

Third Edition

MECHANICS OF MATERIALS

CHAPTER 9

Ferdinand P. Beer
E. Russell Johnston, Jr.
John T. DeWolf

Lecture Notes:
J. Walt Oler
Texas Tech University

خیز تیرها

© M.H. Abolbashari, Ferdowsi University of Mashhad

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

MECHANICS OF MATERIALS

Beer • Johnston • DeWolf

روش‌های بدست آوردن خیز در تیرها

خیز تیرها:

۱- روش‌هایی که معادله منحنی الاستیک را می‌دهند.

- انتگرال گیری مستقیم
- توابع استثنایی

$$y = \frac{PaL^2}{6EI} \left[\frac{x}{L} - \left(\frac{x}{L} \right)^3 \right]$$

۲- روش‌هایی که با کمک آن‌ها خیز و یا شیب را در یک نقطه بخصوص می‌توان به دست آورد.

- قضایای مساحت لنگر (دو قضیه)

قضیه ۱: $\theta_{D/C} = \theta_D - \theta_C = \int_C^D \frac{M}{EI} dx$

قضیه ۲: $t_{C/D} = \int_C^D x_1 \frac{M}{EI} dx$

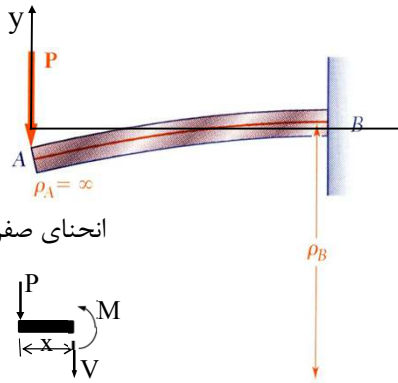
9 - 2 of 29

Third Edition

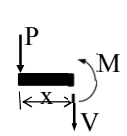
MECHANICS OF MATERIALS

Beer • Johnston • DeWolf

تغییر شکل تیرها تحت بارهای عرضی



انحنای صفر



$$M + Px = 0 \rightarrow M = -Px$$

- ارتباط بین ممان خمشی و انحنای در خمش خالص برای بارهای عرضی همچنان معتبراند.

$$\text{انحنا} = \frac{1}{\rho} = \frac{M(x)}{EI}$$

- تیر یکسرگیرداری که تحت یک بار متمرکز در انتهای آزادش است:

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{Px}{EI}$$

- انحنای به طور خطی نسبت به x تغییر می‌کند.

در انتهای آزاد $x=0$: انحنای صفر $\rho_A = \infty$, $\frac{1}{\rho_A} = 0$

در تکیه گاه B: $\frac{1}{\rho_B} \neq 0$, $|\rho_B| = \frac{EI}{PL}$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشیری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

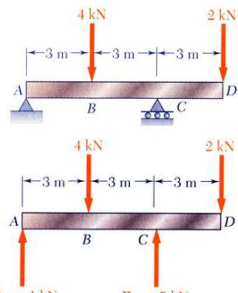
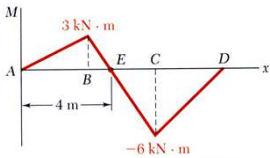
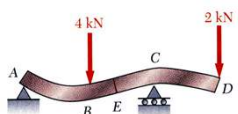
9 - 3 of 29

Third Edition

MECHANICS OF MATERIALS

Beer • Johnston • DeWolf

تغییر شکل تیرها تحت بارهای عرضی (ادامه)

- تیر با تکیه گاه میانی (سراویز)
- عکس‌العمل‌ها در A و C
- ترسیمه ممان خمشی
- انحنای در نقاطی که ممان خمشی صفر است (یعنی در دو سر آزاد تیر و در نقطه E) وجود ندارد.

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M(x)}{EI} \quad \frac{1}{\rho} = 0, \quad \rho = \infty$$

- وقتی که ممان خمشی مثبت است تقعر تیر به طرف بالا و وقتی منفی است تقعر آن به طرف پایین است.
- در جایی که مقدار ممان ماکزیمم است انحنای نیز ماکزیمم است.
- برای به دست آوردن خیز و شیب ماکزیمم معادله شکل تیر یا **منحنی الاستیک** مورد نیاز است.

