

2.5- میدان‌های تانسوری از رنک (رتبه) های بالاتر (Tensor Fields of Higher Rank)

© M.H. Abolbashari, Ferdowsi University of Mashhad

میدان تانسور کوارینت از رنک ۲، t_{ij} :

$$(1) \quad \bar{t}_{ij}(\bar{\theta}^1, \bar{\theta}^2, \bar{\theta}^3) = t_{mn}(\theta^1, \theta^2, \theta^3) \frac{\partial \theta^m}{\partial \bar{\theta}^i} \frac{\partial \theta^n}{\partial \bar{\theta}^j}$$

میدان تانسور کنترارینت از رنک ۲، t^{ij} :

$$(2) \quad \bar{t}^{ij}(\bar{\theta}^1, \bar{\theta}^2, \bar{\theta}^3) = t^{mn}(\theta^1, \theta^2, \theta^3) \frac{\partial \bar{\theta}^i}{\partial \theta^m} \frac{\partial \bar{\theta}^j}{\partial \theta^n}$$

میدان تانسور مخلوط از رنک ۲، t_j^i :

$$(3) \quad \bar{t}_j^i(\bar{\theta}^1, \bar{\theta}^2, \bar{\theta}^3) = t_n^m(\theta^1, \theta^2, \theta^3) \frac{\partial \bar{\theta}^i}{\partial \theta^m} \frac{\partial \theta^n}{\partial \bar{\theta}^j}$$

اندیس‌های θ و $\bar{\theta}$ در عبارت‌های مشتق جزئی می‌تواند بالا θ^i و یا پایین $\bar{\theta}_j$ باشد.

تعمیم میدان‌های تانسوری به رنگ‌های بالاتر بی‌درنگ انجام می‌شود. بنابراین، ما کمیتی مانند $t_{\beta_1 \dots \beta_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_p}$ را یک میدان تانسوری از رنگ $r=p+q$ می‌نامیم، که کنتراورینت از رنگ p و کوارینت از رنگ q است، اگر مؤلفه‌های آن‌ها در دو سیستم مختصات به شکل زیر به هم مربوط باشند.

$$(4) \quad \bar{t}_{\beta_1 \dots \beta_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_p} = t_{m_1 \dots m_q}^{k_1 \dots k_p} \overbrace{\frac{\partial \bar{\theta}^{\alpha_1}}{\partial \theta^{k_1}} \dots \frac{\partial \bar{\theta}^{\alpha_p}}{\partial \theta^{k_p}}}^{p \text{ terms}} \cdot \overbrace{\frac{\partial \theta^{m_1}}{\partial \bar{\theta}^{\beta_1}} \dots \frac{\partial \theta^{m_q}}{\partial \bar{\theta}^{\beta_q}}}^{q \text{ terms}}$$

بنابراین، محل یک اندیس در مورد اینکه کنتراورینت یا کوارینت است مهم است.
نکته مهم:

اگر **مختصات کارتزین متعامد** باشد تفاوت بین اندیس بالا و پایین از بین می‌رود و همه اندیس‌ها طبق یک قرارداد همیشه پایین نوشته می‌شود. بار دیگر به این موضوع خواهیم پرداخت.

مثال ۱:

2.7 نشان دهید

اگر همه مؤلفه‌های یک تانسور در یک سیستم مختصات صفر باشند،
آنگاه آن مؤلفه‌ها در کلیه سیستم‌های مختصات که با آن سیستم مختصات یک به یک مربوط باشند نیز صفرند.

این اصل شاید **مهمترین خاصیت میدان‌های تانسوری** باشد.

اثبات:

می‌دانیم

$$(4) \quad \bar{t}_{\beta_1 \dots \beta_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_p} = t_{m_1 \dots m_q}^{k_1 \dots k_p} \frac{\partial \bar{\theta}^{\alpha_1}}{\partial \theta^{k_1}} \dots \frac{\partial \bar{\theta}^{\alpha_p}}{\partial \theta^{k_p}} \cdot \frac{\partial \theta^{m_1}}{\partial \bar{\theta}^{\beta_1}} \dots \frac{\partial \theta^{m_q}}{\partial \bar{\theta}^{\beta_q}}$$

پر واضح است که اگر مؤلفه‌های تانسوری مثلاً $t_{m_1 \dots m_q}^{k_1 \dots k_p}$ در یک سیستم مختصات صفر باشند، آنگاه با توجه به رابطه (4) همه مؤلفه‌های آن در سیستم مختصات دیگر یعنی $\bar{t}_{\beta_1 \dots \beta_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_p}$ صفر خواهند بود.

مثال ۲:

2.8 قضیه زیر را ثابت کنید:

جمع یا تفریق دو تانسور از یک نوع و رنگ (که تعداد اندیس‌های کوارینت و کنترارینت آن‌ها یکسان است)، تانسوری از همان نوع و رنگ خواهد بود.
بنابراین هر ترکیب خطی از تانسورهای با نوع و رنگ یکسان، تانسوری از همان نوع و رنگ خواهد بود.

فرض می‌کنیم که دو تانسور کوارینت از رنگ ۲ داریم:

$$\bar{t}_{ij} = t_{kl} \frac{\partial \theta_k}{\partial \bar{\theta}_i} \frac{\partial \theta_l}{\partial \bar{\theta}_j} \quad \bar{s}_{ij} = s_{kl} \frac{\partial \theta_k}{\partial \bar{\theta}_i} \frac{\partial \theta_l}{\partial \bar{\theta}_j}$$

از جمع (تفریق) دو تانسور داریم:

$$\bar{t}_{ij} \pm \bar{s}_{ij} = \frac{\partial \theta_k}{\partial \bar{\theta}_i} \frac{\partial \theta_l}{\partial \bar{\theta}_j} (t_{kl} \pm s_{kl})$$

از این رابطه ثابت می‌شود که هر ترکیب خطی از تانسورهای فوق، خود تانسوری از همان نوع و رنگ است.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

5/47

مثال ۳: 2.9 : قضیه: فرض کنید $A_{\alpha_1 \dots \alpha_r}^{\beta_1 \dots \beta_s}$ و $B_{\alpha_1 \dots \alpha_r}^{\beta_1 \dots \beta_s}$ تانسور باشند. معادله

$$A_{\alpha_1 \dots \alpha_r}^{\beta_1 \dots \beta_s}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) = B_{\alpha_1 \dots \alpha_r}^{\beta_1 \dots \beta_s}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$$

نیز یک معادله تانسوری است. یعنی اگر این معادله تانسوری در یک سیستم مختصات برقرار باشد، آنگاه در همه مختصات که یک به یک به هم مربوط باشند نیز برقرار است.

راهنمایی: از نتایج مسائل قبل استفاده کنید.

اگر طرفین رابطه فوق را در $\frac{\partial \theta^{\alpha_1}}{\partial \bar{\theta}^{k_1}} \dots \frac{\partial \theta^{\alpha_r}}{\partial \bar{\theta}^{k_r}} \frac{\partial \bar{\theta}^{l_1}}{\partial \theta^{\beta_1}} \dots \frac{\partial \bar{\theta}^{l_s}}{\partial \theta^{\beta_s}}$ ضرب کنیم، داریم:

$$A_{\alpha_1 \dots \alpha_r}^{\beta_1 \dots \beta_s} \frac{\partial \theta^{\alpha_1}}{\partial \bar{\theta}^{k_1}} \dots \frac{\partial \theta^{\alpha_r}}{\partial \bar{\theta}^{k_r}} \frac{\partial \bar{\theta}^{l_1}}{\partial \theta^{\beta_1}} \dots \frac{\partial \bar{\theta}^{l_s}}{\partial \theta^{\beta_s}} = B_{\alpha_1 \dots \alpha_r}^{\beta_1 \dots \beta_s} \frac{\partial \theta^{\alpha_1}}{\partial \bar{\theta}^{k_1}} \dots \frac{\partial \theta^{\alpha_r}}{\partial \bar{\theta}^{k_r}} \frac{\partial \bar{\theta}^{l_1}}{\partial \theta^{\beta_1}} \dots \frac{\partial \bar{\theta}^{l_s}}{\partial \theta^{\beta_s}}$$

از این رابطه ثابت می‌شود که معادله تانسوری فوق در سیستم $\bar{\theta}$ نیز صادق است.

