

CHAPTER

7

MECHANICS OF MATERIALS

Third Edition

Ferdinand P. Beer
E. Russell Johnston, Jr.
John T. DeWolf

Lecture Notes:
J. Walt Oler
Texas Tech University

تبدیل تنش

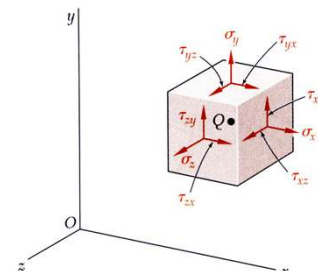
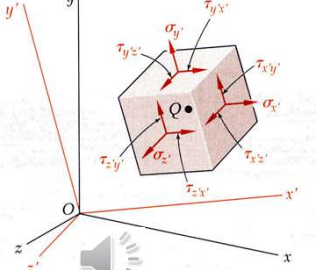
© M.H. Abolbashari, Ferdowsi University of Mashhad

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

MECHANICS OF MATERIALS

Beer • Johnston • DeWolf

مقدمه

- با فرض تقارن تانسور تنش، کلی‌ترین حالت تنش در یک **نقطه** را می‌توان با ۶ مؤلفه بیان کرد.
- تنش‌های قائم: $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$
- تنش‌های برشی: $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$
- (Note: $\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{zx} = \tau_{xz}$)
- اگر محورهای مختصات دوران کند، همان حالت تنش با ۶ مؤلفه دیگر بیان می‌شود.
- $\sigma_{x'}, \sigma_{y'}, \sigma_{z'}$
- $\tau_{x'y'}, \tau_{y'z'}, \tau_{z'x'}$
- اولین قسمت این فصل در باره این است که این مؤلفه‌ها چگونه با چرخش محورها انتقال پیدا می‌کنند (تبدیل می‌شوند) و **ماکزیمم آن‌ها چیست؟**
- قسمت دوم فصل مربوط به انتقال مؤلفه‌های کرنش است.

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

7 - 2/47

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مقدمه

- **تنش صفحه‌ای** - حالت تنشی که دو وجه یک المان مکعبی عاری از تنش باشند **تنش صفحه‌ای** می‌گویند. تحلیل تنش مخازن جدار نازک تحت فشار کاربرد مهمی از **تنش صفحه‌ای** است. یک نمونه از حالت **تنش صفحه‌ای** به شکل زیر بیان می‌شود:

$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ and $\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$

- در یک صفحه نازک که در صفحه میانی‌اش تحت نیروهای صفحه‌ای قرار گرفته **حالت تنش صفحه‌ای** اتفاق می‌افتد.
- همچنین در صفحه آزاد یک المان سازه‌ای یا یک قطعه از یک ماشین نیز حالت **تنش صفحه‌ای** داریم؛ یعنی در هر نقطه‌ای از سطح که محل اثر نیروی خارجی نباشد.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 7 - 3/47

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

تبدیل تنش صفحه‌ای

- شرایط تعادل یک المان منشوری که وجوه آن عمود بر محوره‌ای x, y و x', y' است را در نظر بگیرید.

$$\sum F_{x'} = 0 = \sigma_{x'} \Delta A - \sigma_x (\Delta A \cos \theta) \cos \theta - \tau_{xy} (\Delta A \cos \theta) \sin \theta - \sigma_y (\Delta A \sin \theta) \sin \theta - \tau_{xy} (\Delta A \sin \theta) \cos \theta$$

$$\sum F_{y'} = 0 = \tau_{x'y'} \Delta A + \sigma_x (\Delta A \cos \theta) \sin \theta - \tau_{xy} (\Delta A \cos \theta) \cos \theta - \sigma_y (\Delta A \sin \theta) \cos \theta + \tau_{xy} (\Delta A \sin \theta) \sin \theta$$

- معادلات فوق را می‌توان با استفاده از روابط مثلثاتی مقابل به شکل زیر بازنویسی و دو مجهول تنش قائم و برشی را به دست آورد.
- قبلاً در استاتیک برای ممان اینرسی هم شبیه این روابط را داشتیم.

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta$$

روابط تبدیل فوق صرف نظر از رفتار الاستیک و یا خمیری اجسام به دست آمد و به همین دلیل کلی است.

