

فصل ۶

رفتار الاستیک و پلاستیک مصالح

رفتار پلاستیک تدریس نمی شود.



© M.H. Abolbashari, Ferdowsi University of Mashhad

در این فصل قانون حاکم بر چندین ماده که بیشتر مورد استفاده قرار می گیرند مطرح می شوند.

این قوانین رفتار مواد را در شرایط **دمای ثابت (Isothermal)** و در محدوده **کرنش های کوچک** بیان می کنند.

با مقدمه ای که در مورد مفهوم تنش و کرنش گفته شد، کوچی قانون هوک را عمومیت داد و به این شکل بیان کرد که: **مؤلفه های تنش به شکل خطی به مؤلفه های کرنش مربوط می شوند.**

شکل معادله تانسوری **قانون هوک عمومیت یافته** عبارت است از:

$$\sigma^{ij} = D^{ijkl} e_{kl} \quad (1)$$

در کتاب اندیس تنش به اشتباه کوارینت نوشته شده است.

که در آن σ^{ij} تانسور تنش، e_{ij} تانسور کرنش، و D^{ijkl} تانسور ثابت های الاستیک یا مدول های مصالح است که تانسور مدول های الاستیک نامیده می شود.



گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

2/28

تعداد D^{ijkl} های مستقل	به سبب
81	در حالت کلی
36	$\sigma^{ij} = \sigma^{ji} \rightarrow D^{ijkl} = D^{jikl}, e_{kl} = e_{lk} \rightarrow D^{ijkl} = D^{ijlk}$
21	اگر یک تابع انرژی کرنشی درجه دو $W = \frac{1}{2} D^{ijkl} e_{ij} e_{kl}$ وجود داشته باشد که در آن ویژگی $\frac{\partial W}{\partial e_{ij}} = \sigma^{ij}$ برقرار باشد، آن گاه $D^{ijkl} = D^{klij}$
13	اگر خواص مصالح نسبت به یک صفحه متقارن باشد.
9	اگر خواص مصالح نسبت به سه صفحه متعامد تقارن داشته باشد.
2	اگر مصالح الاستیک همسانگرد (Isotropic) باشد، یعنی اگر خواص الاستیک در همه جهتها یکسان باشد.



گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

3/28

در بحث های بعد:

- خود را محدود به مصالح همسانگرد (isotropic) می کنیم.
- از آنجا که قرار است در این فصل از **تانسورهای کارتزین** استفاده شود، برای مؤلفه های تانسوری فقط از اندیس های پایین (کوارینت) استفاده خواهیم کرد.



گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

4/28

6.2- رابطه تنش و کرنش برای مصالح الاستیک همسانگرد

قانون هوک در سیستم مختصات کارتزین متعامد برای مصالح الاستیک همسانگرد که در آن‌ها دما تغییر نمی‌کند، به شکل زیر بیان می‌شود.

$$(1) \quad \sigma_{\alpha\alpha} = 3Ke_{\alpha\alpha}$$

$$(2) \quad \sigma'_{ij} = 2Ge'_{ij}$$

که K و G ثابتند و σ'_{ij} و e'_{ij} به ترتیب تنش و کرنش انحرافی‌اند، یعنی:

$$(3) \quad \sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{\alpha\alpha}\delta_{ij}$$

$$(4) \quad e'_{ij} = e_{ij} - \frac{1}{3}e_{\alpha\alpha}\delta_{ij}$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری



5/28

پیش از این دیدیم که $\sigma_{\alpha\alpha}/3$ تنش میانگین در یک نقطه است و اینکه اگر کرنش کوچک باشد، $e_{\alpha\alpha}$ عبارت است از تغییر حجم به واحد حجم.

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{(1+e_{11})(1+e_{22})(1+e_{33})-1}{1} \xrightarrow{\text{if } e_{ij} \text{ is infinitesimal}} = e_{11} + e_{22} + e_{33} = e_{\alpha\alpha}$$

$\sigma_{\alpha\alpha}$ و $e_{\alpha\alpha}$ نامتغیرند.