راه دیگر: عبارت فوق را به شکل $A-B=0$ می‌نویسیم. آن‌گاه استدلال می‌کنیم که تفاضل دو تانسور نیز تانسور است و بر اساس اصل صفر بودن مؤلفه‌ها در یک سیستم مختصات، که در سیستم‌های دیگر نیز صفرند، ثابت می‌شود که: $\bar{A}_{k_1 \dots k_r}^{l_1 \dots l_s} - \bar{B}_{k_1 \dots k_r}^{l_1 \dots l_s} = 0$ یا: $\bar{A}_{k_1 \dots k_r}^{l_1 \dots l_s} = \bar{B}_{k_1 \dots k_r}^{l_1 \dots l_s}$

2.6- چند تانسور ویژه مهم Some Important Special Tensors

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

اگر کرانکر دلتا و پرموتیشن سیمبل که در بخش 2.1 معرفی شدند را به عنوان مؤلفه‌های تانسورهای کوارینت، کنتراورینت و مخلوط از رنک ۲ و ۳ در مختصات کارتزین متعامد x_1, x_2, x_3 تعریف (فرض) کنیم:

$$(1) \quad \delta_{ij} = \delta^{ij} = \delta_j^i = \delta_i^j = \begin{cases} 0 & \text{when } i \neq j \\ 1 & \text{when } i = j, j \text{ not summed,} \end{cases}$$

اگر "j not summed" را نگذاریم چه مشکلی پیش می‌آید؟

$$(2) \quad e_{ijk} = e^{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{when any two indices are equal,} \\ 1 & \text{when } i, j, k \text{ permute like } 1, 2, 3, \\ -1 & \text{when } i, j, k \text{ permute like } 1, 3, 2, \end{cases}$$

$\delta_{jj} = 3$

می‌خواهیم ببینیم مؤلفه‌های آن‌ها در سیستم مختصات عمومی θ^i چیست؟ پاسخ را می‌توان بی‌درنگ با استفاده از قوانین انتقال تانسورها به دست آورد. بنابراین:

$$(3) \quad g_{ij} = \frac{\partial x^m}{\partial \theta^i} \frac{\partial x^n}{\partial \theta^j} \delta_{mn} = \frac{\partial x^m}{\partial \theta^i} \frac{\partial x^m}{\partial \theta^j}$$

تانسور متریک اقلیدسی (که قبلاً در محاسبه تانسور متریک اسوشیتد مجذور طول معرفی شد).

$$(4) \quad g^{ij} = \frac{\partial \theta^i}{\partial x^m} \frac{\partial \theta^j}{\partial x^n} \delta^{mn} = \frac{\partial \theta^i}{\partial x^m} \frac{\partial \theta^j}{\partial x^m}$$

(Associated metric tensor) به عنوان مثال در سیستم مختصات استوانه‌ای (r, θ, z) داریم:

$$(5) \quad g_j^i = \frac{\partial \theta^i}{\partial x^m} \frac{\partial x^n}{\partial \theta^j} \delta_n^m = \frac{\partial \theta^i}{\partial x^m} \frac{\partial x^m}{\partial \theta^j} = \delta_j^i \quad \begin{cases} i=j=1 & \left\{ \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial r}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial r}{\partial r} = 1 \right. \\ i=1, j=2 & \left\{ \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial r}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial r}{\partial \theta} = 0 \right. \end{cases}$$



یادآور می‌شود که تانسور مخلوط g_j^i معادل δ_j^i است و در کلیه سیستم‌های مختصات ثابت است.

$$(6) \quad \varepsilon_{ijk} = \frac{\partial x^r}{\partial \theta^i} \frac{\partial x^s}{\partial \theta^j} \frac{\partial x^t}{\partial \theta^k} e_{rst} = e_{ijk} \left| \frac{\partial x^m}{\partial \theta^n} \right| = e_{ijk} \sqrt{g} \quad \text{تانسور پرموتیشن}$$

$$(7) \quad \varepsilon^{ijk} = \frac{\partial \theta^i}{\partial x^r} \frac{\partial \theta^j}{\partial x^s} \frac{\partial \theta^k}{\partial x^t} e^{rst} = e^{ijk} \left| \frac{\partial \theta^m}{\partial x^n} \right| = \frac{e^{ijk}}{\sqrt{g}} \quad \text{تانسور آلترناتور}$$

که در آن g مقدار دترمینان $|g_{ij}|$ است و در هر سیستم مختصات سره مثبت است، یعنی:

$$(8) \quad g = |g_{ij}| > 0$$

می‌بینیم که تعمیم مناسب کرانکر دلتا، **تانسورهای متریک اقلیدسی** و پرموتیشن سیمبل، **تانسورهای پرموتیشن (permutation tensors)** ε_{ijk} یا **آلترناتورها** ε^{ijk} است. همچنان که در معادلات (6) و (7) تعریف شدند، مؤلفه‌های ε_{ijk} و ε^{ijk} در مختصات عمومی مقادیر 1، -1 یا 0 ندارند و مقدارشان به ترتیب $(\sqrt{g}, -\sqrt{g}, 0)$ و $(1/\sqrt{g}, -1/\sqrt{g}, 0)$ است.

9/47

$$\text{از معادلات (3)} \quad g_{ij} = \frac{\partial x^m}{\partial \theta^i} \frac{\partial x^n}{\partial \theta^j} \delta_{mn} = \frac{\partial x^m}{\partial \theta^i} \frac{\partial x^m}{\partial \theta^j}$$

$$\text{و (4)} \quad g^{ij} = \frac{\partial \theta^i}{\partial x^m} \frac{\partial \theta^j}{\partial x^n} \delta^{mn} = \frac{\partial \theta^i}{\partial x^m} \frac{\partial \theta^j}{\partial x^m}$$

می‌بینیم که

$$(9) \quad g_{im} g^{mj} = \frac{\partial x^n}{\partial \theta^i} \frac{\partial x^n}{\partial \theta^m} \frac{\partial \theta^m}{\partial x^k} \frac{\partial \theta^j}{\partial x^k} = \frac{\partial x^n}{\partial \theta^i} \delta_k^n \frac{\partial \theta^j}{\partial x^k} = \frac{\partial x^k}{\partial \theta^i} \frac{\partial \theta^j}{\partial x^k} = \delta_i^j$$

بنابراین، مقدار دترمینان آن ۱ است.

$$|g_{im} g^{mj}| = |g_{ij}| \cdot |g^{ij}| = |\delta_j^i| = 1$$

این رابطه اندیسی نیست زیرا در طرف چپ i و j اندیس آزادند و در جمله بعد دامی! اصولاً دترمینان‌ها نوعی نمایش روابط هستند که قوانین تانسوری را برنمی‌تابند.

10/47

با استفاده از (3) و (4) داریم:

$$(10) \quad g = |g_{ij}| = \left| \frac{\partial x^i}{\partial \theta^j} \right|^2$$

$$\frac{1}{g} = |g^{ij}| = \left| \frac{\partial \theta^i}{\partial x^j} \right|^2$$

از آنجا که g مثبت است، معادله (9) را می‌توان حل کرد. داریم:

$$(11) \quad g^{ij} = \frac{D^{ij}}{g}$$

که D^{ij} کوفکتور (cofactor) g_{ij} در دترمینان g است.

$$D^{11} = \begin{vmatrix} g_{22} & g_{23} \\ g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} \quad g = |g_{ij}| = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} \quad \text{به عنوان مثال:}$$

تانسور g^{ij} را تانسور متریک اسوشیتد (Associated metric tensor) می‌گویند و مانند تانسور متریک در توسعه تحلیل تانسوری مهم است.