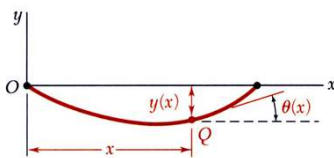
© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

9 - 4 of 29

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

معادله منحنی الاستیک

• از ریاضیات مقدماتی با پارامترهای تیر داریم:



$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{3/2}} \approx \frac{d^2 y}{dx^2} \quad \text{if } dy/dx \ll 1$$

• با جایگزینی و انتگرال گیری

$$EI \frac{1}{\rho} = EI \frac{d^2 y}{dx^2} = M(x)$$

رابطه انحنا و شیب

$$EI \theta \approx EI \frac{dy}{dx} = \int_0^x M(x) dx + C_1 = \int_0^x EI \frac{1}{\rho(x)} dx + C_1$$

$$EI y = \int_0^x dx \int_0^x M(x) dx + C_1 x + C_2$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

9 - 5 of 29

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

معادله منحنی الاستیک (ادامه)

• اگر از معادله ممان خمشی

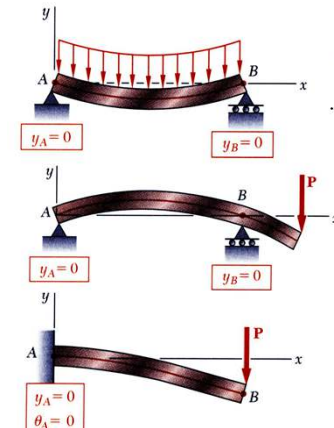
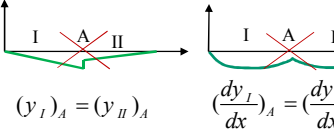
$$EI y = \int_0^x dx \int_0^x M(x) dx + C_1 x + C_2$$

استفاده کنیم، ثابت‌ها از شرایط مرزی به دست می‌آیند.

• سه حالت برای شرایط مرزی تیرهای معین ایستایی:

- تیر با تکیه گاه ساده $y_A = 0, y_B = 0$
- تیر سرآویز $y_A = 0, y_B = 0$
- تیر یکسرگیردار $y_A = 0, \theta_A = 0$

• بارگذاری‌های پیچیده نیاز به چندین مرتبه انتگرال گیری و به کارگیری شرط پیوستگی تغییر مکان‌ها و شیب دارد.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

9 - 6 of 29

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

به دست آوردن مستقیم منحنی الاستیک از توزیع بار

- برای تیری که تحت بار گسترده است، با توجه به جهت بار، از ایستایی داریم:

$$\frac{dM}{dx} = V(x) \quad \frac{d^2M}{dx^2} = \frac{dV}{dx} = -w(x)$$

از اسلایدهای قبل:

$$EI \frac{1}{\rho} = EI \frac{d^2y}{dx^2} = M(x)$$

- معادله تغییر مکان تیر عبارت است از:

$$\frac{d^2M}{dx^2} = EI \frac{d^4y}{dx^4} = -w(x)$$

- با چهار بار انتگرال گیری داریم:

$$EI y(x) = -\int dx \int dx \int dx \int w(x) dx + \frac{1}{6} C_1 x^3 + \frac{1}{2} C_2 x^2 + C_3 x + C_4$$

- ثابت‌های انتگرال گیری از شرایط مرزی به دست می‌آید.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 9 - 7 of 29

(a) Cantilever beam

(b) Simply supported beam

Boundary conditions for (a): $[y_A=0]$, $[\theta_A=0]$, $[V_B=0]$, $[M_B=0]$

Boundary conditions for (b): $[y_A=0]$, $[M_A=0]$, $[y_B=0]$, $[M_B=0]$

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

به دست آوردن عکس العمل‌ها در تیرهای نامعین ایستایی به کمک روابط خیز

- تیری با تکیه گاه‌های ثابت در A و ساده در B در نظر بگیرید.
- از ترسیمه آزاد می‌توان دید که **چهار** مؤلفه عکس‌العمل **مجهول** وجود دارد.
- **سه** شرط تعادل ایستایی داریم:

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum M_A = 0$$

- تیر از نظر **ایستایی نامعین** است.
- همچنین رابطه خیز تیر عبارت است از:

$$EI y = \int_0^x dx \int_0^x M(x) dx + C_1 x + C_2$$

- که **دو مجهول** دارد ولی از شرایط مرزی **سه معادله** داریم:

$$At x=0, \theta=0 \text{ and } y=0 \quad At x=L, y=0$$

- در مجموع از **۶ معادله** می‌توان **۶ مجهول** را محاسبه کرد.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

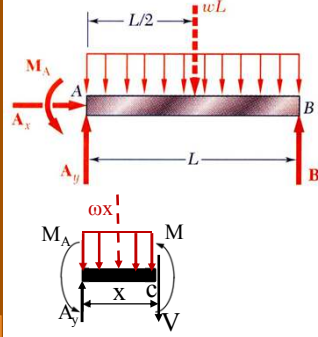
© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 9 - 8 of 29

Boundary conditions for (a): $[x=0, \theta=0]$, $[x=0, y=0]$, $[x=L, y=0]$

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مثال:

برای تیر نشان داده شده عکس العمل‌ها را به دست آورید.



$$\sum F_x = 0 \rightarrow A_x = 0$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow A_y + B - \omega L = 0$$

$$\sum M_A = 0 \rightarrow M_A + BL - \frac{1}{2}\omega L^2 = 0$$

$$\sum M_c = 0 \rightarrow M + \omega x \frac{x}{2} + M_A - A_y x = 0$$

$$M = -\frac{1}{2}\omega x^2 + A_y x - M_A = 0$$

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = M(x) = -\frac{1}{2}\omega x^2 + A_y x - M_A$$

$$EI \theta = EI \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{6}\omega x^3 + \frac{1}{2}A_y x^2 - M_A x + C_1 \quad x = 0, \theta = 0 \rightarrow C_1 = 0$$

$$EI y = -\frac{1}{24}\omega x^4 + \frac{1}{6}A_y x^3 - M_A \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2 \quad x = 0, y = 0 \rightarrow C_2 = 0$$

$$EI y = -\frac{1}{24}\omega x^4 + \frac{1}{6}A_y x^3 - M_A \frac{x^2}{2} \quad x = L, y = 0 \rightarrow 0 = -\frac{1}{24}\omega L^4 + \frac{1}{6}A_y L^3 - M_A \frac{L^2}{2}$$

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 9 - 9 of 29

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مثال (ادامه):

از حل همزمان این معادله و معادلات تعادل:

$$3M_A - A_y L - \frac{1}{4}\omega L^4 = 0$$

$$\sum F_x = 0 \rightarrow A_x = 0$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow A_y + B - \omega L = 0$$

$$\sum M_A = 0 \rightarrow M_A + BL - \frac{1}{2}\omega L^2 = 0$$

$$A_y = \frac{5}{8}\omega L, \quad M_A = \frac{1}{8}\omega L^2, \quad B = \frac{3}{8}\omega L$$

داریم:

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 9 - 10 of 29

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مثال از کتاب Popov

لنگر خمشی M_1 بر انتهای آزاد یک تیر یکسر گیر دار به طول L و سختی خمشی EI وارد می‌شود. مطلوب است تعیین رابطه منحنی ارتجاعی (الاستیک) تیر.

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = M_1$$

$$EI \frac{dy}{dx} = M_1 x + c_1, \quad \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=0} = 0 \rightarrow c_1 = 0$$

$$EI \frac{dy}{dx} = M_1 x$$

$$EI y = \frac{1}{2} M_1 x^2 + c_2, \quad y(0) = 0 \rightarrow c_2 = 0$$

$$y = \frac{M_1 x^2}{2EI}$$

هر چند به دلیل ثابت بودن لنگر خمشی، منحنی الاستیک باید به شکل کمائی از دایره باشد ولی به دلیل استفاده از تقریب در $1/\rho$ ، منحنی الاستیک یک سهمی است.

در سه منحنی پایینی که هر منحنی زیرین انتگرال منحنی بالاتر از خودش است، بدیهی است که اگر مقدار کمیتی در یک نقطه صفر باشد، منحنی زیرین باید در آن نقطه مماس بر محور افقی باشد. مانند شیب صفر در یک نقطه که منحنی الاستیک در آن نقطه مماس بر محور افقی است.