بنابراین معادله (1) $\sigma_{\alpha\alpha} = 3Ke_{\alpha\alpha}$ بیان می‌کند که تغییر حجم مصالح متناسب با تنش متوسط است.

در حالت خاص فشار هیدرواستاتیکی:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = -p, \quad \sigma_{xy} = \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = 0$$

داریم: $\sigma_{\alpha\alpha} = -3p$ و معادله (1) $\sigma_{\alpha\alpha} = 3Ke_{\alpha\alpha}$ را می‌توان برای کرنش‌های کوچک با فرض حجم V و تغییر حجم ΔV به شکل زیر نوشت.

$$(5) \quad \frac{\Delta v}{v} = -\frac{p}{K}$$

ضریب K را مدول حجمی (کپه‌ای-bulk) مصالح می‌گویند.



گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

6/28

کرنش انحرافی e'_{ij} تغییرشکلی بدون (منهای) تغییر حجم را نشان می‌دهد.

$$e'_{ij} = e_{ij} - \frac{1}{3} e_{\alpha\alpha} \delta_{ij}, \quad e_{\alpha\alpha} = \frac{\Delta v}{v}$$

معادله (2) بیان می‌دارد که تنش انحرافی متناسب است با کرنش انحرافی. ثابت G مدول الاستیسیته در برش، مدول برش و یا مدول صلبیت نامیده می‌شود. در حالت خاصی که $e_{xy} \neq 0$ اما سایر مؤلفه‌های کرنش صفرند (در این فرض: $e'_{ij} = e_{ij}, \sigma'_{ij} = \sigma_{ij}$) و از معادله (2) داریم:

$$(6) \quad \sigma_{xy} = 2Ge_{xy}$$

و بقیه مؤلفه‌های تنش صفر می‌شوند. ضریب 2 در رابطه بخاطر این اضافه شده که قبل از معرفی مفهوم تانسور، کرنش برشی مهندسی به شکل زیر تعریف می‌شد:

$$\gamma_{xy} = 2e_{xy}$$

اگر معادلات (3) و (4) را در معادله (2) جایگزین کرده و از معادله (1) نیز استفاده کنیم، نتیجه عبارت است از:

$$\sigma'_{ij} = 2Ge'_{ij} \rightarrow \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{\alpha\alpha} \delta_{ij} = 2G(e_{ij} - \frac{1}{3} e_{\alpha\alpha} \delta_{ij})$$

$$\sigma_{ij} = 2G(e_{ij} - \frac{1}{3} e_{\alpha\alpha} \delta_{ij}) + \frac{1}{3} \sigma_{\alpha\alpha} \delta_{ij} = 2Ge_{ij} - \frac{2G}{3} e_{\alpha\alpha} \delta_{ij} + \frac{1}{3} 3ke_{\alpha\alpha} \delta_{ij}$$

$$\sigma_{ij} = 2Ge_{ij} + (k - \frac{2G}{3}) e_{\alpha\alpha} \delta_{ij} = 2Ge_{ij} + \lambda e_{\alpha\alpha} \delta_{ij}$$

$$(7) \quad \sigma_{ij} = \lambda e_{\alpha\alpha} \delta_{ij} + 2Ge_{ij} \quad \text{روابط تنش بر حسب کرنش برای اجسام همسانگرد}$$