تانسورهای نسبی

دقت شود که δ_{ij} و e_{ijk} را مؤلفه‌های کوارینت و δ^{ij} و e^{ijk} را مؤلفه‌های کنترارینت تانسوری تعریف کردیم ولی آن‌ها تانسور نیستند (از قانون انتقال تانسورها تبعیت نمی‌کنند). یعنی نمی‌توان آن‌ها را مثلاً به سیستم $\bar{x}$ منتقل کرد ($\bar{\delta}_{ij}$ و $\bar{e}_{ijk}$ نداریم). فقط معادل آن‌ها در سیستم مختصات عمومی را تعریف می‌کنیم.

در واقع بر اساس آنچه بعداً خواهیم دید e_{ijk} و e^{ijk} با توجه به رابطه
نسبی از وزن (۱) و (۱-) اند و یک انتقال خاصی دارند.

از طرف دیگر e و δ مقادیر ثابتی‌اند و به مختصات بستگی ندارند.

مسئله زیر را حل کرده و تا دو هفته دیگر تحویل فرمایید:

2) 10

2.10. Prove Eqs. (6), (7) and (10). Write down explicitly D^{ij} in Eq. (11) in terms of $g_{11}, g_{12}, \dots, g_{33}$.

2) 1,2,5,6

تمرین های قبلی:

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

2.7- اهمیت ویژگی های تانسورها (The Significance of Tensor Characteristics)

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

یک معادله در صورتی می‌تواند در کلیه سیستم‌های مختصات معتبر باشد که هر جمله آن تانسورهایی با ویژگی‌های (رنگ و نوع) یکسان باشند.

بنابراین، تحلیل تانسوری مانند تحلیل ابعادی (dimensional analysis) در رابطه‌سازی روابط فیزیکی مهم است.

تحلیل ابعادی بر اساس این اصل استوار است که یک قانون فیزیکی باید مستقل از واحد سنجش متغیرهای فیزیکی باشد.

تحلیل ابعادی چگونگی تغییرات یک کمیت فیزیکی را بر اساس انتخاب خاصی از واحدهای اساسی (طول، جرم و زمان) مشخص می‌کند:

- دو کمیت فیزیکی در صورتی می‌توانند برابر باشند که ابعاد (دیمانسیون) یکسانی داشته باشند؛
- معادلات فیزیکی در صورتی صحیح‌اند که با تغییر واحد کمیت‌های فیزیکی (مثلاً از متریک به انگلیسی) تغییر نکنند.

تصمیم اینکه یک کمیت فیزیکی تانسور است یا نیست با فیزیکدان است. این که نیرو و تنش را کمیات تانسوری در نظر می‌گیرند قضاوت آن‌هاست زیرا با واقعیت آن سازگار است.

15/47

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

تفاوت کنتراورینس (contravariance) (اندیس بالا) و کوارینس (covariance) (اندیس پایین)

چرا قوانین انتقال تانسورها با فیزیک سازگار است؟ زیرا تحلیل تانسوری این گونه طراحی شده است. به عنوان مثال، تانسور رنگ یک مطابق با مفهوم فیزیکی بردار تعریف شده است. تنها نکته جدید شاید تفاوت بین کنتراورینس و کوارینس باشد.

در فیزیک مقدماتی قوانین طبیعی معمولاً در مختصات کارتزین متعامد مطالعه می‌شوند که در آن تفاوت بین کنتراورینس و کوارینس از بین می‌رود.

هنگامی که در فیزیک مقدماتی از مختصات منحنی‌الخط استفاده می‌شود، مؤلفه‌های برداری باید در هر حالت خاصی به طور مشخص تعریف شوند و افزون بر آن، بیان ریاضی قوانین فیزیکی برای هر سیستم مختصات باید مجدداً به دست آورده شوند. این کار معمولاً بسیار پرزحمت است.

اما آنچه با تعریف تانسورها به دست می‌آید یک راه یکپارچه‌ای است که برای هر سیستم مختصات اعم از متعامد و غیر متعامد مناسب است. هزینه این سهولت، تفاوت قائل شدن بین کنتراورینس و کوارینس است.

16/47

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

2.8- تانسورهای کارتزین متعامد (Rectangular Cartesian Tensors)

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

دیدیم که باید بین قوانین انتقال تانسورهای کنتراورینت و کوارینت تفاوت قائل شد. اما اگر انتقال بین دو سیستم مختصات کارتزین متعامد باشد تفاوت بین کنتراورینس و کوارینس از بین می‌رود.

اگر x_1, x_2, x_3 و $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ دو سیستم مختصات کارتزین متعامد باشند، قانون انتقال عبارت است از:

$$(1) \quad \bar{x}_i = \beta_{ij} x_j + a_i,$$

که در آن a_1, a_2, a_3 اعداد ثابت‌اند و β_{ij} ها کسینوس دایرکتوری زوایای بردارهای یکه در امتداد محورهای $\bar{x}_i$ و x_j اند.

$$(2) \quad \beta_{21} = \cos(\bar{x}_2, x_1)$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

18/47

انتقال معکوس عبارت است از: ترتیب محورها در یک زاویه می تواند عوض شود.

$$(3) \quad x_i = \cos(x_i, \bar{x}_j) \bar{x}_j + b_i = \cos(\bar{x}_j, x_i) \bar{x}_j + b_i$$

$$= \beta_{ji} \bar{x}_j + b_i,$$

or $x_k = \beta_{ik} \bar{x}_i + b_k$

بنابراین: مشتق می گیریم $\bar{x}_i = \beta_{ik} x_k + a_i$ (1)

$$(4) \quad \frac{\partial x_k}{\partial \bar{x}_i} = \beta_{ik} = \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_k}$$

و تفاوت بین قوانین انتقال زیر

$$(2.4:2) \quad \bar{\zeta}^i(\bar{\theta}^1, \bar{\theta}^2, \bar{\theta}^3) = \zeta^k(\theta^1, \theta^2, \theta^3) \frac{\partial \bar{\theta}^i}{\partial \theta^k}$$

و

$$(2.4:4) \quad \bar{\eta}_i(\bar{\theta}^1, \bar{\theta}^2, \bar{\theta}^3) = \eta_k(\theta^1, \theta^2, \theta^3) \frac{\partial \theta^k}{\partial \bar{\theta}^i}$$

از بین می رود.

رابطه بین a و b :

$$b_i = x_i - \beta_{ji} \bar{x}_j = x_i - \beta_{ji} (\beta_{jk} x_k + a_j) = x_i - \beta_{ji} \beta_{jk} x_k - \beta_{ji} a_j$$

$$= x_i - \delta_{ik} x_k - \beta_{ji} a_j = x_i - x_i - \beta_{ji} a_j = -\beta_{ji} a_j$$

این رابطه در کتاب باید تصحیح شود.

19/47

مؤلفه های یک بردار در دو سیستم مختصات کارتزین متعامد به شکل زیر به هم مربوط می شوند.

$$\bar{\eta}_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = \beta_{ij} \eta_j(x_1, x_2, x_3)$$

و مؤلفه های یک تانسور از رنک دو نیز به شکل زیر به هم مربوط می شوند.

$$\bar{\zeta}_{ij}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = \beta_{ik} \beta_{js} \zeta_{ks}(x_1, x_2, x_3)$$

این رابطه در کتاب باید تصحیح شود.