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 9 - 11 of 29

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مسئله نمونه 9.1

حل:

- رابطه‌ای برای $M(x)$ نوشته و معادله دیفرانسیل منحنی الاستیک را به دست می‌آوریم.
- از معادله دیفرانسیل دو بار انتگرال می‌گیریم و شرایط مرزی را اعمال می‌کنیم تا منحنی الاستیک را به دست آوریم.
- نقطه شیب صفر یا خیز ماکزیمم را پیدا می‌کنیم.
- خیز ماکزیمم مربوطه را محاسبه می‌کنیم.

برای قسمت **AB** از تیر سرآویز فوق، الف) معادله منحنی الاستیک را به دست آورید. ب) خیز ماکزیمم در چه نقطه‌ای اتفاق می‌افتد؟ ج) y_{max} را محاسبه کنید.

$W 14 \times 68 \quad I = 723 \text{ in}^4 \quad E = 29 \times 10^6 \text{ psi}$
 $P = 50 \text{ kips} \quad L = 15 \text{ ft} = 180 \text{ in} \quad a = 4 \text{ ft} = 48 \text{ in}$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشیری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 9 - 12 of 29

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مسئله نمونه 9.1 (ادامه)

حل:

- رابطه‌ای برای $M(x)$ نوشته و معادله دیفرانسیل منحنی الاستیک را به دست آورید.
- عکس‌العمل‌ها:

$$R_A = \frac{Pa}{L} \downarrow \quad R_B = P \left(1 + \frac{a}{L}\right) \uparrow$$

- از ترسیمه آزاد AD داریم:

$$M = -P \frac{a}{L} x \quad (0 < x < L)$$

- معادله دیفرانسیل منحنی الاستیک عبارت است از:

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -P \frac{a}{L} x$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

9 - 13 of 29

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مسئله نمونه 9.1 (ادامه)

- از معادله دیفرانسیل $EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -P \frac{a}{L} x$ دو بار انتگرال می‌گیریم و شرایط مرزی را اعمال می‌کنیم تا منحنی الاستیک را به دست آوریم.

$$EI \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2} P \frac{a}{L} x^2 + C_1$$

$$EI y = -\frac{1}{6} P \frac{a}{L} x^3 + C_1 x + C_2$$

شرایط مرزی:

at $x = 0, y = 0 \rightarrow C_2 = 0$

at $x = L, y = 0 \rightarrow 0 = -\frac{1}{6} P \frac{a}{L} L^3 + C_1 L \rightarrow C_1 = \frac{1}{6} PaL$

با جایگذاری داریم:

$$EI \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2} P \frac{a}{L} x^2 + \frac{1}{6} PaL \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{PaL}{6EI} \left[1 - 3 \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right]$$

$$EI y = -\frac{1}{6} P \frac{a}{L} x^3 + \frac{1}{6} PaLx$$

$$y = \frac{PaL^2}{6EI} \left[\frac{x}{L} - \left(\frac{x}{L} \right)^3 \right]$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

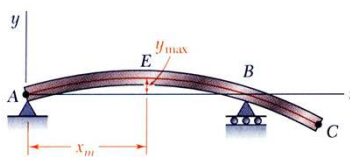
© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

9 - 14 of 29

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مسئله نمونه 9.1 (ادامه)

• نقطه شیب صفر یا خیز ماکزیمم را پیدا می کنیم.



$$\frac{dy}{dx} = 0 = \frac{PaL}{6EI} \left[1 - 3 \left(\frac{x_m}{L} \right)^2 \right] \rightarrow x_m = \frac{L}{\sqrt{3}} = 0.577L$$

• خیز ماکزیمم مربوطه را محاسبه می کنیم.

$$y = \frac{PaL^2}{6EI} \left[\frac{x}{L} - \left(\frac{x}{L} \right)^3 \right]$$

$$y_{\max} = \frac{PaL^2}{6EI} \left[0.577 - (0.577)^3 \right] \rightarrow y_{\max} = 0.0642 \frac{PaL^2}{6EI}$$

$$y_{\max} = 0.0642 \frac{(50 \text{ kips})(48 \text{ in})(180 \text{ in})^2}{6(29 \times 10^6 \text{ psi})(723 \text{ in}^4)} \rightarrow y_{\max} = 0.238 \text{ in}$$

توجه: به عنوان یک برداشت مهندسی، خیز ماکزیمم در قسمت AB با 5m طول، حدود 5mm برای بار حدود 25 ton است.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

9 - 15 of 29

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مسئله نمونه 9.3

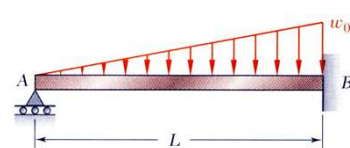
حل:

• معادله دیفرانسیل منحنی الاستیک را به دست آورید (که به صورت تابعی از عکس العمل در A خواهد بود).