7/28

روابط کرنش بر حسب تنش را نیز می‌توان به شکل زیر به دست آورد. داریم:

$$(7) \quad \sigma_{ij} = \lambda e_{\alpha\alpha} \delta_{ij} + 2Ge_{ij}$$

$$\frac{\sigma_{ij}}{2G} = \frac{\lambda}{2G} e_{\alpha\alpha} \delta_{ij} + e_{ij} \rightarrow e_{ij} = -\frac{\lambda}{2G} e_{\alpha\alpha} \delta_{ij} + \frac{\sigma_{ij}}{2G} = \frac{(1+\nu)\sigma_{ij}}{E} - \frac{\nu}{1-2\nu} \frac{\sigma_{\alpha\alpha}}{3k} \delta_{ij}$$

$$e_{ij} = \frac{(1+\nu)}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{1-2\nu} \frac{1}{3k} \sigma_{\alpha\alpha} \delta_{ij} = \frac{(1+\nu)}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{\alpha\alpha} \delta_{ij}$$

یا

$$(8) \quad e_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{\alpha\alpha} \delta_{ij} \quad \text{روابط کرنش بر حسب تنش برای اجسام همسانگرد}$$

ثابت‌های λ و G را ثابت‌های لامه (Lame's constants) (G, λ) می‌نامند. در بسیاری از کتاب‌ها متغیر μ را به جای G به کار می‌برند. ثابت E مدول الاستیسیته یا مدول یانگ (Young's modulus) نامیده می‌شود. ثابت ν را نسبت پواسن (Poisson's ratio) می‌نامند. روابط بین این ثابت‌ها عبارتند از:



گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

8/28

$$\lambda = \frac{2G\nu}{1-2\nu} = \frac{G(E-2G)}{3G-E} = K - \frac{2}{3}G = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$= \frac{2K\nu}{1+\nu} = \frac{3K(3K-E)}{9K-E},$$

$$G = \frac{\lambda(1-2\nu)}{2\nu} = \frac{3}{2}(K-\lambda) = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{3K(1-2\nu)}{2(1+\nu)} = \frac{3KE}{9K-E}$$

$$(9) \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+G)} = \frac{\lambda}{(3K-\lambda)} = \frac{E}{2G} - 1 = \frac{3K-2G}{2(3K+G)} = \frac{3K-E}{6K}$$

$$E = \frac{G(3\lambda+2G)}{\lambda+G} = \frac{\lambda(1+\nu)(1-2\nu)}{\nu} = \frac{9K(K-\lambda)}{3K-\lambda} = 2G(1+\nu)$$

$$= \frac{9KG}{3K+G} = 3K(1-2\nu),$$

$$K = \lambda + \frac{2}{3}G = \frac{\lambda(1+\nu)}{3\nu} = \frac{2G(1+\nu)}{3(1-2\nu)} = \frac{GE}{3(3G-E)} = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

دو رابطه زیر را که مکرراً ظاهر می شوند به این ها اضافه می کنیم:

$$(10) \quad \frac{G}{(\lambda+G)} = 1-2\nu, \quad \frac{\lambda}{(\lambda+2G)} = \frac{\nu}{1-\nu}$$

معادله (8) به شکل توسعه یافته عبارت است از:

$$e_{xx} = \frac{1}{E}[\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})], \quad e_{xy} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{xy} = \frac{1}{2G}\sigma_{xy}$$

$$(11) \quad e_{yy} = \frac{1}{E}[\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})], \quad e_{yz} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{yz} = \frac{1}{2G}\sigma_{yz}$$

$$e_{zz} = \frac{1}{E}[\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})], \quad e_{zx} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{zx} = \frac{1}{2G}\sigma_{zx}$$

از رابطه (7) تنش ها را نیز می توان بر حسب کرنش ها نوشت:

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}[(1-\nu)e_{xx} + \nu(e_{yy} + e_{zz})], \quad \sigma_{xy} = 2Ge_{xy}$$

$$(12) \quad \sigma_{yy} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}[(1-\nu)e_{yy} + \nu(e_{xx} + e_{zz})], \quad \sigma_{xz} = 2Ge_{xz}$$

$$\sigma_{zz} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}[(1-\nu)e_{zz} + \nu(e_{xx} + e_{yy})], \quad \sigma_{zy} = 2Ge_{zy}$$