هنگامی که تنها سیستم های مختصات کارتزین متعامد مورد نظر باشند، همه اندیس ها را پایین می نویسیم. این کار در تمامی مباحث درسی دنبال می شود.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

20/47

جدول مقایسه‌ای چند تعریف ریاضی

نمایش برداری و اندیسی

توسعه جدول ارائه شده در مسئله ۲.۳۲ کتاب

(A first Course in Continuum Mechanics by Fung, 1977)

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

مقدمه: بردارهای یکه

• تعریف بردار و مؤلفه‌های آن بر حسب بردارهای یکه:

$$\vec{V} = \vec{e}_1 v_1 + \vec{e}_2 v_2 + \vec{e}_3 v_3$$

$$\vec{V} = \vec{e}_x v_x + \vec{e}_y v_y + \vec{e}_z v_z = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} \quad \text{کارتزین: } (x, y, z)$$

$$\vec{V} = \vec{e}_r v_r + \vec{e}_\theta v_\theta + \vec{e}_z v_z = \vec{e}_r v^r + \vec{e}_\theta v^\theta + \vec{e}_z v^z \quad \text{استوانه‌ای: } (r, \theta, z)$$

$$\vec{V} = \vec{e}_r v_r + \vec{e}_\phi v_\phi + \vec{e}_\theta v_\theta = \vec{e}_r v^r + \vec{e}_\phi v^\phi + \vec{e}_\theta v^\theta \quad \text{کروی: } (r, \phi, \theta)$$

(x, y, z, r, \theta and \phi are not summed)

این مؤلفه‌ها را مؤلفه‌های **فیزیکی** می‌گویند و دیمانسیون فیزیکی آن‌ها یکی است. به عنوان مثال اگر $\vec{V}$ بردار سرعت باشد و واحد آن m/s، واحد همه آن مؤلفه‌ها m/s است. از طرفی اندیس آن‌ها را به دلخواه می‌توان بالا یا پایین نوشت (زیرا تانسور نیستند که محل اندیس در آن‌ها مهم باشد).

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

22/47

بردارهای مبنا

- تعریف بردار و مؤلفه‌های آن بر حسب بردارهای مبنا (در اسلایدهای بعد به طور مشروح تعریف خواهد شد):

$$\begin{aligned}\vec{U} &= \vec{e}_x u_x + \vec{e}_y u_y + \vec{e}_z u_z = u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k} & \text{کارتزین: } (x, y, z) \\ \vec{U} &= \vec{g}_r u^r + \vec{g}_\theta u^\theta + \vec{g}_z u^z = \vec{g}^r u_r + \vec{g}^\theta u_\theta + \vec{g}^z u_z & \text{استوانه‌ای: } (r, \theta, z) \\ \vec{U} &= \vec{g}_r u^r + \vec{g}_\phi u^\phi + \vec{g}_\theta u^\theta = \vec{g}^r u_r + \vec{g}^\phi u_\phi + \vec{g}^\theta u_\theta & \text{کروی: } (r, \phi, \theta)\end{aligned}$$

(x, y, z, r, \theta and \phi are not summed)

این مؤلفه‌ها (اعم از کوارینت یا کنترارینت) را مؤلفه‌های **تانسوری** می‌گویند و دیمانسیون فیزیکی آن‌ها ممکن است متفاوت باشد ولی همه تانسورند.

$\vec{g}^r$ و $\vec{g}_r$ بردارهای مشابه آن را به ترتیب **بردارهای مبنای کنترارینت و بردارهای مبنای کوارینت** می‌نامند و مقدار آن‌ها یک نیست و از روابط زیر محاسبه می‌شوند.

$$|\vec{g}_r| = \sqrt{g_{rr}}, \quad |\vec{g}^r| = \sqrt{g^{rr}}, \quad , \quad r \text{ not summed.}$$

Vectors and Tensors (p 515)

در **مختصات استوانه‌ای** (r, θ, z) ، یک بردار مانند $\vec{V}$ را می‌توان بر حسب **بردارهای مبنای یک‌ه متعامد** $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ به شکل زیر نوشت:

$$\vec{V} = \vec{e}_r v_r + \vec{e}_\theta v_\theta + \vec{e}_z v_z \quad (r, \theta \text{ and } z \text{ are not summed})$$

در اینجا (v_r, v_θ, v_z) مؤلفه‌های **فیزیکی** بردار $\vec{V}$ اند و نه مؤلفه‌های **تانسوری** آن (بخش 2.14 را ببینید) زیرا $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ **بردارهای یک‌ه‌اند**. **بردارهای مبنای یک‌ه** مختصات استوانه‌ای با **بردارهای مبنای یک‌ه** مختصات کارتزین $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ به شکل زیر به هم مربوط می‌شوند.

$$\vec{e}_r = \vec{e}_1 \cos \theta + \vec{e}_2 \sin \theta \quad \vec{e}_\theta = -\vec{e}_1 \sin \theta + \vec{e}_2 \cos \theta \quad \vec{e}_z = \vec{e}_3$$

این مؤلفه‌ها را بعد از معرفی **بردارهای مبنا** و **مؤلفه فیزیکی** به دست می‌آوریم. مختصات دو سیستم به شکل زیر به هم مربوط می‌شوند.

$$x_1 = x = r \cos \theta \quad x_2 = y = r \sin \theta \quad x_3 = z$$

Vectors and Tensors(p 515)

در مختصات کروی، بردارهای مبنای $(\vec{e}_r, \vec{e}_\phi, \vec{e}_\theta)$ با بردارهای مبنای $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ یک به یک مختصات کارتزین به شکل زیر به هم مربوط می‌شوند.

$$\vec{e}_r = (\vec{e}_1 \cos \theta + \vec{e}_2 \sin \theta) \sin \phi + \vec{e}_3 \cos \phi$$

$$\vec{e}_\phi = (\vec{e}_1 \cos \theta + \vec{e}_2 \sin \theta) \cos \phi - \vec{e}_3 \sin \phi$$

$$\vec{e}_\theta = -\vec{e}_1 \sin \theta + \vec{e}_2 \cos \theta$$

مختصات (r, ϕ, θ) و (x_1, x_2, x_3) به شکل زیر به هم مربوط می‌شوند.

$$x_1 = x = r \sin \phi \cos \theta \quad x_2 = y = r \sin \phi \sin \theta \quad x_3 = z = r \cos \phi$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

25/47

Conversion between Cartesian, cylindrical, and spherical coordinates^[3]

		From		
		Cartesian	Cylindrical	Spherical
To	Cartesian (x, y, z)	$x = x$ $y = y$ $z = z$	$x = \rho \cos \varphi$ $y = \rho \sin \varphi$ $z = z$	$x = r \sin \theta \cos \varphi$ $y = r \sin \theta \sin \varphi$ $z = r \cos \theta$
	Cylindrical (ρ, φ, z)	$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ $z = z$	$\rho = \rho$ $\varphi = \varphi$ $z = z$	$\rho = r \sin \theta$ $\varphi = \varphi$ $z = r \cos \theta$
	Spherical (r, θ, φ)	$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ $\theta = \arctan\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right)$ $\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$	$r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$ $\theta = \arctan\left(\frac{\rho}{z}\right)$ $\varphi = \varphi$	$r = r$ $\theta = \theta$ $\varphi = \varphi$

به نام متغیرها توجه شود که با اسلایدهای قبل متفاوت است.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