• دو بار انتگرال گیری نمایید و شرایط مرزی را اعمال کنید و عکس العمل در A را به دست آورده و سپس منحنی الاستیک را به دست آورید.

• شیب در A را به دست آورید.

برای تیر یکنواخت فوق، عکس العمل در A، معادله منحنی الاستیک و شیب در نقطه A را به دست آورید. (دقت کنید که تیر از نظر ایستایی نامعین ایستایی از درجه یک است).



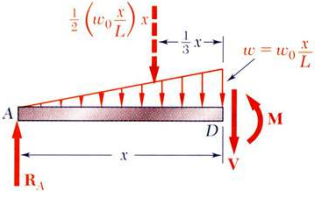
گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

9 - 16 of 29

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مسئله نمونه 9.3 (ادامه)



- به ممانی که در مقطعی مانند D که در فاصله x از A قرار دارد توجه کنید.

$$\sum M_D = 0$$

$$R_A x - \frac{1}{2} \left(\frac{w_0 x^2}{L} \right) \frac{x}{3} - M = 0$$

$$M = R_A x - \frac{w_0 x^3}{6L}$$
- معادله دیفرانسیل منحنی الاستیک عبارت است از:

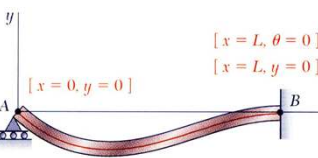
$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = M = R_A x - \frac{w_0 x^3}{6L}$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشیری
 © 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

9 - 17 of 29

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مسئله نمونه 9.3 (ادامه)



- دو بار انتگرال می گیریم:

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = M = R_A x - \frac{w_0 x^3}{6L}$$

$$EI \frac{dy}{dx} = EI \theta = \frac{1}{2} R_A x^2 - \frac{w_0 x^4}{24L} + C_1$$

$$EI y = \frac{1}{6} R_A x^3 - \frac{w_0 x^5}{120L} + C_1 x + C_2$$
- شرایط مرزی را اعمال می کنیم:
 at $x = 0, y = 0$: $C_2 = 0$
 at $x = L, \theta = 0$: $\frac{1}{2} R_A L^2 - \frac{w_0 L^4}{24} + C_1 = 0$
 at $x = L, y = 0$: $\frac{1}{6} R_A L^3 - \frac{w_0 L^5}{120} + C_1 L = 0$
- از حل همزمان این دو معادله عکس العمل A را به دست می آوریم.

$$R_A = \frac{1}{10} w_0 L \uparrow \quad C_1 = -\frac{1}{120} w_0 L^3$$
- در این مسئله از معادلات تعادل ایستایی برای مجهولات استفاده نشد زیرا همه عکس العمل ها را خواسته بود.

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

9 - 18 of 29

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مسئله نمونه 9.3 (ادامه)

• با جایگذاری مقادیر C_1 , C_2 و R_A در معادله منحنی الاستیک داریم:

$$EI y = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{10} w_0 L \right) x^3 - \frac{w_0 x^5}{120 L} - \left(\frac{1}{120} w_0 L^3 \right) x$$

$$y = \frac{w_0}{120 EIL} (-x^5 + 2L^2 x^3 - L^4 x)$$

• اگر از معادله خیز مشتق بگیریم، شیب به دست می‌آید.

$$\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{w_0}{120 EIL} (-5x^4 + 6L^2 x^2 - L^4)$$

at $x = 0$, $\theta_A = -\frac{w_0 L^3}{120 EI}$

دقت کنید که شیب در $x=0$ منفی است که به معنی زاویه زیر محور x است.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

9 - 19 of 29

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

روش جمع آثار

اصل جمع آثار:

• تغییر شکل تیرهایی که تحت تأثیر ترکیبی از بارگذاری‌ها قرار دارند را می‌توان از ترکیب خطی تغییر شکل‌های هر یک از بارگذاری‌ها به دست آورد.

