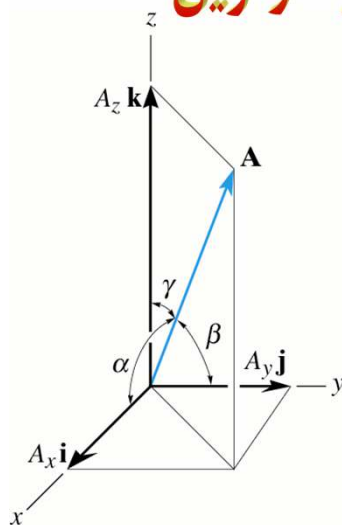
$$\alpha = 4.1^\circ$$

سیستم مختصات راست دست



جهت مثبت محور z را تعریف می کند

بردار کارتیزین سه بعدی جهت یک بردار کارتیزین

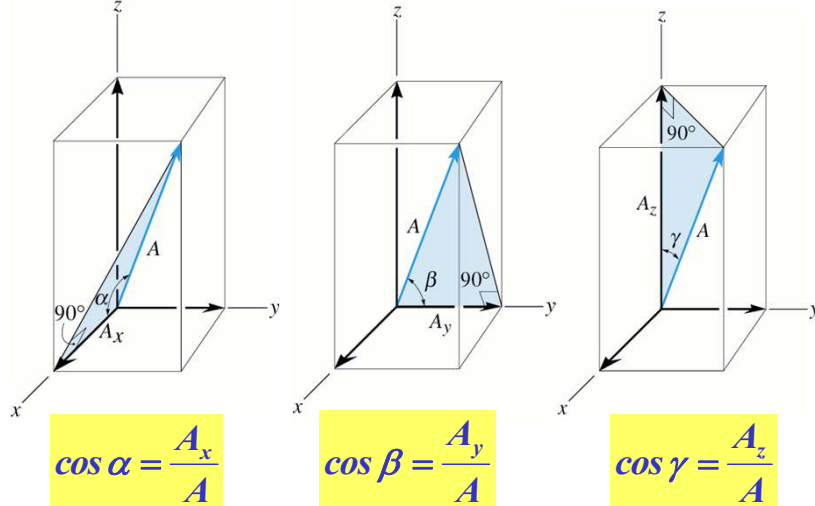


جهت با زوایا تعریف می شود.

α, β, γ

بردار کارتزین سه بعدی

کسینوس دایرکتوری‌های یک بردار کارترین



گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

بردار کارتزین سه بعدی

کسینوس دایرکتوری‌های یک بردار کارترین

$$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$$

بردار یکه در راستای A $\vec{u}_A = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{A_x}{|\vec{A}|} \vec{i} + \frac{A_y}{|\vec{A}|} \vec{j} + \frac{A_z}{|\vec{A}|} \vec{k}$

$$u_A = \cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j} + \cos \gamma \vec{k}$$

می‌دانیم: $|\vec{u}_A| = 1$

از طرفی مقدار هر بردار ریشه مربعات مؤلفه‌های آن است:

$$|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

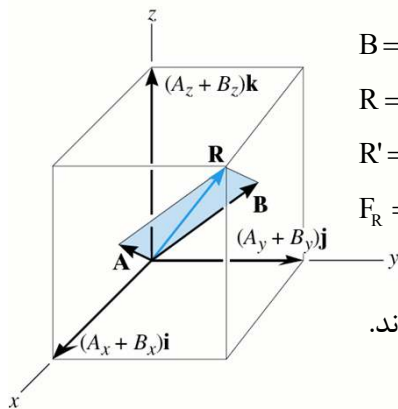
بنابراین داریم:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

۱۴/۲۹

بردار کارتیزین سه بعدی

جمع و تفریق بردارهای کارتیزین



$$A = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$$

$$B = B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k}$$

$$R = A + B = (A_x + B_x) \vec{i} + (A_y + B_y) \vec{j} + (A_z + B_z) \vec{k}$$

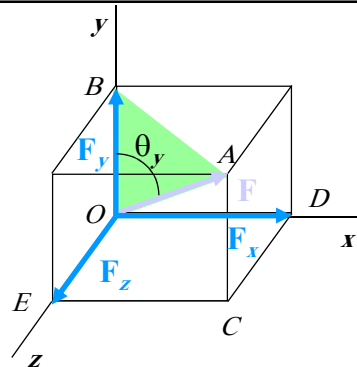
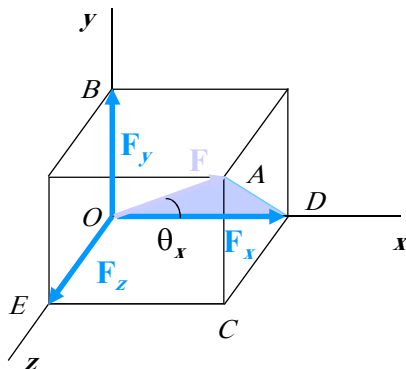
$$R' = A - B = (A_x - B_x) \vec{i} + (A_y - B_y) \vec{j} + (A_z - B_z) \vec{k}$$

$$F_R = \sum F = \sum F_x \vec{i} + \sum F_y \vec{j} + \sum F_z \vec{k}$$

زوایا با کسینوس دایرکتوری‌ها تعریف می‌شوند.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