26/47

نمایش برداری	نمایش اندیسی		مرتبه تانسور (تعداد اندیس‌های آزاد)	نام (نمایش در کارت‌زین)
	مختصات کارت‌زین	مختصات عمومی		
$\vec{V}$	مؤلفه فیزیکی v_i or مؤلفه تانسوری $v_i \vec{e}_i$	$v_i \vec{g}^i$ or $v^i \vec{g}_i$	1	Vector
$\lambda = \vec{U} \cdot \vec{V}$	$\lambda = u_i v_i$ $= u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$	$u_i v_i$ or $u^i v_i$	0	Dot product
$\vec{W} = \vec{U} \times \vec{V}$	$w_i = \epsilon_{ijk} u_j v_k$	$\epsilon^{ijk} u_j v_k \vec{g}_i$ or $\epsilon_{ijk} u_j v_k \vec{g}^i$	1	Vector product
$\text{grad } \phi = \vec{\nabla} \phi$	$\frac{\partial \phi}{\partial x_i}$ or $\vec{e}_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i}$	$\vec{g}^r \frac{\partial \phi}{\partial \theta^r}$	1	$\vec{\nabla}$: nabla or del: Gradient of scalar field
$\text{grad } \vec{V} = \vec{\nabla} \vec{V}$	این علامت اختصاری را برای مشتق در مختصات کارت‌زین در آینده تعریف می‌کنیم. $\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \equiv v_{i,j}$	مشتق کوارینت یک بردار که در آینده تعریف می‌کنیم. $v^i _j$ or $v_i _j$	2	Vector gradient $[\vec{\nabla} \vec{V}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$

نمایش برداری (ادامه)	نمایش اندیسی		مرتبه تانسور (تعداد اندیس‌های آزاد)	نام (نمایش در کارت‌زین)
	مختصات کارت‌زین	مختصات عمومی		
$\text{div } \vec{V} = \vec{\nabla} \cdot \vec{V}$	$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = v_{i,i}$ $= v_{x,x} + v_{y,y} + v_{z,z}$	$v^i _i$ or $v_i _i$	0	divergence
$\text{curl } \vec{V} = \vec{\nabla} \times \vec{V}$	$\epsilon_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} = \epsilon_{ijk} v_{k,j}$	$\epsilon^{ijk} v^k _j \vec{g}_i$ or $\epsilon_{ijk} v_k _j \vec{g}^i$	1	Curl $\vec{\nabla} \times \vec{V} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$
$\nabla^2 \vec{V} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \vec{V} = \Delta \vec{V}$	$\frac{\partial}{\partial x_i} (\frac{\partial v_j}{\partial x_i}) = \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i \partial x_i} = v_{j,ii}$	$v^j _{ki} \vec{g}^{ik}$ or $v_j _{ki} \vec{g}_{ik}$	1	Laplacian $\nabla^2 \vec{V} = (\nabla^2 V_x, \nabla^2 V_y, \nabla^2 V_z)$ $\nabla^2 V_x = \frac{\partial^2}{\partial x^2} V_x + \frac{\partial^2}{\partial y^2} V_x + \frac{\partial^2}{\partial z^2} V_x$
$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) \neq \nabla^2 \vec{V}$	$\frac{\partial}{\partial x_i} (\frac{\partial v_j}{\partial x_j}) = \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i \partial x_j} = v_{j,ij}$	$v^j _{kj} \vec{g}^{ki}$ or $v_j _{kj} \vec{g}_{ki}$	1	Gradient of divergence of $\vec{V}$

- O1** توجه شود که اگر در نمایش یک بردار مولفه‌هایی در بردارهای یکه ضرب شوند، آنها مولفه‌های فیزیکی هستند. ها بردارهای مبنا (و نه یکه) هستند و مولفه‌های بردار مولفه‌های تانسوری اند $g_{\mu\nu}$ ولی در اینجا $OliveSoft \ 28/10/2016$:

اپراتور دل $\vec{\nabla}$ (۵۱۷)

بردارهای یکه

• در کارتزین $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \vec{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \vec{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \vec{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

• در استوانه‌ای $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$

$$\vec{\nabla} = \vec{g}^r \frac{\partial}{\partial r} = \vec{g}^1 \frac{\partial}{\partial \theta^1} + \vec{g}^2 \frac{\partial}{\partial \theta^2} + \vec{g}^3 \frac{\partial}{\partial \theta^3}$$

$$= \sqrt{g^{11}} \frac{\vec{g}^1}{\sqrt{g^{11}}} \frac{\partial}{\partial \theta^1} + \sqrt{g^{22}} \frac{\vec{g}^2}{\sqrt{g^{22}}} \frac{\partial}{\partial \theta^2} + \sqrt{g^{33}} \frac{\vec{g}^3}{\sqrt{g^{33}}} \frac{\partial}{\partial \theta^3}$$

$$= \sqrt{g^{11}} \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \sqrt{g^{22}} \vec{e}_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \sqrt{g^{33}} \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\vec{e}_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

$$g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

• در کروی $(\vec{e}_r, \vec{e}_\phi, \vec{e}_\theta)$

$$\vec{\nabla} = \vec{g}^r \frac{\partial}{\partial r} = \sqrt{g^{11}} \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \sqrt{g^{22}} \vec{e}_\phi \frac{\partial}{\partial \phi} + \sqrt{g^{33}} \vec{e}_\theta \frac{\partial}{\partial \theta}$$

$$= \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\vec{e}_\phi}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{\vec{e}_\theta}{r \sin \phi} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

$$g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2 \phi} \end{pmatrix}$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

29/47

 ∇^2 در سیستم مختصات مختلف (مسئله ۲.۲۲ و ۲۳)

بردارهای یکه

• در کارتزین $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

• در استوانه‌ای $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

• در کروی $(\vec{e}_r, \vec{e}_\phi, \vec{e}_\theta)$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\sin \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{\sin^2 \phi} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right]$$

در اسلایدهای بعدی که مشتق کوارینت تعریف شد این اپراتور را به دست می‌آوریم.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

30/47

طرفین یک معادله تانسوری را می‌توان در یک کمیت با اندیس آزاد ضرب کرد.

$$s_\alpha = a_{\alpha\beta} \bar{s}_\beta$$

مثال ۱:

هر چند که با ضرب c_α بردار s_α تبدیل به اسکالر شده (در اینجا منظور بدون اندیس آزاد شده) ولی معادله از نظر عملیات اندیسی صحیح است.

$$c_\alpha s_\alpha = a_{\alpha\beta} \bar{s}_\beta c_\alpha$$

$$c_\alpha s_\alpha = a_{\alpha\beta} \bar{s}_\beta c_\alpha$$

$$\bar{s}_{\alpha\gamma} = \beta_{\alpha\mu} \beta_{\gamma\lambda} \sigma_{\mu\lambda}$$

مثال ۲:

$$\beta_{\alpha\omega} \beta_{\gamma\tau} \bar{s}_{\alpha\gamma} = \beta_{\alpha\mu} \beta_{\gamma\lambda} \sigma_{\mu\lambda} \beta_{\alpha\omega} \beta_{\gamma\tau} = \delta_{\mu\omega} \delta_{\lambda\tau} \sigma_{\mu\lambda} = \delta_{\lambda\tau} \sigma_{\omega\lambda} = \sigma_{\omega\tau}$$

مهم: دقت شود که محل اندیس غیر مشترک (ω) نباید تغییر کند.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

31/47

مثال ۳: ثابت کنید در سیستم مختصات کارتزین متعامد:

$$\text{curl curl } \vec{V} = \text{grad div } \vec{V} - \Delta \vec{V}$$

حل: می‌دانیم

$$\text{curl } \vec{V} = \vec{\nabla} \times \vec{V} \text{ or } e_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j}$$

بنابراین:

$$\text{curl curl } \vec{V} = e_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} (e_{klm} \frac{\partial v_m}{\partial x_l})$$

$$= e_{ijk} e_{klm} \frac{\partial^2 v_m}{\partial x_j \partial x_l} = e_{kij} e_{klm} \frac{\partial^2 v_m}{\partial x_j \partial x_l} = (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \frac{\partial^2 v_m}{\partial x_j \partial x_l}$$

$$= \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_j \partial x_i} - \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} (\frac{\partial v_j}{\partial x_j}) - \frac{\partial}{\partial x_j} (\frac{\partial v_i}{\partial x_j})$$

$$= \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) - \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \vec{V} = \text{grad div } \vec{V} - \Delta \vec{V}$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

