

3.4- معادلات تعادل Equations of Equilibrium

© M.H. Abolbashari, Ferdowsi University of Mashhad

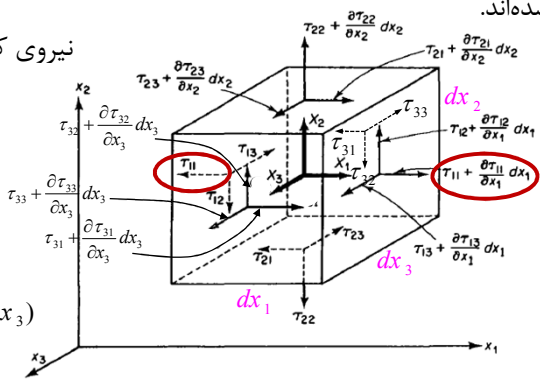
اکنون معادلات حرکت $(\dot{H} = L)$ و $(\dot{P} = F)$ را با فرض **سرعت صفر** به شکل معادلات دیفرانسیلی تبدیل می‌کنیم.

حالت تعادل ایستایی یک مکعب مستطیل که وجوه آن موازی صفحات مختصات است در نظر بگیرید. تنش‌ها که به وجوه مختلف آن اثر می‌کند در شکل نشان داده شده است.

نیروی $\tau_{11} dx_2 dx_3$ به صفحه سمت چپ اثر می‌کند و نیروی $(\tau_{11} + \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1} dx_1) dx_2 dx_3$ به صفحه سمت راست اثر می‌کند و به همین ترتیب. این عبارات بر اساس فرض پیوستگی محیط پیوسته نوشته شده‌اند.

نیروی کالبدی عبارت است از: $X_1 dx_1 dx_2 dx_3$
بسط تیلور تا دو جمله

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a)$$

$$\tau_{11}(x_1 + dx_1, x_2, x_3) = \tau_{11}(x_1, x_2, x_3) + dx_1 \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3)$$


2/18

Fig. 3.4.1. Equilibrating stress components on an infinitesimal parallelepiped.

اکنون تعادل جسم اقتضا می‌کند برآیند نیروها صفر باشد.

نیروهای در جهت x_1 را در نظر بگیرید. شش مؤلفه نیروهای سطحی و یک مؤلفه نیروی کالبدی داریم. مجموع آنها عبارت است از:

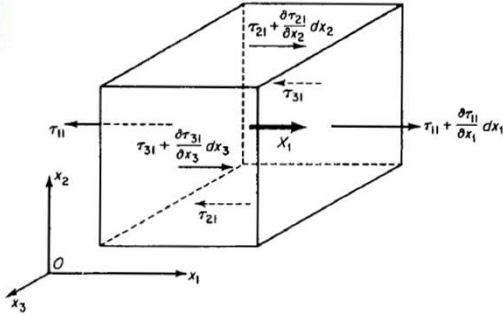


Fig. 3.4:2. Components of tractions in x_1 direction.

$$\left(\tau_{11} + \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 dx_3 - \tau_{11} dx_2 dx_3 + \left(\tau_{21} + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_2} dx_2 \right) dx_3 dx_1 - \tau_{21} dx_3 dx_1 + \left(\tau_{31} + \frac{\partial \tau_{31}}{\partial x_3} dx_3 \right) dx_1 dx_2 - \tau_{31} dx_1 dx_2 + X_1 dx_1 dx_2 dx_3 = 0$$

با تقسیم بر $dx_1 dx_2 dx_3$ داریم:

$$(1) \quad \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{31}}{\partial x_3} + X_1 = 0$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

3/18

چرخش اندیس‌ها به ترتیب 1, 2, 3 به معادلات مشابهی برای تعادل در جهات x_2 و x_3 می‌انجامد. مجموعه این معادلات به شکل خلاصه اندیسی به شکل زیر خواهد بود.

$$(2) \quad \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} + X_i = 0 \quad \left[\frac{\text{Force}}{\text{Unit area}} + \frac{\text{Force}}{\text{Unit Volume}} = \frac{\frac{\text{kg.m}}{\text{s}^2 \cdot \text{m}^2}}{\text{m}} + \frac{\frac{\text{kg.m}}{\text{s}^2}}{\text{m}^3} = \frac{M}{L^2 T^2} \right]$$