فصل 7- تئوری الاستیسیته خطی (Linearized Theory of Elasticity)



گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

7.1. معادلات اساسی الاستیسیته برای اجسام همسانگرد هموزن (Homogeneous Isotropic Bodies)

یک جسم الاستیک یک حالت تنش صفر دارد که وقتی تنش‌ها برداشته شود جسم به آن حالت برمی‌گردد. تمامی تنش‌ها، کرنش‌ها و تغییرمکان‌های ذرات از این حالت صفر تنش اندازه‌گیری می‌شوند. مقادیر آن‌ها از صفر در آن حالت سنجیده می‌شود: یعنی مقادیر آن‌ها در حالت بدون تنش صفر است.

دو راه برای بیان تغییرشکل یک جسم وجود دارد: بیان مادی (material) و فضایی (spatial) (بخش 5.2 را ببینید). حرکت یک محیط پیوسته با میدان سرعت لحظه‌ای $v_i(x_1, x_2, x_3, t)$ بیان می‌شود.

برای بیان کرنش در یک جسم، یک میدان تغییرمکان $u_i(x_1, x_2, x_3, t)$ تعریف می‌شود که عبارت است از تغییرمکان یک ذره در لحظه t و موقعیت x_1, x_2, x_3 نسبت به موقعیت حالت طبیعی‌اش.

برای میدان تغییرمکان، سنجه‌های کرنش متفاوتی می‌توان تعریف کرد. تانسور کرنش آلمانسی بر اساس معادله (4.2:4) بر حسب $u_i(x_1, x_2, x_3, t)$ تعریف می‌شود.

$$(1) \quad e_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right]$$



12/28

تغییر مکان ذره u_i تابعی از زمان و موقعیت است. **سرعت** ذره با مشتق مادی تغییر مکان به دست می‌آید.

$$(2) \quad \frac{Du_i}{Dt} = v_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

شتاب ذره با مشتق مادی معادله سرعت (5.2:7) به دست می‌آید.

$$(3) \quad \frac{Dv_i}{Dt} = \alpha_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

حرکت جسم باید از **معادله پیوستگی** (5.4:3)

$$(4) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} = 0$$

و **معادله حرکت** (5.5:7)

$$(5) \quad \rho \alpha_i = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + X_i$$

تبعیت کند. افزون بر معادلات میدان (4) و (5)، **الاستیسته خطی** بر اساس **قانون هوک** است. برای مصالح **هموزن همسانگرد**، این قانون معادله (6.2:7) است.

$$(6) \quad \sigma_{ij} = \lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2G e_{ij}$$

که λ و G ثابت‌هایی مستقل از مختصات فضایی‌اند.

13/28



جملات غیرخطی مشهور در معادلات (3)-(1) ریشه مشکلات در تئوری الاستیسته‌اند. برای چاره اندیشی، مجبور به **خطی سازی** با در نظر گرفتن **تغییر مکان‌های کوچک و سرعت‌های کم** هستیم؛ یعنی با محدود کردن خود به مقادیر به اندازه‌ای کوچک v_i و u_i که جملات غیرخطی معادلات (3)-(1) قابل چشم پوشی باشند. در چنین **تئوری خطی** داریم:

$$(7) \quad e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$$

$$(8) \quad v_i = \frac{\partial u_i}{\partial t}, \quad \alpha_i = \frac{\partial v_i}{\partial t}$$

در همه مواردی که در ادامه بحث می‌شود، بجز موارد استثنایی که بیان خواهد شد، خود را محدود به معادلات خطی می‌کنیم. خوشبختانه، نتایج مفید بسیاری از این تئوری خطی می‌تواند به دست آید.