32/47

مثال ۴: اگر $\vec{r}$ بردار حامل نقطه‌ای غیر مشخص در سیستم مختصات کارتزین متعامد باشد و مقدار این بردار r باشد، نشان دهید:

$$\text{div}(r^n \vec{r}) = (n+3)r^n$$

حل: فرض می‌کنیم مؤلفه‌های $\vec{r}$, $x_i (i=1,2,3)$ باشد.

$$\text{div} \vec{r} = \vec{\nabla} \cdot \vec{r} = \frac{\partial x_i}{\partial x_i} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$$

$$r^2 = x_i x_i$$

و

$$2r \frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} (x_j x_j) \quad \text{از طرفین رابطه فوق مشتق می‌گیریم:}$$

$$= x_j \frac{\partial x_j}{\partial x_i} + x_j \frac{\partial x_j}{\partial x_i} = 2x_j \delta_{ij} = 2x_i \quad \text{یا} \quad 2r \frac{\partial r}{\partial x_i} = 2x_i \rightarrow \frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r}$$

$$\begin{aligned} \text{div}(r^n \vec{r}) &= \vec{\nabla} \cdot (r^n \vec{r}) = \frac{\partial}{\partial x_i} (r^n x_i) = r^n \frac{\partial x_i}{\partial x_i} + x_i \frac{\partial r^n}{\partial x_i} \\ &= 3r^n + x_i (nr^{n-1} \frac{\partial r}{\partial x_i}) = 3r^n + x_i (nr^{n-1} \frac{x_i}{r}) \\ &= 3r^n + nr^{n-2} x_i x_i = 3r^n + nr^{n-2} r^2 = 3r^n + nr^n = (3+n)r^n \end{aligned}$$

بنابراین:

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

33/47

چند رابطه مهم در تانسورها

$$\delta_{ii} = 3$$

$$\delta_{ij} \delta_{ij} = 3$$

$$\delta_{ij} \delta_{ik} \delta_{jk} = 3$$

$$e_{ijk} e_{kij} = e_{kij} e_{kij} = \delta_{ii} \delta_{jj} - \delta_{ij} \delta_{ji} = 3 \times 3 - \delta_{jj} = 9 - 3 = 6$$

$$e_{ijk} A_j A_k = 0$$

ضرب خارجی یک بردار در خودش

$$\vec{e}_i \times \vec{e}_j = e_{ijk} \vec{e}_k$$

ضرب خارجی دو بردار یک‌ه

دو بردار $\vec{a} = a_i \cdot \vec{e}_i$ و $\vec{b} = b_i \cdot \vec{e}_i$ را در نظر بگیرید.

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_i \vec{e}_i) \times (b_j \vec{e}_j) = a_i b_j (\vec{e}_i \times \vec{e}_j) = a_i b_j e_{ijk} \vec{e}_k$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

34/47

مسائل زیر را حل کرده و تا دو هفته دیگر تحویل فرمایید:

A1-A12

این مسائل در سایت آموزش مجازی قابل دسترسی است.

2) 1,2,5,6,10

تمرین‌های قبلی:

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

2.32. In cylindrical coordinates with unit base vectors $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z)$, a vector $\mathbf{u}$ and its gradient, gradient transpose and divergent are, respectively,

$$\mathbf{u} = u_r \mathbf{e}_r + u_\theta \mathbf{e}_\theta + u_z \mathbf{e}_z, \quad \text{Gradient of a vector field and not Vector gradient}$$

$$\nabla \mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \mathbf{e}_z, \quad (\nabla \mathbf{u})^T = \mathbf{e}_r \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r} + \frac{\mathbf{e}_\theta}{r} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \theta} + \mathbf{e}_z \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z},$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \mathbf{e}_r \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r} + \frac{\mathbf{e}_\theta}{r} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \theta} + \mathbf{e}_z \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial r u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z}.$$

در اسلاید بعد به دست می‌آوریم.

Show that, $\nabla \cdot (\nabla \mathbf{u}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \frac{\mathbf{e}_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} (\nabla \cdot \mathbf{u})$ in general, and for cylindrical coordinates,

$$\nabla \cdot (\nabla \mathbf{u}) = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \frac{\mathbf{e}_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} (\nabla \cdot \mathbf{u}),$$

$$\nabla \cdot (\nabla \mathbf{u})^T = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r} \right) + \frac{\mathbf{e}_\theta}{r^2} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2}.$$

چگونگی به دست آوردن مؤلفه فیزیکی از مؤلفه تانسوری:

$$v_r \sqrt{g^{rr}} = \text{مؤلفه فیزیکی} \quad (r \text{ not summed}) \quad v^r \sqrt{g_{rr}} = \text{مؤلفه تانسوری}$$

توجه: در روابط کتاب بردار را به صورت کنتراورینت در نظر گرفته و وقتی مؤلفه فیزیکی آن‌ها را نوشته چون محل اندیس مهم نبوده آن‌ها را به صورت کوارینت نوشته است.

36/47

به دست آوردن $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}$ در مختصات استوانه‌ای

$$\vec{u} = u_r \vec{e}_r + u_\theta \vec{e}_\theta + u_z \vec{e}_z$$

بردار بر حسب مؤلفه‌های فیزیکی

بردارهای یکه استوانه‌ای بر حسب کارترین

$$\vec{e}_r = \vec{e}_1 \cos \theta + \vec{e}_2 \sin \theta$$

$$\vec{e}_\theta = -\vec{e}_1 \sin \theta + \vec{e}_2 \cos \theta$$

$$\vec{e}_z = \vec{e}_3$$

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\vec{e}_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

بردار دل در استوانه‌ای را قبلاً به دست آورده بودیم:

عبارت $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}$ به شکل ضرب داخلی بردار دل در بردار $\vec{u}$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = u^i \Big|_i = \vec{e}_r \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial r} + \frac{\vec{e}_\theta}{r} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial \theta} + \vec{e}_z \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial z}$$

اکنون مشتقات $\frac{\partial u}{\partial r}, \frac{\partial u}{\partial \theta}, \frac{\partial u}{\partial z}$ را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{\partial u_r}{\partial r} \vec{e}_r + u_r \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \vec{e}_\theta + u_\theta \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \vec{e}_z + u_z \frac{\partial \vec{e}_z}{\partial r} \\ &= \frac{\partial u_r}{\partial r} \vec{e}_r + u_r \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \vec{e}_\theta + u_\theta \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \vec{e}_z + u_z \frac{\partial \vec{e}_z}{\partial r} \end{aligned}$$

با توجه به تعریف بردارهای یکه در بالا، این مشتقات صفرند.