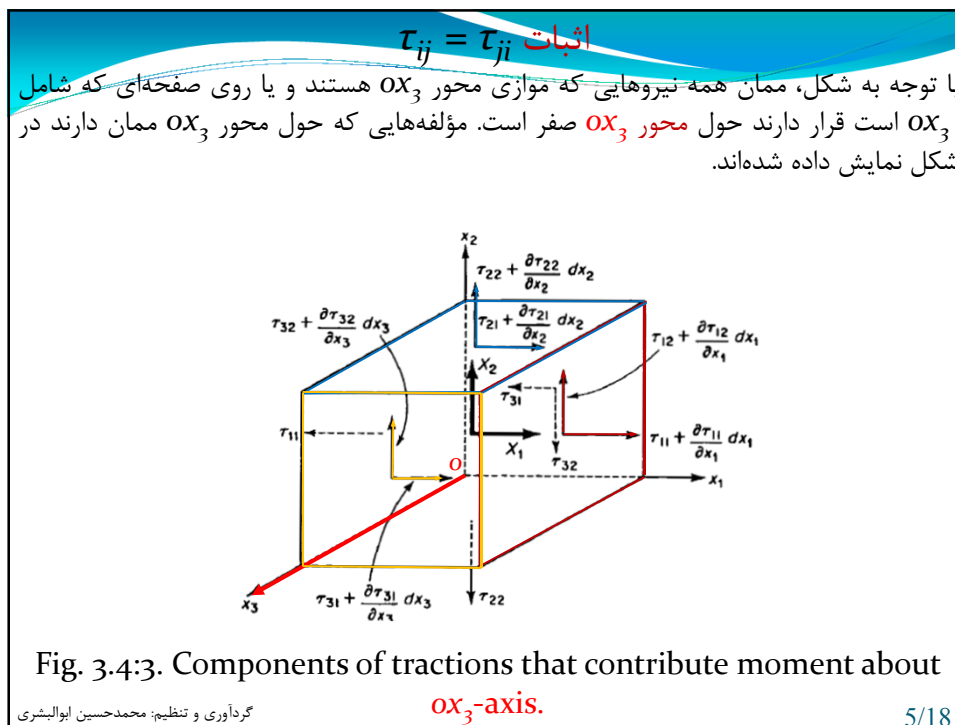
تعادل یک المان اقتضا می‌کند که برآیند ممان‌ها نیز صفر شود. اگر ممان خارجی متناسب با حجم وجود نداشته باشد، در نظر گرفتن تعادل ممان‌ها به نتیجه مهم تقارن تانسور تنش می‌انجامد.

$$(3) \quad \tau_{ij} = \tau_{ji}$$

اثبات:

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

4/18



بنابراین، ممان نیروها عبارتند از:

$$\begin{aligned}
 & -\left(\tau_{11} + \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1} dx_1\right) dx_2 dx_3 \cdot \frac{dx_2}{2} + \tau_{11} dx_2 dx_3 \cdot \frac{dx_2}{2} + \left(\tau_{12} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_1} dx_1\right) dx_2 dx_3 \cdot \frac{dx_1}{2} \\
 & -\left(\tau_{21} + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_2} dx_2\right) dx_1 dx_3 \cdot \frac{dx_2}{2} + \left(\tau_{22} + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial x_2} dx_2\right) dx_1 dx_3 \cdot \frac{dx_1}{2} - \tau_{22} dx_1 dx_3 \cdot \frac{dx_1}{2} \\
 & + \left(\tau_{32} + \frac{\partial \tau_{32}}{\partial x_3} dx_3\right) dx_1 dx_2 \cdot \frac{dx_1}{2} - \tau_{32} dx_1 dx_2 \cdot \frac{dx_1}{2} - \left(\tau_{31} + \frac{\partial \tau_{31}}{\partial x_3} dx_3\right) dx_1 dx_2 \cdot \frac{dx_2}{2} \\
 & + \tau_{31} dx_1 dx_2 \cdot \frac{dx_2}{2} - X_1 dx_1 dx_2 dx_3 \cdot \frac{dx_2}{2} + X_2 dx_1 dx_2 dx_3 \cdot \frac{dx_1}{2} = 0
 \end{aligned}$$

پس از حذف، با تقسیم رابطه بر $dx_1 dx_2 dx_3$ داریم:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1} \frac{dx_2}{2} + \left(\tau_{12} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_1} dx_1\right) - \left(\tau_{21} + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_2} dx_2\right) + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial x_2} \frac{dx_1}{2} + \frac{\partial \tau_{32}}{\partial x_3} \frac{dx_1}{2} \\
 & -\frac{\partial \tau_{31}}{\partial x_3} \frac{dx_2}{2} - X_1 \frac{dx_2}{2} + X_2 \frac{dx_1}{2} = 0
 \end{aligned}$$

با گرفتن حد وقتی $dx_1 \rightarrow 0$ $dx_2 \rightarrow 0$ $dx_3 \rightarrow 0$ همه جملات صفر می‌شوند به جز دو جمله قرمز رنگ و داریم:

$$(4) \quad \tau_{12} = \tau_{21}$$

6/18

با ممان گیری حول OX_1 و OX_2 نتایج مشابهی به دست می‌آید که به نتیجه کلی معادله

$$(3) \quad \tau_{ij} = \tau_{ji}$$

می‌انجامد.