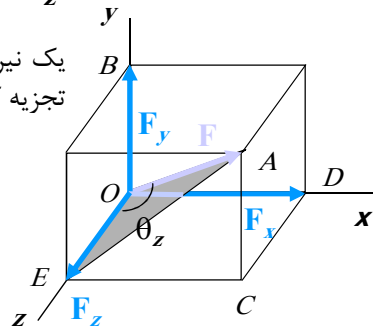
۱۵/۲۹



یک نیروی مانند F در سه بعدی را می‌توان به مؤلفه‌هایش تجزیه کرد:

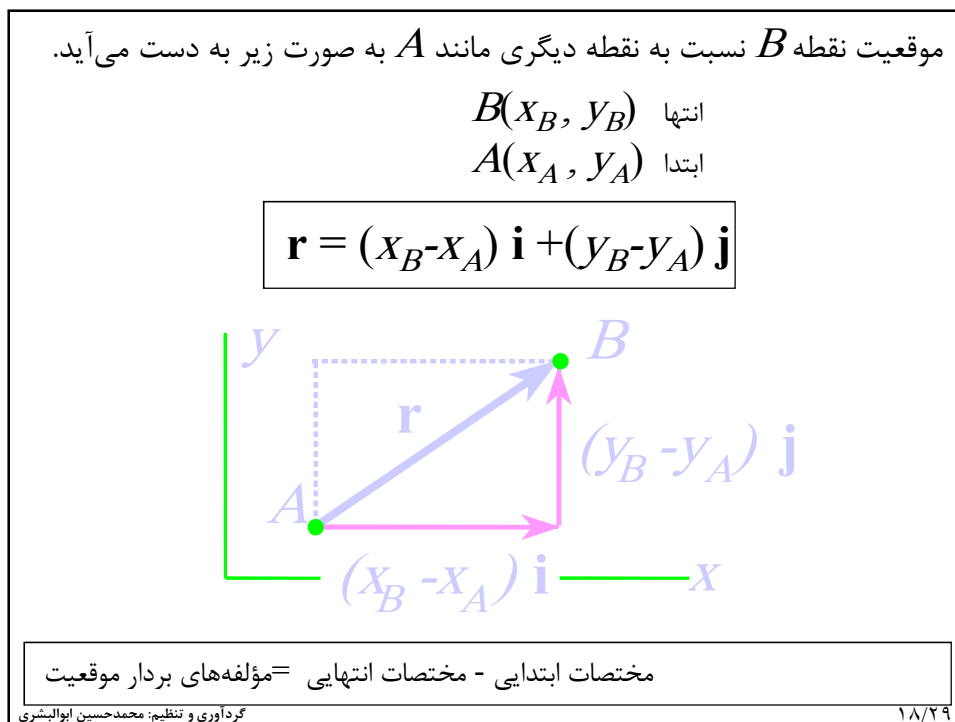
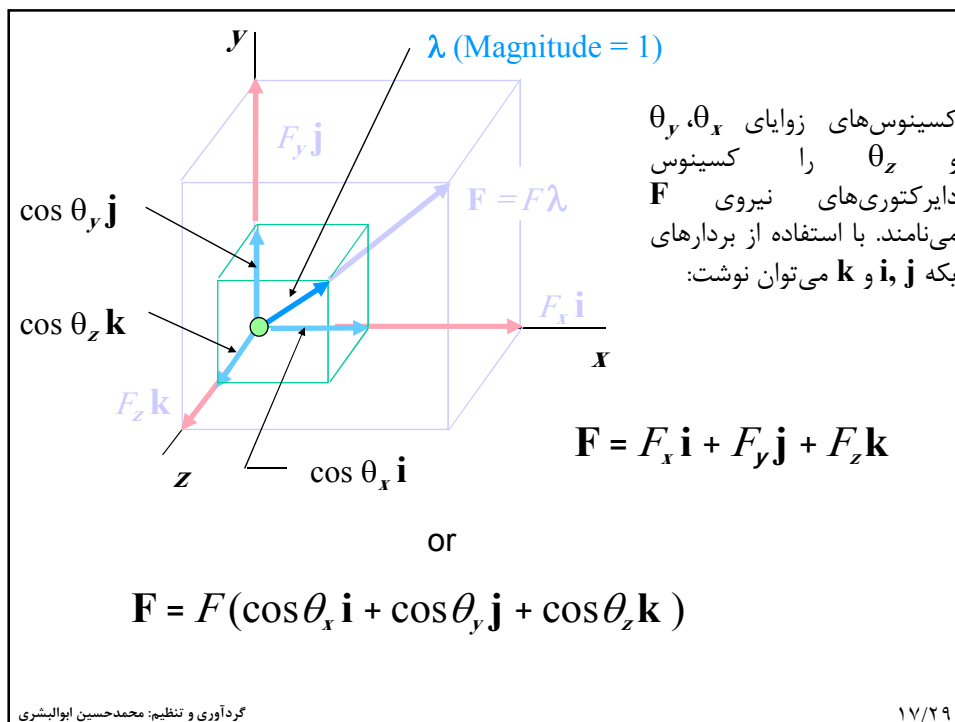
$$F_x = F \cos \theta_x \quad F_y = F \cos \theta_y$$