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$$

$$\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

$$I_{x'} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta - I_{xy} \sin 2\theta$$

$$I_{x'y'} = +\frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\theta + I_{xy} \cos 2\theta$$

• اگر در معادله $\sigma_{x'}$ به جای θ مقدار $\theta + 90^\circ$ قرار دهیم، به دست می‌آید.

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 7 - 4/47

Third Edition

MECHANICS OF MATERIALS

Beer • Johnston • DeWolf

تنش‌های اصلی (تنش‌های قائم ماکزیمم و مینیمم)

- معادلات قبلی را می‌توان ترکیب کرد و به شکل یک معادله پارامتری دایره نوشت:

$$(\sigma_{x'} - \sigma_{ave})^2 + \tau_{x'y'}^2 = R^2$$

که در آن

$$\sigma_{ave} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \quad R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

همچنین از شکل می‌توان نتیجه گرفت که σ_{max} در نقطه A و σ_{min} در B قرار دارد و:

$$\sigma_{max} = \sigma_{ave} + R, \quad \sigma_{min} = \sigma_{ave} - R$$

یا:

$$\sigma_{max,min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

زاویه (صفحه‌ای) که در آن تنش‌ها ماکزیمم یا مینیمم‌اند (اصلی) و مقادیر آن‌ها را از معادلات جبری هم می‌توان به دست آورد. اگر از معادله $\sigma_{x'}$ نسبت به θ مشتق بگیریم و برابر صفر قرار دهیم، داریم:

$$\frac{\partial \sigma_{x'}}{\partial \theta} = -2\sigma_x \sin \theta \cos \theta + 2\sigma_y \sin \theta \cos \theta + 2\tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = 2\tau_{x'y'} \equiv 0$$

$$\tau_{x'y'} = 0 \rightarrow \tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

7 - 5/47

Third Edition

MECHANICS OF MATERIALS

Beer • Johnston • DeWolf

تنش‌های اصلی (تنش‌های قائم ماکزیمم و مینیمم)

- که دو زاویه با اختلاف ۹۰ درجه را نتیجه می‌دهد زیرا:

$$\tan 2\theta_p = \tan(2\theta_p + \pi)$$

- تنش‌های اصلی در صفحات اصلی تنش که در آن‌ها تنش برشی صفر است اتفاق می‌افتد.
- مهم: برای تشخیص اینکه کدام زاویه (θ_p یا $\theta_p + 90$) مربوط به تنش قائم ماکزیمم و کدام مربوط به تنش قائم مینیمم است باید مقدار زاویه را در رابطه $\sigma_{x'}$ قرار دهیم.
- اگر تنش‌های اولیه همه مثبت باشند و قطر XY را با مختصات زیر مشخص کنیم:

$$X \left\{ \begin{matrix} \sigma_x \\ -\tau_{xy} \end{matrix} \right., \quad Y \left\{ \begin{matrix} \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{matrix} \right.$$

جهت چرخش روی دایره و المان یکسان خواهد بود.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

7 - 6/47

Third Edition

MECHANICS OF MATERIALS

Beer • Johnston • DeWolf

تنش برشی ماکزیمم

با توجه به معادله $(\sigma_{x'} - \sigma_{ave})^2 + \tau_{x'y'}^2 = R^2$ تنش برشی ماکزیمم برای حالت $\sigma_{x'} = \sigma_{ave}$ اتفاق می افتد.

$$\tau_{\max, \min} = R = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\tan 2\theta_s = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}$$

که دو زاویه با اختلاف ۹۰ درجه را نتیجه می دهد. اگر با رابطه

$$\tan 2\theta_s = -\cotan 2\theta_p \quad \tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

داریم:

$$\theta_p - \theta_s = 45^\circ \quad \sigma' = \sigma_{ave} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

نتایج:

۱- تنش برشی حداکثر تنها از لحاظ علامت با تنش برشی حداقل فرق می کند.

۲- مقادیر تنش برشی موجود در صفحات عمود بر هم از نظر عدد با هم مساویند. زیرا $\tan(2\theta_s + \pi)$ با $\tan 2\theta_s$ یکی است؛ و یا صفحاتی که با هم زاویه ۹۰ درجه می سازند دارای تنش های برشی یکسان هستند.