تانسور تنش نامتقارن (Asymmetric)

یادآور می‌شود که اگر ممان خارجی متناسب با حجم وجود داشته باشد، آنگاه تانسور تنش نامتقارن خواهد بود.

به عنوان مثال، اگر ممان $c_3 dx_1 dx_2 dx_3$ حول محور OX_3 وجود داشته باشد، آنگاه به جای معادله (4) نتیجه زیر حاصل می‌شود.

$$(5) \quad \tau_{12} - \tau_{21} + c_3 = 0$$

7/18

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

ماکسول (Maxwell) خاطر نشان کرد که:

در مغناطیس‌ها در یک میدان مغناطیسی و در مواد دی‌الکتریک در یک میدان الکتریکی با صفحات پولاریزه مختلف، ممان کالبدی غیر صفری وجود دارد.

اگر میدان الکترومغناطیس خیلی شدید باشد و از طرفی سطح تنش هم پایین باشد آنچنانکه τ_{12} و c_3 از نظر اندازه (order of magnitude) از مرتبه یکسانی باشند، آنگاه براساس معادله (5): $\tau_{12} - \tau_{21} + c_3 = 0$ نمی‌تواند برابر با τ_{21} باشد. در این حالت تانسور تنش τ_{ij} نامتقارن خواهد بود.

اگر c_3 در مقایسه با τ_{12} خیلی کوچک باشد می‌توان c_3 را در (5) حذف کرد و آنگاه (4) به طور تقریبی برقرار است.

اگر مطالعه تأثیر میدان قوی الکترومغناطیس بر انتشار موج الاستیک و یا تأثیر آن بر پدیده‌های فرکانس بالا در مواد مورد نظر باشد، آنگاه سطح تنش بسیار پایین و ممان کالبدی قابل توجه است. در چنین مسائلی، **تانسور تنش را نمی‌توان متقارن فرض کرد.**

در ادامه درس تانسور تنش متقارن فرض می‌شود مگر خلاف آن گفته شود.

8/18

مثال: صحت رابطه تعادل را برای توزیع تنش زیر در غیاب نیروهای حجمی (کالبدی) بررسی کنید.

$$\sigma_x = 3x^2 + 4xy - 8y^2$$

$$\sigma_y = 2x^2 + xy + 3y^2$$

$$\tau_{xy} = -\frac{1}{2}x^2 - 6xy - 2y^2$$

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

حل:

$$\frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} + X_i = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{31}}{\partial x_3} = 0 \quad \text{یا} \quad \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 6x + 4y - 6x - 4y + 0 = 0$$

و به همین ترتیب:

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = (-x - 6y) + (x + 6y) + 0 = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 + 0 + 0 = 0$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

9/18

چند نکته در ارتباط با کوپل تنش (Couple-stresses)

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

اگر به تبعیت از ویت (Voigt) فرض کنیم روی هر المان سطح بسیار کوچک در هر جسم جامدی، عمل مواد خارج سطح روی مواد داخل سطح معادل یک نیرو و یک کوپل است (بر خلاف آنچه در بخش 3.1 فرض شد).

آنگاه، افزون بر ترکشن $\vec{T}$ که روی سطح اثر می کند، باید یک بردار کوپل تنش $\vec{M}$ هم داشته باشیم.

اکنون دو بردار $\vec{T}$ و $\vec{M}$ معادل عمل مواد خارج روی مواد داخل است.

به طور مشابه، ممکن است همچنانکه ماکسول بیان کرد کوپل کالبدی (body couples) یعنی کوپل بر واحد جرم، $\mathbf{c}$ ، با مؤلفه های c_i ($i=1,2,3$) وجود داشته باشد.