معادلات (6)-(1) یا (8)-(4) جمعاً ۲۲ معادله برای ۲۲ مجهول $\rho, u_i, v_i, \alpha_i, e_{ij}, \sigma_{ij}$ هستند. در **تئوری تغییر مکان‌های کوچک**، می‌توانیم σ_{ij} را با جایگزینی معادله (6) در (5) و استفاده از معادله (7) حذف کرد که معادله مشهور **ناویر (Navier)** به دست می‌آید.

$$\rho \alpha_i = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + X_i \rightarrow \rho \alpha_i = \frac{\partial}{\partial x_j} (\lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2G e_{ij}) + X_i$$



14/28

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2G e_{ij}) + X_i = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x_i} (\lambda e_{kk}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (2G e_{ij}) + X_i = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\lambda \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{1}{2} (u_{j,j} + u_{j,j}) \right] + 2G \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \right] + X_i = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\lambda u_{j,ji} + G(u_{i,jj} + u_{j,ij}) + X_i = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$(9) \quad Gu_{i,jj} + (\lambda + G)u_{j,ji} + X_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$$

معادله حرکت بر حسب تغییر مکان‌ها
(با فرض تغییر مکان‌های کوچک)



گرددآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

15/28

این معادله را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$(10) \quad G \nabla^2 u_i + (\lambda + G) e_{,i} + X_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$$

که

$$(11) \quad e = u_{j,j}$$

$$(12) \quad \nabla^2 u_i = u_{i,jj}$$

کمیت e دیورژانس بردار تغییر مکان u_i است و نامتغیر اول کرنش و اگر کرنش‌ها کوچک باشند اتساع (dilation) است. و ∇^2 عملگر لاپلاس است. اگر به جای x_1, x_2, x_3 از x, y, z استفاده کنیم داریم:

$$(13) \quad e = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$(14) \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

لوه (Love) معادله (10) را به شکل زیر نوشت:

$$(15) \quad G \nabla^2 (u, v, w) + (\lambda + G) \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) e + (X, Y, Z) = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} (u, v, w)$$

که شکل خلاصه سه معادله به شکل زیر است.

$$(16) \quad G \nabla^2 u + (\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial x} + X = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$



گرددآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

16/28

این را می توان به شکل زیر نوشت.

$$(17) \quad G(\nabla^2 u + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial x}) + X = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

اگر بردار چرخش را به شکل زیر تعریف کنیم،

$$(18) \quad (\omega_x, \omega_y, \omega_z) \equiv \frac{1}{2} \text{curl}(u, v, w) \\ \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

و از برابری زیر استفاده کنیم،

$$(19) \quad \nabla^2(u, v, w) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) e - 2 \text{curl}(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$$

اثبات رابطه (19):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} e - 2 \text{curl} \omega_x &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - 2 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \omega_z}{\partial y} - \frac{\partial \omega_y}{\partial z} \right) \right] \\ &= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) - 2 \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] \right\} \\ &= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \nabla^2 u \end{aligned}$$

17/28

آنگاه، معادله (10) را می توان به شکل زیر نوشت.

$$G \nabla^2 u_i + (\lambda + G) e_{,i} + X_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$$

برای $i=1$ داریم:

$$G \left(\frac{\partial}{\partial x} e - 2 \text{curl} \omega_x \right) + (\lambda + G) \frac{\partial}{\partial x} e + X = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$-2G \text{curl} \omega_x + (\lambda + 2G) \frac{\partial}{\partial x} e + X = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

و یا به طور کلی و برای هر سه مؤلفه داریم:

$$(20) \quad (\lambda + 2G) \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) e - 2G \text{curl}(\omega_x, \omega_y, \omega_z) + (X, Y, Z) = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} (u, v, w)$$



گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

18/28

7.2- تعادل یک جسم الاستیک تحت نیروی کالبدی صفر

شرایط تعادل استاتیکی یک جسم الاستیک را در نظر بگیرید. اگر نیروی کالبدی صفر باشد، $X_i = 0$ ، آنگاه با دیورژانس گیری از معادله (7.1:9) داریم:

$$Gu_{i,jj} + (\lambda + G)u_{j,ji} + X_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$$

$$Gu_{i,jji} + (\lambda + G)u_{j,jii} = 0$$

$$Gu_{i,jji} + (\lambda + G)u_{j,jii} = 0 \rightarrow Gu_{i,jji} + (\lambda + G)u_{i,jji} = 0 \rightarrow Gu_{i,jji} + (\lambda + G)u_{i,jji} = 0 \quad \text{یا}$$

$$(1) \quad (u_{j,j})_{,ii} = 0$$

این معادله به شکل بسط یافته برای مختصات کارتزین متعامد عبارتست از:

$$(2) \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) e = 0 \quad \text{یا} \quad \nabla^2 e = 0$$

معادله (2) یک معادله لاپلاس است. تابعی که معادله (2) را برآورده سازد تابع هارمونیک نامیده می‌شود. بنابراین، هر گاه نیروی کالبدی صفر باشد، اتساع e یک تابع هارمونیک است. اما از رابطه (7.1:1) $\sigma_{\alpha\alpha} = 3Ke_{\alpha\alpha}$ داریم:

$$\sigma_{\alpha\alpha} = 3Ke_{\alpha\alpha} \rightarrow \sigma_{\alpha\alpha} = 3 \frac{3\lambda + 2G}{3} e_{\alpha\alpha} \rightarrow \sigma_{\alpha\alpha} = (3\lambda + 2G)e_{\alpha\alpha}$$

19/28



یا

$$(3\lambda + 2G)e = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = 3\sigma$$

که σ عبارت است از تنش متوسط. بنابراین تنش متوسط هم یک تابع هارمونیک است:

$$(3) \quad \nabla^2 \sigma = 0$$

اگر در معادله (7.1:16)، $X = 0, \partial^2 u / \partial t^2 = 0$ قرار دهیم داریم:

$$Gu_{i,jj} + (\lambda + G)u_{j,ji} + X_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \rightarrow Gu_{i,jj} + (\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial x_i} = 0 \rightarrow G \nabla^2 u + (\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial x_i} = 0$$

اگر از این معادله لاپلاسی بگیریم و از معادله (7.1:11) $e = u_{j,j}$ استفاده کنیم داریم:

$$G \nabla^2 \nabla^2 u + (\lambda + G) \frac{\partial}{\partial x_i} \nabla^2 e = 0$$

با استفاده از معادله (2) $\nabla^2 e = 0$ ، این معادله دلالت دارد بر

$$(4) \quad \nabla^4 u = 0 \quad \text{معادله بای هارمونیک (Biharmonic)}$$

$$(5) \quad \nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} + \frac{\partial^4}{\partial z^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + 2 \frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial z^2} + 2 \frac{\partial^4}{\partial z^2 \partial x^2}$$

معادله (4) معادله بای هارمونیک و حل آن تابع بای هارمونیک نامیده می‌شود. بنابراین، مؤلفه‌های تغییر مکان u بای هارمونیک است.

به طور مشابه، مؤلفه‌های v و w نیز بای هارمونیک‌اند.

20/28



در نتیجه هرگاه نیروی کالبدی صفر باشد، هر مؤلفه کرنش و هر مؤلفه تنش ترکیب خطی مشتقات اول u, v, w هستند: $e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$ و $\sigma_{ij} = \lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2G e_{ij}$ و همه آنها توابع بای هارمونیک‌اند:

$$(6) \quad \nabla^4 \sigma_{ij} = 0$$

$$(7) \quad \nabla^4 e_{ij} = 0$$



گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

21/28

معادلات سازگاری بلترامی-میشل (Beltrami-Michell Compatibility Equations)

(معادلات سازگاری تنش‌ها برای حالتی که نیروی کالبدی وجود ندارد)



گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

با استفاده از قانون هوک، معادله سازگاری

$$(1) \quad e_{ij,kl} + e_{kl,ij} - e_{ik,jl} - e_{jl,ik} = 0$$

می‌تواند مستقیماً بر اساس مؤلفه‌های تنش بیان شود. با جایگزینی

$$e_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \theta \delta_{ij}, \quad \theta = \sigma_{kk}$$

در معادله (1) داریم:

$$\frac{1+\nu}{E} (\sigma_{ij,kl} + \sigma_{kl,ij} - \sigma_{ik,jl} - \sigma_{jl,ik}) = \frac{\nu}{E} (\delta_{ij} \theta_{,kl} + \delta_{kl} \theta_{,ij} - \delta_{ik} \theta_{,jl} - \delta_{jl} \theta_{,ik})$$

$$(2) \quad \sigma_{ij,kl} + \sigma_{kl,ij} - \sigma_{ik,jl} - \sigma_{jl,ik} = \frac{\nu}{1+\nu} (\delta_{ij} \theta_{,kl} + \delta_{kl} \theta_{,ij} - \delta_{ik} \theta_{,jl} - \delta_{jl} \theta_{,ik})$$

از آنجا که تنها شش معادله از 81 معادله (1) به طور خطی مستقل‌اند، برای معادله (2) نیز همین مطلب صحیح است. اگر معادلات (2) را با قرار دادن $k=l$ به طور خطی جمع ببندیم (انقباض (contraction) k و l)، داریم:

$$(3) \quad \sigma_{ij,kk} + \sigma_{kk,ij} - \sigma_{ik,jk} - \sigma_{jk,ik} = \frac{\nu}{1+\nu} (\delta_{ij} \theta_{,kk} + \delta_{kk} \theta_{,ij} - \delta_{ik} \theta_{,jk} - \delta_{jk} \theta_{,ik})$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری



23/28

که نه معادله است که شش معادله آن از هم مستقلند زیرا بر حسب i و j متقارن است. بنابراین تعداد معادلات مستقل دیگر کاهش نمی‌یابد و معادلات (2) و (3) معادلند. از آنجا که $\sigma_{kk} = \theta$ و $\sigma_{ij,kk} = \nabla^2 \sigma_{ij}$ ، اگر از **معادله تعادل** استفاده کنیم و $\sigma_{ik,kj}$ را با $X_{i,j}$ جایگزین کنیم، معادله (3) را می‌توان به شکل زیر نوشت.

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + X_i = 0 \rightarrow \sigma_{ik,k} = -X_i \rightarrow \sigma_{ik,kj} = -X_{i,j}$$

$$(3) \quad \nabla^2 \sigma_{ij} + \theta_{,ij} + X_{i,j} + X_{j,i} = \frac{\nu}{1+\nu} (\delta_{ij} \nabla^2 \theta + 3\theta_{,ij} - \delta_{ik} \theta_{,jk} - \delta_{jk} \theta_{,ik})$$

$$= \frac{\nu}{1+\nu} (\delta_{ij} \nabla^2 \theta + 3\theta_{,ij} - \theta_{,ji} - \theta_{,ij}) = \frac{\nu}{1+\nu} (\delta_{ij} \nabla^2 \theta + \theta_{,ij})$$

$$(4) \quad \nabla^2 \sigma_{ij} + \frac{1}{1+\nu} \theta_{,ij} - \frac{\nu}{1+\nu} \delta_{ij} \nabla^2 \theta = -(X_{i,j} + X_{j,i})$$

که X_i نیروی کالبدی بر واحد حجم است. در مسائل دینامیکی نیروی اینرسی باید در X_i لحاظ شود. با انقباض $i=j$ معادله (4)، رابطه بین $\nabla^2 \theta$ و $X_{i,i}$ به دست می‌آید.

$$\nabla^2 \sigma_{ii} + \frac{1}{1+\nu} \theta_{,ii} - \frac{\nu}{1+\nu} \delta_{ii} \nabla^2 \theta = -(X_{i,i} + X_{i,i})$$



گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

24/28

$$\nabla^2 \theta + \frac{1}{1+\nu} \theta_{,ii} - \frac{\nu}{1+\nu} 3\nabla^2 \theta = -2X_{i,i} \rightarrow (1 + \frac{1}{1+\nu} - \frac{3\nu}{1+\nu}) \nabla^2 \theta = -2X_{i,i} \rightarrow$$

$$\rightarrow \nabla^2 \theta = -\frac{1+\nu}{1-\nu} X_{i,i}$$

اگر از این به جای جمله سوم در معادله (4)

$$(4) \quad \nabla^2 \sigma_{ij} + \frac{1}{1+\nu} \theta_{,ij} - \frac{\nu}{1+\nu} \delta_{ij} \nabla^2 \theta = -(X_{i,j} + X_{j,i})$$

استفاده کنیم، داریم:

$$\nabla^2 \sigma_{ij} + \frac{1}{1+\nu} \theta_{,ij} - \frac{\nu}{1+\nu} \delta_{ij} \left(-\frac{1+\nu}{1-\nu} X_{k,k} \right) = -(X_{i,j} + X_{j,i})$$

$$(5) \quad \nabla^2 \sigma_{ij} + \frac{1}{1+\nu} \theta_{,ij} = -\frac{\nu}{1-\nu} \delta_{ij} X_{k,k} - (X_{i,j} + X_{j,i})$$

معادلات سازگاری بلترامی-میشل



گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

25/28

$$(5) \quad \nabla^2 \sigma_{ij} + \frac{1}{1+\nu} \theta_{,ij} = -\frac{\nu}{1-\nu} \delta_{ij} X_{k,k} - (X_{i,j} + X_{j,i})$$

این معادلات به شکل بسط یافته عبارتند از:

$$\nabla^2 \sigma_{xx} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = -\frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) - 2 \frac{\partial X}{\partial x},$$

$$\nabla^2 \sigma_{yy} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = -\frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) - 2 \frac{\partial Y}{\partial y},$$

$$(6)^* \quad \nabla^2 \sigma_{zz} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = -\frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) - 2 \frac{\partial Z}{\partial z},$$

$$\nabla^2 \sigma_{yz} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y \partial z} = -\left(\frac{\partial Y}{\partial z} + \frac{\partial Z}{\partial y} \right),$$

$$\nabla^2 \sigma_{zx} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z \partial x} = -\left(\frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial z} \right),$$

$$\nabla^2 \sigma_{xy} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} = -\left(\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial x} \right).$$



گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

* در کتاب تصحیح شود.

26/28

این معادلات توسط میشل (Michell) در سال 1900 و برای حالتی که نیروی کالبدی نداشته باشیم، توسط بلترامی (Beltrami) در سال 1982 به دست آمده‌اند. این معادلات به عنوان **معادلات سازگاری بلترامی-میشل (Beltrami-Michell)** نامیده می‌شوند.

برای یک ناحیه پیوسته‌ای که معادلات سازگاری بلترامی-میشل ارضا شوند، تنش‌های سیستم σ_{ij} از میدان پیوسته تغییر مکان‌ها قابل محاسبه‌اند.



گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

27/28

مسائل زیر را حل کرده و تا دو هفته دیگر تحویل فرمایید:

7) 1,2,7,14-19

مسائل از کتاب دوم Fung (چاپ ۱۹۷۴) که از سایت آموزش مجازی قابل دسترسی است.

تمرین‌های قبلی:

2) 1,2,5,6,10, and A1-A12, 2) 12-32 3) 8,11,13,14,

3) 1,2,3, 4) 2,16,17,19 3) 6-8 3) 9

5) 3,12-15,17 6) 2-4,6 5) 3 10) 9,10

در مجموع ۷۴ تمرین



گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

28/28