• با جدول‌هایی که برای جواب‌های انواع بارها و تکیه گاه‌ها در دست است (پیوست کتاب) روش جمع آثار به راحتی قابل انجام است.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

9 - 20 of 29

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مسئله نمونه 9.7

برای تیر و بارگذاری نشان داده شده، شیب و خیز را در B به دست آورید.

حل:

تغییر شکل‌های حاصل از بارگذاری I و II را به شکل زیر با هم جمع می‌کنیم.

Loading I **Loading II**

گرآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

9 - 21 of 29

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مسئله نمونه 9.7 (ادامه)

بارگذاری I: از جدول پیوست د داریم.

$$(\theta_B)_I = -\frac{wL^3}{6EI} \quad (y_B)_I = -\frac{wL^4}{8EI}$$

بارگذاری II: در روابط فوق به جای L باید $L/2$ قرار دهیم (و خیز و شیب نقطه C به دست می‌آید) و علامت منفی برای جهت بار را اعمال می‌کنیم:

$$(\theta_C)_{II} = \frac{wL^3}{48EI} \quad (y_C)_{II} = \frac{wL^4}{128EI}$$

در قطاع CB تیر، ممان صفر است و منحنی الاستیک یک خط مستقیم است.

$$(\theta_B)_{II} = (\theta_C)_{II} = \frac{wL^3}{48EI}$$

برای به دست آوردن خیز نهایی نقطه B، اگر مقدار شیب در C کم باشد و زاویه را با تانژانت (یا سینوس) آن برابر فرض کنیم، خیز نسبت به C را با خیز C جمع می‌کنیم.

$$y_{B/C} = (L/2) \tan(\theta_C)_{II} \cong (L/2)(\theta_C)_{II}$$

$$(y_B)_{II} = (y_C)_{II} + y_{B/C} = \frac{wL^4}{128EI} + \frac{wL^3}{48EI} \left(\frac{L}{2}\right) = \frac{7wL^4}{384EI}$$

گرآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

9 - 22 of 29

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مسئله نمونه 9.7 (ادامه)

دو جواب را با هم ترکیب می کنیم.

$$\theta_B = (\theta_B)_I + (\theta_B)_{II} = -\frac{wL^3}{6EI} + \frac{wL^3}{48EI}$$

$$y_B = (y_B)_I + (y_B)_{II} = -\frac{wL^4}{8EI} + \frac{7wL^4}{384EI}$$

$\theta_B = -\frac{7wL^3}{48EI}$

$y_B = -\frac{41wL^4}{384EI}$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

9 - 23 of 29

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

کاربرد اصل جمع آثار در تیرهای از نظر ایستایی نامعین

- روش جمع آثار را می توان برای به دست آوردن عکس العمل های تکیه گاهی تیرهایی که از نظر ایستایی نامعین اند به کار برد.
- یکی از عکس العمل ها را اضافی در نظر گرفته و تکیه گاه را حذف کنید.
- تغییر شکل تیر را بدون در نظر گرفتن تکیه گاه اضافی به دست آورید.
- عکس العمل اضافی را به عنوان یک بار مجهول در نظر گرفته که همراه سایر بارها باید تغییر شکل سازگاری با تکیه گاه های اصلی داشته باشد.

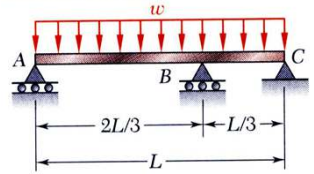
گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

9 - 24 of 29

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

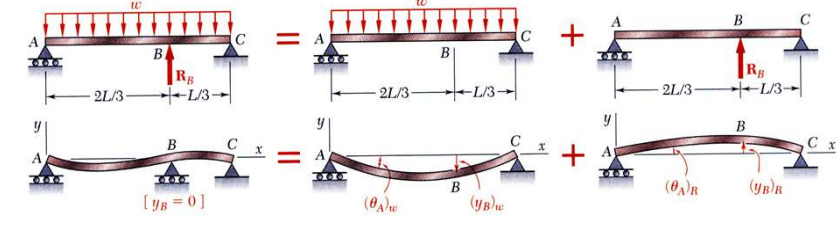
مسئله نمونه 9.8



برای تیر یکنواخت و بارگذاری نشان داده شده،
عکس‌العمل در هر یک از تکیه‌گاه‌ها و شیب در A
را به دست آورید.