اگر این احتمالات را قبول کنیم، آنگاه باید افزون بر تانسور تنش τ_{ij} یک تانسور کوپل تنش M_{ij} تعریف کنیم. تانسور M_{ij} با بردار کوپل تنش یک رابطه تبدیل خطی مانند معادله (3.3:2) دارد. $\vec{T}_i = \tau_{ji} v_j$

$$\vec{M}_i = M_{ji} \vec{v}_j \quad \left[\frac{\text{Moment}}{\text{Unit area}} \text{ or } \frac{\text{kg.m.m}}{\text{s}^2.\text{m}^2} \text{ or } \frac{M}{T^2} \right] = \left[\frac{M}{T^2} \right] \cdot [1]$$

آنگاه تحلیل مومنتم زاویه ای به معادله زیر می انجامد.

$$\left[\frac{\text{kg.m.m}}{\text{m.m}^2.\text{s}^2} \text{ or } \frac{M}{L.T^2} \right] + \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \frac{\text{N.m}}{\text{kg}} \text{ or } \frac{1}{L^2} \cdot \frac{ML}{T^2} \right] = \left[\frac{\text{Force}}{\text{Unit area}} \text{ or } \frac{\text{kg.m}}{\text{m}^2.\text{s}^2} \text{ or } \frac{M.L}{L^2.T^2} \text{ or } \frac{M}{L.T^2} \right]$$

و به صورت بسط یافته:

$$\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial M_{zx}}{\partial z} + \rho c_x = \tau_{yz} - \tau_{zy}, \quad \text{etc.}$$

11/18

بنابراین بخش نامتقارن تانسور تنش با کوپل های کالبدی و دیورژانس تانسور کوپل تنش به دست می آید.

هر گاه هیچ یک از کوپل ها وجود نداشته باشند، تانسور تنش باید متقارن باشد.

کوپل های تنش و کوپل های کالبدی در بحث ساختارهای میکرونی (submicron) و مکانیک مولکولی مواد و در تئوری نابجایی (dislocation) فلزات مفهیم مفید و کاربردی اند.

مسائل زیر را حل کرده و تا دو هفته دیگر تحویل فرمایید:

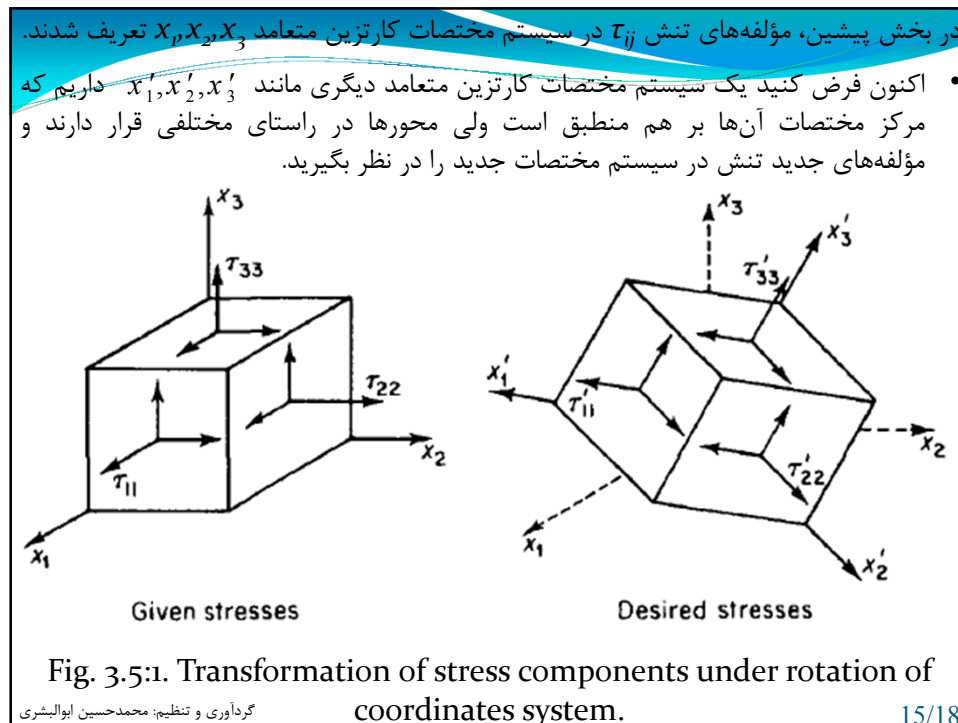
3) 8, 11, 13, 14

مسائل از کتاب دوم Fung که از سایت آموزش مجازی قابل دسترسی است.