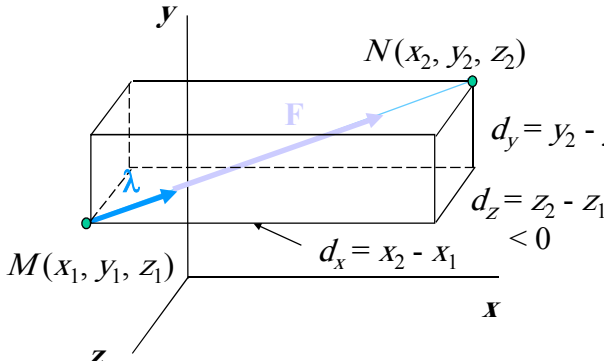
$$F_z = F \cos \theta_z$$



گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

۱۶/۲۹





بردار نیروی $\mathbf{F}$ در سه بعدی با مقدار F و دو نقطه M و N در راستای آن مشخص می‌شود. بردار $\overrightarrow{MN}$ دو نقطه M و N را به هم متصل می‌کند.

$d_y = y_2 - y_1$
 $d_z = z_2 - z_1$
 $d_x = x_2 - x_1$
 < 0

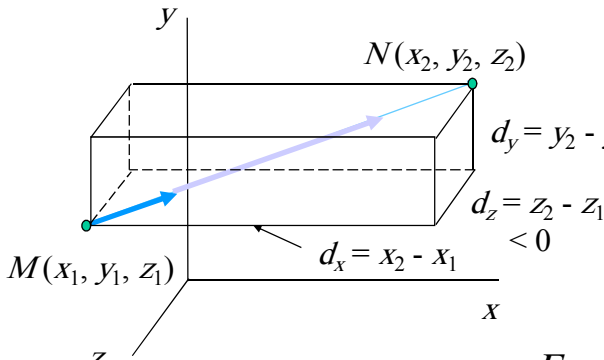
$$\overrightarrow{MN} = d_x \mathbf{i} + d_y \mathbf{j} + d_z \mathbf{k}$$

بردار یکه λ در راستای خط اثر نیرو عبارت است از:

$$\lambda = \frac{\overrightarrow{MN}}{MN} = \frac{1}{d} (d_x \mathbf{i} + d_y \mathbf{j} + d_z \mathbf{k})$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

۱۹/۲۹



$d = \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2}$

$d_y = y_2 - y_1$
 $d_z = z_2 - z_1$
 $d_x = x_2 - x_1$
 < 0

نیروی $\mathbf{F}$ به صورت حاصل ضرب F و λ تعریف می‌شود. بنابراین:

$$\mathbf{F} = F\lambda = \frac{F}{d} (d_x \mathbf{i} + d_y \mathbf{j} + d_z \mathbf{k})$$

داریم:

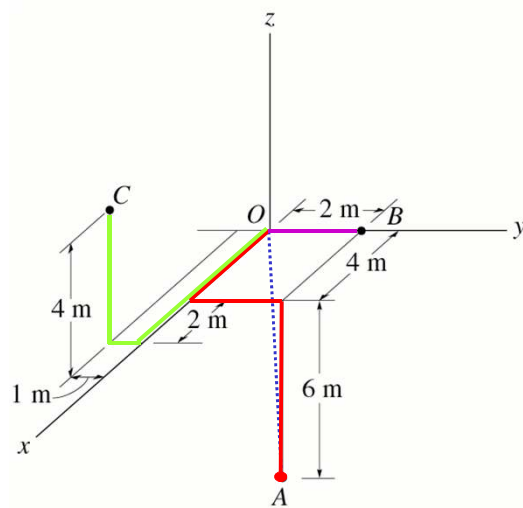
$$F_x = \frac{Fd_x}{d} \quad F_y = \frac{Fd_y}{d} \quad F_z = \frac{Fd_z}{d}$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