37/47

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \theta} &= \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \vec{e}_r + u_r \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + u_\theta \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \vec{e}_z + u_z \frac{\partial \vec{e}_z}{\partial \theta} \\ &= \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \vec{e}_r + u_r (-\vec{e}_1 \sin \theta + \vec{e}_2 \cos \theta) + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + u_\theta (-\vec{e}_1 \cos \theta - \vec{e}_2 \sin \theta) + \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \vec{e}_z + u_z \frac{\partial \vec{e}_z}{\partial \theta} \\ &= \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \vec{e}_r + u_r \vec{e}_\theta + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \vec{e}_\theta - u_\theta \vec{e}_r + \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \vec{e}_z = \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta \right) \vec{e}_r + \left(u_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) \vec{e}_\theta + \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \vec{e}_z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{\partial u_r}{\partial z} \vec{e}_r + u_r \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial z} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \vec{e}_\theta + u_\theta \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \vec{e}_z + u_z \frac{\partial \vec{e}_z}{\partial z} \\ &= \frac{\partial u_r}{\partial z} \vec{e}_r + u_r \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial z} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \vec{e}_\theta + u_\theta \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \vec{e}_z + u_z \frac{\partial \vec{e}_z}{\partial z} \end{aligned}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = u^i \Big|_i = \vec{e}_r \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial r} + \frac{\vec{e}_\theta}{r} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial \theta} + \vec{e}_z \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(u_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

در اینجا برای ضرب داخلی تنها مؤلفه‌های $\vec{e}_r$ ، $\vec{e}_\theta$ و $\vec{e}_z$ عبارات فوق وارد می‌شوند.

$$= \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial (ru_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

38/47

2.33. In spherical coordinates with unit base vectors ($\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_\theta$), we have

مؤلفه‌های فیزیکی

$$\mathbf{u} = u_r \mathbf{e}_r + u_\phi \mathbf{e}_\phi + u_\theta \mathbf{e}_\theta, \quad \nabla \mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi + \frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta,$$

Gradient of a vector field and not Vector gradient

$$(\nabla \mathbf{u})^T = \mathbf{e}_r \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r} + \frac{\mathbf{e}_\phi}{r} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \phi} + \frac{\mathbf{e}_\theta}{r \sin \phi} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \theta},$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \mathbf{e}_r \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r} + \frac{\mathbf{e}_\phi}{r} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \phi} + \frac{\mathbf{e}_\theta}{r \sin \phi} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \theta} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 u_r}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial \sin \phi u_\phi}{\partial \phi} + \frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}.$$

در اسلاید بعد به دست می‌آوریم.

Show that

$$\nabla \cdot (\nabla \mathbf{u}) = u^i{}_{;j} = \frac{\partial (\nabla \cdot \mathbf{u})}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial (\nabla \cdot \mathbf{u})}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi + \frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial (\nabla \cdot \mathbf{u})}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta.$$

$$\nabla \cdot (\nabla \mathbf{u})^T = u^i{}_{;k} g^{jk} = \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\sin \phi \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{\sin^2 \phi} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \theta^2} \right].$$

لاپلاسین

توجه: در روابط کتاب بردار را به صورت کنتراورینت در نظر گرفته و وقتی مؤلفه فیزیکی آن‌ها را نوشته چون محل اندیس مهم نبوده آن‌ها را به صورت کوارینت نوشته است.

39/47

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

به دست آوردن $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}$ در مختصات کروی

بردار بر حسب مؤلفه‌های فیزیکی

$$\vec{u} = u_r \vec{e}_r + u_\phi \vec{e}_\phi + u_\theta \vec{e}_\theta$$

بردارهای یکه استوانه‌ای بر حسب کارترین

$$\vec{e}_r = (\vec{e}_1 \cos \theta + \vec{e}_2 \sin \theta) \sin \phi + \vec{e}_3 \cos \phi$$

$$\vec{e}_\phi = (\vec{e}_1 \cos \theta + \vec{e}_2 \sin \theta) \cos \phi - \vec{e}_3 \sin \phi$$

$$\vec{e}_\theta = -\vec{e}_1 \sin \theta + \vec{e}_2 \cos \theta$$

عبارت $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}$ به شکل ضرب داخلی بردار دل در بردار $\vec{u}$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = u^i{}_{;i} = \vec{e}_r \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r} + \vec{e}_\phi \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \phi} + \vec{e}_\theta \cdot \frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \theta}$$

اکنون مشتقات را به دست می‌آوریم:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r} = \frac{\partial u_r}{\partial r} \vec{e}_r + u_r \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial r} + \frac{\partial u_\phi}{\partial r} \vec{e}_\phi + u_\phi \frac{\partial \vec{e}_\phi}{\partial r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \vec{e}_\theta + u_\theta \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial r}$$

با توجه به تعریف بردارهای یکه در بالا، این مشتقات صفرند.

$$= \frac{\partial u_r}{\partial r} \vec{e}_r + u_r \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial r} + \frac{\partial u_\phi}{\partial r} \vec{e}_\phi + u_\phi \frac{\partial \vec{e}_\phi}{\partial r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \vec{e}_\theta + u_\theta \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial r}$$

40/47

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial \phi} &= \frac{\partial u_r}{\partial \phi} \vec{e}_r + u_r \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \phi} + \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \vec{e}_\phi + u_\phi \frac{\partial \vec{e}_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} \vec{e}_\theta + u_\theta \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \phi} \\
&= \frac{\partial u_r}{\partial \phi} \vec{e}_r + u_r [(\vec{e}_1 \cos \theta + \vec{e}_2 \sin \theta) \cos \phi - \vec{e}_3 \sin \phi] \\
&\quad + \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \vec{e}_\phi + u_\phi [-(\vec{e}_1 \cos \theta + \vec{e}_2 \sin \theta) \sin \phi - \vec{e}_3 \cos \phi] + \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} \vec{e}_\theta + u_\theta \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \phi} \\
&= \frac{\partial u_r}{\partial \phi} \vec{e}_r + u_r \vec{e}_\phi + \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \vec{e}_\phi - u_\phi \vec{e}_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} \vec{e}_\theta = \left(\frac{\partial u_r}{\partial \phi} - u_\phi \right) \vec{e}_r + \left(u_r + \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \right) \vec{e}_\phi + \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} \vec{e}_\theta \\
\frac{\partial u}{\partial \theta} &= \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \vec{e}_r + u_r \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\phi}{\partial \theta} \vec{e}_\phi + u_\phi \frac{\partial \vec{e}_\phi}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + u_\theta \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} \\
&= \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \vec{e}_r + u_r (-\vec{e}_1 \sin \theta + \vec{e}_2 \cos \theta) \sin \phi \\
&\quad + \frac{\partial u_\phi}{\partial \theta} \vec{e}_\phi + u_\phi [(-\vec{e}_1 \sin \theta + \vec{e}_2 \cos \theta) \cos \phi] + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + u_\theta (-\vec{e}_1 \cos \theta - \vec{e}_2 \sin \theta) \\
&= \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \vec{e}_r + u_r \vec{e}_\theta \sin \phi + \frac{\partial u_\phi}{\partial \theta} \vec{e}_\phi + u_\phi \vec{e}_\theta \cos \phi + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + u_\theta (-\vec{e}_1 \cos \theta - \vec{e}_2 \sin \theta) \\
&= \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \vec{e}_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + (u_r \sin \phi + u_\phi \cos \phi + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}) \vec{e}_\theta + u_\theta (-\vec{e}_1 \cos \theta - \vec{e}_2 \sin \theta)
\end{aligned}$$

41/47

به طور خلاصه داریم:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{\partial u_r}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{\partial u_\phi}{\partial r} \vec{e}_\phi + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \vec{e}_\theta \\
\frac{\partial u}{\partial \phi} &= \frac{\partial u_r}{\partial \phi} \vec{e}_r + \left(u_r + \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \right) \vec{e}_\phi + \left(u_\phi + \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} \right) \vec{e}_\theta \\
\frac{\partial u}{\partial \theta} &= \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \vec{e}_r + \frac{\partial u_\phi}{\partial \theta} \vec{e}_\phi + \left(u_r \sin \phi + u_\phi \cos \phi + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) \vec{e}_\theta + u_\theta (-\vec{e}_1 \cos \theta - \vec{e}_2 \sin \theta) \\
\vec{v} \cdot \vec{u} &= u^i |_{\vec{e}_i} = \vec{e}_r \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + \vec{e}_\phi \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \phi} + \vec{e}_\theta \cdot \frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial u}{\partial \theta} \\
&= \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(u_r + \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{r \sin \phi} \left(u_r \sin \phi + u_\phi \cos \phi + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) \\
&= \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{2u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{\cos \phi}{r \sin \phi} u_\phi + \left(\frac{1}{r \sin \phi} \right) \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \\
&= \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 u_r}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \phi} \left(\frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \sin \phi + u_\phi \cos \phi \right) + \left(\frac{1}{r \sin \phi} \right) \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \\
&= \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 u_r}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (u_\phi \sin \phi) + \frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}
\end{aligned}$$

42/47

2.9- انقباض (Contraction)

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

اکنون چند عمل را در تانسورها معرفی می‌کنیم که تولید تانسور جدیدی می‌کنند.