حل:

- تکیه‌گاه اضافی در B را برداشته و تغییر شکل‌ها را به دست می‌آوریم.
- عکس‌العمل تکیه‌گاه B را به عنوان نیروی مجهول در نظر گرفته و تغییر مکان در B را برابر صفر قرار می‌دهیم.



© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 9 - 25 of 29

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مسئله نمونه 9.8 (ادامه)

• بار گسترده: از جدول پیوست د داریم:

$$y = -\frac{w}{24EI} (x^4 - 2Lx^3 + L^3x)$$

$$(y_B)_w = -\frac{w}{24EI} \left[\left(\frac{2}{3}L \right)^4 - 2L \left(\frac{2}{3}L \right)^3 + L^3 \left(\frac{2}{3}L \right) \right]$$

$$= -0.01132 \frac{wL^4}{EI}$$

• بارگذاری عکس‌العمل اضافی: از مورد ۵ جدول پیوست د داریم:

$$(y_B)_R = \frac{R_B}{3EI} \left(\frac{2}{3}L \right)^2 \left(\frac{L}{3} \right)^2 = 0.01646 \frac{R_B L^3}{EI}$$

• برای سازگاری با تکیه‌گاه اصلی باید داشته باشیم: $y_B = 0$

$$0 = (y_B)_w + (y_B)_R = -0.01132 \frac{wL^4}{EI} + 0.01646 \frac{R_B L^3}{EI}$$

$$R_B = 0.688wL \uparrow$$

• از ایستایی داریم:

$$R_A = 0.271wL \uparrow \quad R_C = 0.0413wL \uparrow$$

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 9 - 26 of 29

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مسئله نمونه 9.8 (ادامه)

شیب در A:

$$(\theta_A)_w = -\frac{wL^3}{24EI} = -0.04167 \frac{wL^3}{EI}$$

$$(\theta_A)_R = \frac{0.0688wL}{6EI} \left[\left(\frac{L}{3} \right) \left[L^2 - \left(\frac{L}{3} \right)^2 \right] \right] = 0.03398 \frac{wL^3}{EI}$$

$$\theta_A = (\theta_A)_w + (\theta_A)_R = -0.04167 \frac{wL^3}{EI} + 0.03398 \frac{wL^3}{EI}$$

$$\theta_A = -0.00769 \frac{wL^3}{EI}$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

9 - 27 of 29

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

پیوست د: خیز و شیب تیرها

تیر و بارگذاری	معادله الاستیک	ماکزیمم خیز	شیب در انتها	معادله معینی الاستیک
1		$\frac{PL^3}{6EI}$	$\frac{PL^2}{2EI}$	$y = \frac{P}{6EI} (x^3 - 3Lx^2)$
2		$\frac{wL^4}{8EI}$	$\frac{wL^3}{6EI}$	$y = -\frac{w}{24EI} (x^4 - 4Lx^3 + 6L^2x^2)$
3		$\frac{ML^2}{2EI}$	$\frac{ML}{EI}$	$y = -\frac{M}{2EI} x^2$
4		$\frac{PL^3}{48EI}$	$\frac{PL^2}{16EI}$	$y = \frac{P}{48EI} (x^3 - 3Lx^2 + 2L^3x)$
5		$\frac{Pb(L^3-b^3)}{48EI}$	$\theta_A = \frac{Pb(L^2-b^2)}{16EI}$	$y = \frac{Pb}{48EI} [x^3 - (L^2-b^2)x]$
6		$\frac{5wL^4}{384EI}$	$\frac{wL^3}{96EI}$	$y = -\frac{w}{24EI} (x^4 - 4Lx^3 + 6L^2x^2)$
7		$\frac{ML^3}{48EI}$	$\theta_A = \frac{ML}{16EI}$	$y = -\frac{M}{48EI} (x^3 - 3Lx^2 + 2L^3x)$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

9 - 28 of 29