۲۰/۲۹

بردارهای موقعیت

مختصات x, y, z



$$A - (4, 2, -6)$$

$$OA(4, 2, -6)$$

$$OB(0, 2, 0)$$

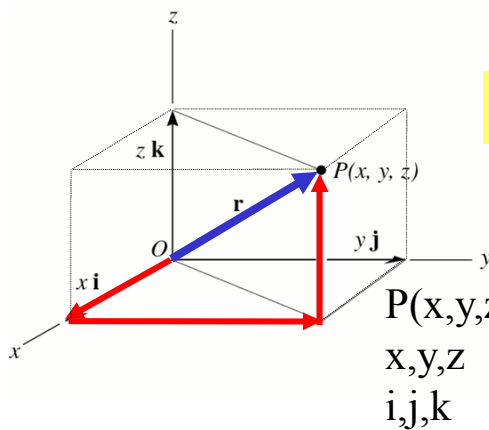
$$OC(6, -1, 4)$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

۲۱/۲۹

بردارهای موقعیت

مختصات x, y, z



$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

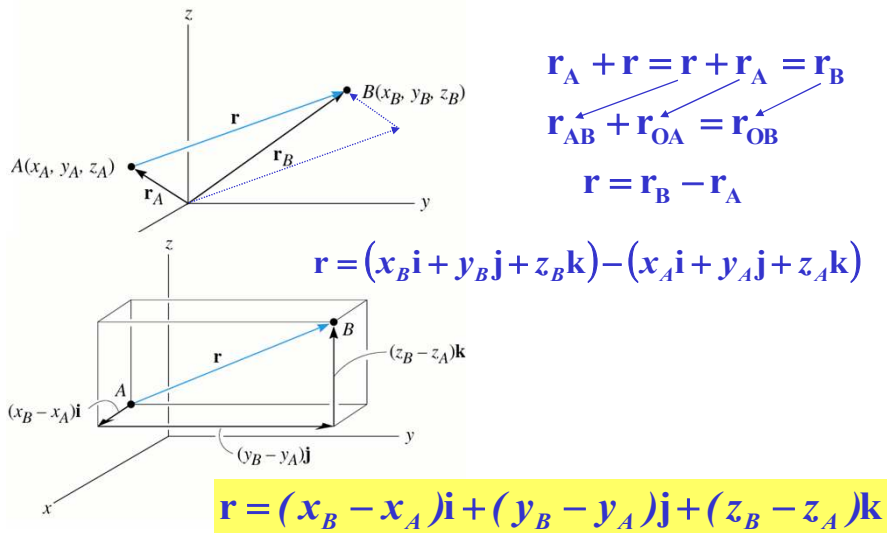
موقعیت را تعریف می کنند
اسکالر هستند
بردارهای یکه هستند