اگر A_{jkl}^i یک تانسور مخلوط باشد آنچنان که در انتقال از مختصات θ^α به $\bar{\theta}^\alpha$ ($\alpha=1,2,\dots,n$) داریم:

$$\bar{A}_{jkl}^i(\bar{\theta}) = \frac{\partial \bar{\theta}^i}{\partial \theta^\alpha} \frac{\partial \theta^\beta}{\partial \bar{\theta}^j} \frac{\partial \theta^\gamma}{\partial \bar{\theta}^k} \frac{\partial \theta^\delta}{\partial \bar{\theta}^l} A_{\beta\gamma\delta}^\alpha(\theta)$$

از آنجا که معادله $A_{ii}=B_{ii}$ جمع سه حالت خاص از رابطه $A_{ij}=B_{ij}$ است، اگر در

$$\bar{A}_{jil}^i(\bar{\theta}) = \frac{\partial \bar{\theta}^i}{\partial \theta^\alpha} \frac{\partial \theta^\beta}{\partial \bar{\theta}^j} \frac{\partial \theta^\gamma}{\partial \bar{\theta}^i} \frac{\partial \theta^\delta}{\partial \bar{\theta}^l} A_{\beta\gamma\delta}^\alpha(\theta)$$

رابطه فوق هم اندیس‌های i و k را برابر هم قرار دهیم و روی آن جمع ببندیم، مجموعه کمیات زیر به دست می‌آید:

$$= \frac{\partial \theta^\beta}{\partial \bar{\theta}^j} \frac{\partial \theta^\delta}{\partial \bar{\theta}^l} \delta_\alpha^\gamma A_{\beta\gamma\delta}^\alpha(\theta)$$

$$= \frac{\partial \theta^\beta}{\partial \bar{\theta}^j} \frac{\partial \theta^\delta}{\partial \bar{\theta}^l} A_{\beta\alpha\delta}^\alpha(\theta)$$

اگر $A_{\beta\alpha\delta}^\alpha$ را به شکل $B_{\beta\delta}$ بنویسیم، آنگاه معادله فوق نشان می‌دهد که:

$$\bar{B}_{jl} = \frac{\partial \theta^\beta}{\partial \bar{\theta}^j} \frac{\partial \theta^\delta}{\partial \bar{\theta}^l} B_{\beta\delta}$$

بنابراین $B_{\beta\delta}$ قانون انتقال تانسور را برآورده کرده و یک تانسور است.

فرایند برابر قرار دادن و جمع بستن یک اندیس کوارینت و یک اندیس کنتراوارینت از یک تانسور مخلوط را یک انقباض (contraction) می‌نامند.

به سادگی می‌توان دید که مثال بالا را می‌شود به تانسورهای مخلوط از رنک‌های دیگر نیز تعمیم داد.

نتیجه یک انقباض تانسور دیگری می‌شود.

اگر در نتیجه یک انقباض هیچ اندیس آزادی باقی نماند، کمیت نتیجه شده یک اسکالر است.

یادآوری: در حالت کلی، برابر قرار دادن و جمع دو اندیس کوارینت یا دو اندیس کنتراوارینت، یک تانسور از مرتبه (order) (رنک) پایین‌تر را نتیجه نمی‌دهد و یک انقباض صحیح نیست. اما، اگر مختصات کارتزین باشد، همه اندیس‌ها را پایین می‌نویسیم و برابر قرار دادن دو اندیس پایین و جمع روی آن‌ها یک انقباض صحیح است.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

45/47

مثال 2.11: اگر A_j^i یک تانسور مخلوط از رنک دو باشد، نشان دهید A_i^i یک اسکالر است. اگر A^{ij} یک تانسور کنتراوارینت از رنک دو باشد، آنگاه نشان دهید در حالت کلی A^{ii} یک نامتغیر (invariant) (ناورد) نیست. به طور مشابه اگر A_{ij} یک تانسور کوارینت از رنک دو باشد، آنگاه A_{ii} در حالت کلی یک نامتغیر نیست.

$$\bar{A}_j^i = \frac{\partial \theta^n}{\partial \bar{\theta}^j} \frac{\partial \bar{\theta}^i}{\partial \theta^m} A_n^m \xrightarrow{\text{Contraction}} \bar{A}_i^i = \frac{\partial \theta^n}{\partial \bar{\theta}^i} \frac{\partial \bar{\theta}^i}{\partial \theta^m} A_n^m = \delta_m^n A_n^m = A_m^m$$

بنابراین با انقباض می‌بینیم که تانسور A در سیستم مختصات θ و $\bar{\theta}$ یکی است و در نتیجه A یک اسکالر است.

$$\bar{A}^{ij} = \frac{\partial \bar{\theta}^i}{\partial \theta^m} \frac{\partial \bar{\theta}^j}{\partial \theta^n} A^{mn} \xrightarrow{\text{Contraction}} \bar{A}^{ii} = \frac{\partial \bar{\theta}^i}{\partial \theta^m} \frac{\partial \bar{\theta}^i}{\partial \theta^n} A^{mn}$$

ولی در سیستم مختصات کارتزین داریم: $\bar{A}^{ii} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^m} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^n} A^{mn} = \beta_{im} \beta_{in} A^{mn} = \delta_{mn} A^{mn} = A^{mm}$ بنابراین در سیستم مختصات کارتزین، انقباض A یک اسکالر (نامتغیر، Invariant) است.

و به همین ترتیب برای A_{ii} می‌توان اثبات کرد که انقباض این تانسور در حالت کلی یک اسکالر نیست ولی در سیستم مختصات کارتزین، یک اسکالر (نامتغیر، Invariant) است.

نکته مهم: اگر کمیتی اندیس آزاد نداشت به معنی اسکالر بودن نیست، بلکه برای اثبات اسکالر بودن باید رابطه تبدیل آن را از یک سیستم مختصات به یک سیستم دیگر نوشت و نشان داد که تغییری نمی‌کند.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

46/47

بیان متفاوت انقباض در سیستم مختصات کارتزین

در سیستم مختصات **کارتزین**، انقباض هر دو اندیس از تانسور مرتبه n ، یک تانسور از مرتبه $n-2$ می‌سازد.

$$\bar{A}_{ijk\dots n} = A_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\dots\alpha_n} \beta_{i\alpha_1} \beta_{j\alpha_2} \beta_{k\alpha_3} \dots \beta_{n\alpha_n}$$

$$\bar{A}_{iik\dots n} = A_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\dots\alpha_n} \beta_{i\alpha_1} \beta_{i\alpha_2} \beta_{k\alpha_3} \dots \beta_{n\alpha_n}$$

$$\beta_{i\alpha_1} \beta_{i\alpha_2} = \delta_{\alpha_1\alpha_2}$$

می‌دانیم:

$$\bar{A}_{iik\dots n} = A_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\dots\alpha_n} \delta_{\alpha_1\alpha_2} \beta_{k\alpha_3} \dots \beta_{n\alpha_n}$$

$$\bar{A}_{iik\dots n} = A_{\alpha_1\alpha_1\alpha_3\dots\alpha_n} \beta_{k\alpha_3} \dots \beta_{n\alpha_n}$$

بنابراین $A_{\alpha_1\alpha_1\alpha_3\dots\alpha_n}$ یک تانسور است (زیرا بر اساس قانون انتقال تانسورها انتقال یافته است) و از مرتبه $n-2$ است (به تعداد β ها توجه شود).