تمرین‌های قبلی:

2) 1, 2, 5, 6, 10, and A_1-A_{12} , 2) 12-23, 25-32

3.5- انتقال محورهای مختصات (Transformation of Coordinates)



- اگر این دو مختصات با رابطه خطی زیر به هم مربوط باشند،

$$x'_k = \beta_{ki} x_i \quad (1)$$

اگر از طرفین رابطه مشتق بگیریم داریم: $\beta_{ki} = \frac{\partial x'_k}{\partial x_i}$. اکنون مقدار β_{ki} را در (۱) جایگزین می‌کنیم:

$$x'_k = \frac{\partial x'_k}{\partial x_i} x_i, \quad k = 1, 2, 3$$

که در آن $\beta_{ki} = \cos(x'_k, x_i)$ کسینوس دایرکتوری‌های محورها x'_k نسبت به محورها x_i است.

از آنجا که τ_{ij} تانسور است (بخش 3.3)، می‌توانیم قانون انتقال آن را بنویسیم.

[Skip to slide 18](#)

However, in order to emphasize the importance of the result we shall insert an elementary derivation based on Cauchy's formula derived in Sec. 3.3, which states that if dS is a surface element whose unit outer normal vector $\bar{v}$ has components v_j , then the force per unit area acting on dS is a vector $\bar{T}$ with components $T_i = \tau_{ji} v_j$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

16/18

If the normal $\vec{\nu}$ is chosen to be parallel to the axis x'_k , so that

$$\nu_1 = \beta_{k1}, \quad \nu_2 = \beta_{k2}, \quad \nu_3 = \beta_{k3},$$

then denoting $\overset{\nu}{T}_i$ as $\overset{k}{T}_i$, we have

$$\overset{\nu}{T}_i = \overset{k}{T}_i = \tau_{ji} \beta_{kj}$$

Since the component of the vector $\overset{\nu}{T} (= \overset{k}{T})$ in the direction x'_m is τ'_{km} i.e.,

$$\overset{k}{T} = \tau'_{km} \vec{g}'_m$$

then

$$\overset{k}{T} = \tau'_{km} \vec{g}'_m = \overset{k}{T}_i \vec{g}_i = \tau_{ij} \beta_{kj} \vec{g}_i$$

where $\vec{g}'_m$ and $\vec{g}_i$ are the unit base vectors of the two coordinate systems.

Using the relation $\vec{g}_i = \beta_{mi} \vec{g}'_m$ [Eq. (2.14:16)]

$$\vec{g}_m = (\vec{g}_m \cdot \vec{g}^k) \vec{g}_k = (\vec{g}^k \cdot \vec{g}_m) \vec{g}_k = \beta^k_m \vec{g}_k$$

and Eq. (1) for rectangular Cartesian coordinates, we obtain

$$\overset{k}{T} = \tau'_{km} \vec{g}'_m = \tau_{ji} \beta_{kj} \beta_{mi} \vec{g}'_m$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

17/18

یعنی:

$$(3) \quad \tau'_{km} = \tau_{ji} \beta_{kj} \beta_{mi} = \tau_{ji} \frac{\partial x'_k}{\partial x_j} \frac{\partial x'_m}{\partial x_i} = \tau_{ji} \frac{\partial x'_j}{\partial x'_k} \frac{\partial x_i}{\partial x'_m}$$

$$x_j = \beta_{kj} x'_k \rightarrow \frac{\partial x_j}{\partial x'_k} = \beta_{kj}, \quad x'_k = \beta_{kj} x_j \rightarrow \frac{\partial x'_k}{\partial x_j} = \beta_{kj}$$

زیرا در کارترین:

$$\tau' = [\beta][\tau][\beta]^T \quad \text{و یا به شکل ماتریسی}$$

$$\tau_{km} = \tau'_{ji} \beta_{jk} \beta_{im} \quad \tau = [\beta]^T [\tau'] [\beta] \quad \text{و برای تبدیل معکوس داریم:}$$

$$\text{اگر معادله (3) و (2.5:2)} \quad \bar{t}^{ij}(\bar{\theta}^1, \bar{\theta}^2, \bar{\theta}^3) = t^{mn}(\theta^1, \theta^2, \theta^3) \frac{\partial \bar{\theta}^i}{\partial \theta^m} \frac{\partial \bar{\theta}^j}{\partial \theta^n}$$

می‌بینیم که مؤلفه‌های تنش مانند یک تانسور رنک ۲ انتقال می‌یابند. بنابراین، مفهوم فیزیکی تنش که با τ_{ij} بیان می‌شود با تعریف ریاضی یک تانسور رنک ۲ در فضای اقلیدسی تطبیق دارد.

امتحان نیم ترم تا اینجا

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

18/18