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

۲۲/۲۹

بردارهای موقعیت

بردارهای موقعیتی که از مرکز مختصات نمی گذرند

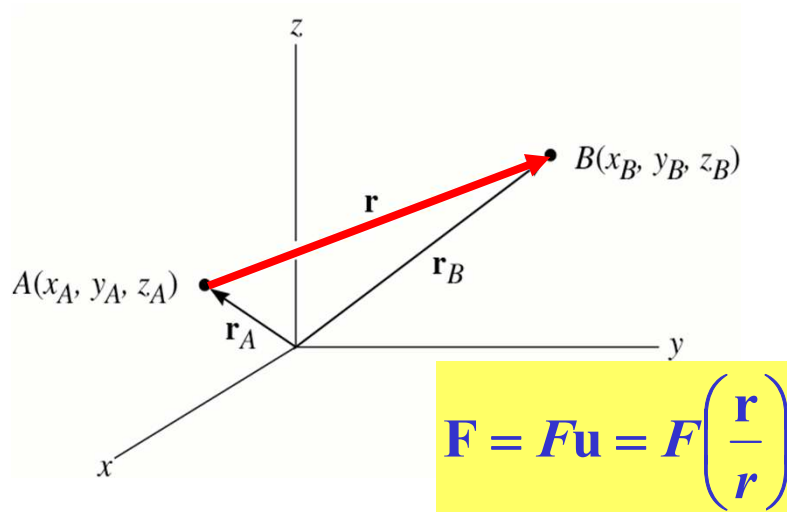


گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

۲۳/۲۹

بردارهای موقعیت

بردار نیرویی که در راستای یک خط است

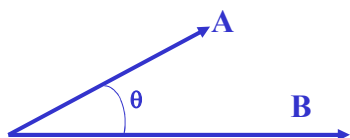


گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

۲۴/۲۹

ضرب نقطه‌ای بردار

ضرب اسکالر



$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \theta$$

قوانین عمل ضرب

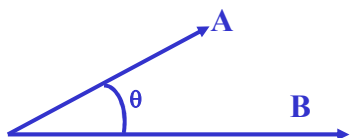
Commutative	$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$
Scalar Multiplication	$a(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (a\mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot (a\mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})a$
Distributive Law	$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})$

ضرب نقطه‌ای بردار

رابطه سازی برای بردارهای کارتزین

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \theta$$

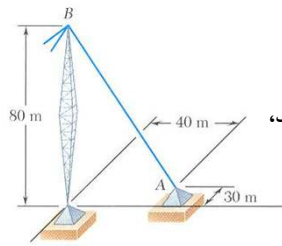
$$\begin{aligned} \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} &= 1 & \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} &= 1 & \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} &= 1 \\ \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} &= 0 & \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} &= 0 & \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} &= 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= (A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}) \cdot (B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k}) \\ \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= A_x B_x (\mathbf{i} \cdot \mathbf{i}) + A_x B_y (\mathbf{i} \cdot \mathbf{j}) + A_x B_z (\mathbf{i} \cdot \mathbf{k}) + \\ &\quad A_y B_x (\mathbf{j} \cdot \mathbf{i}) + A_y B_y (\mathbf{j} \cdot \mathbf{j}) + A_y B_z (\mathbf{j} \cdot \mathbf{k}) + \\ &\quad A_z B_x (\mathbf{k} \cdot \mathbf{i}) + A_z B_y (\mathbf{k} \cdot \mathbf{j}) + A_z B_z (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}) \end{aligned}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

مسئله نمونه 2.7



کشش در سیم مهار 2500 N است. مطلوب است:

الف) مؤلفه‌های F_x , F_y , F_z نیرویی که به پیچ در A اثر می‌کند،

ب) زوایای θ_x , θ_y , θ_z کسینوس دایرکتوری‌های نیرو

حل:

• بردار یکه‌ای که از طرف A به طرف B است را به دست می‌آوریم.

$$\vec{AB} = (-40\text{ m})\vec{i} + (80\text{ m})\vec{j} + (30\text{ m})\vec{k}$$

$$AB = \sqrt{(-40\text{ m})^2 + (80\text{ m})^2 + (30\text{ m})^2} = 94.3\text{ m}$$

$$\vec{\lambda} = \left(\frac{-40}{94.3}\right)\vec{i} + \left(\frac{80}{94.3}\right)\vec{j} + \left(\frac{30}{94.3}\right)\vec{k}$$

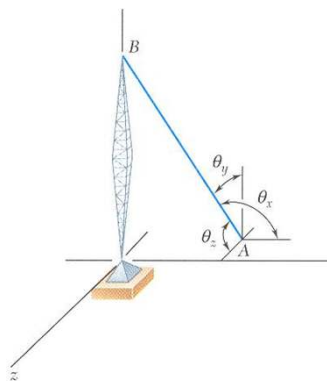
$$= -0.424\vec{i} + 0.848\vec{j} + 0.318\vec{k}$$

• مؤلفه‌های نیرو را به دست می‌آوریم: $\vec{F} = F\vec{\lambda} = (2500\text{ N})(-0.424\vec{i} + 0.848\vec{j} + 0.318\vec{k})$

$$= (-1060\text{ N})\vec{i} + (2120\text{ N})\vec{j} + (795\text{ N})\vec{k}$$

۲۷/۲۹

مسئله نمونه 2.7 (ادامه)



• با توجه به اینکه مؤلفه‌های بردار یکه کسینوس دایرکتوری‌های بردار هستند، زوایای مربوط را به دست می‌آوریم.

$$\vec{\lambda} = \cos\theta_x\vec{i} + \cos\theta_y\vec{j} + \cos\theta_z\vec{k}$$

$$= -0.424\vec{i} + 0.848\vec{j} + 0.318\vec{k}$$

$$\theta_x = 115.1^\circ$$

$$\theta_y = 32.0^\circ$$

$$\theta_z = 71.5^\circ$$