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

7 - 7/47

Third Edition

MECHANICS OF MATERIALS

Beer • Johnston • DeWolf

تنش برشی ماکزیمم (ادامه)

۳- اگر در رابطه تنش برشی ماکزیمم $(\tau_{\max} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2})$ تنش های قائم، اصلی باشند، داریم:

$$\tau_{\max} = \pm \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

۴- اگر $\sigma_x \neq -\sigma_y$ باشد، آنگاه همیشه همراه تنش های برشی ماکزیمم، یک تنش قائم $\sigma' = \sigma_{ave}$ وجود دارد که مقدار آن روی صفحات عمود بر هم نیز مساویست. (به قطر **DE** در شکل اسلاید قبل توجه کنید)

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالشیری

7 - 8/47

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

یک تبدیل مهم تنش: تبدیل تنش برشی خالص به تنش‌های اصلی

$\sigma_{\max, \min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$
 $\sigma_{\max, \min} = \pm \tau_{xy} = |\tau_{xy}|$
 $|\sigma_{\max}| = |\sigma_{\min}| = |\tau_{xy}|$

$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \infty$, $2\theta_p = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$, $\theta_p = 45^\circ, 135^\circ$

مهم: اگر زاویه ۴۵ درجه را در رابطه $\sigma_{x'}$ قرار دهیم، $\sigma_{x'} = \sigma_1 = \tau_{xy}$ به دست می‌آید. یعنی کششی است.

نتیجه مهم: ۱- وقتی تنش برشی خالص روی یک جزء کوچک اثر می‌کند، این تنش‌ها باعث کشش در امتداد یک قطر (DF) و فشار در امتداد قطر دیگر می‌شود.

۲- هر المان تحت تنش برشی خالص نشانگر وضعیت صفحه تنش برشی ماکزیمم یا مینیمم است. زیرا:

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 7 - 9/47

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مثال 7.1

حل:

- میزان چرخش المان برای تنش‌های اصلی را از رابطه زیر بیابید.

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

- تنش‌های اصلی را از رابطه زیر بیابید.

$$\sigma_{\max, \min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

- از روابط زیر تنش برشی ماکزیمم و تنش قائم مربوطه را محاسبه کنید.

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma' = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

Fig. 7.13

برای حالت تنش صفحه‌ای نشان داده شده، الف) صفحات اصلی، ب) تنش‌های اصلی، ج) تنش برشی ماکزیمم و تنش قائم مربوط به آن را به دست آورید.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 7 - 10/47

MECHANICS OF MATERIALS

Beer • Johnston • DeWolf

مثال 7.1 (ادامه)

Fig. 7.13

$\sigma_x = +50 \text{ MPa}$ $\tau_{xy} = +40 \text{ MPa}$
 $\sigma_y = -10 \text{ MPa}$

Fig. 7.14

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

حل: زاویه چرخش المان برای حالت تنش‌های اصلی را از رابطه زیر به دست آورید.

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2(+40)}{50 - (-10)} = 1.333$$

$$2\theta_p = 53.1^\circ, 233.1^\circ$$

$$\theta_p = 26.6^\circ, 116.6^\circ$$

• تنش‌های اصلی را از رابطه زیر به دست آورید.

$$\sigma_{\max, \min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$= 20 \pm \sqrt{(30)^2 + (40)^2}$$

$\sigma_{\max} = 70 \text{ MPa}$
 $\sigma_{\min} = -30 \text{ MPa}$

مربوط به کدام زاویه است؟

دلیل اینکه $\sigma_{\max}$ در زاویه 26.6 درجه است این است که اگر در رابطه $\sigma_{x'}$ به جای زاویه 26.6 قرار دهیم $\sigma_{\max} = 70 \text{ MPa}$ به دست می‌آید.

7 - 11/47

MECHANICS OF MATERIALS

Beer • Johnston • DeWolf

مثال 7.1 (ادامه)

Fig. 7.13

$\sigma_x = +50 \text{ MPa}$ $\tau_{xy} = +40 \text{ MPa}$
 $\sigma_y = -10 \text{ MPa}$

Fig. 7.16

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

• تنش برشی ماکزیمم را از روابط زیر محاسبه کنید.

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$= \sqrt{(30)^2 + (40)^2}$$

$\tau_{\max} = 50 \text{ MPa}$

مربوط به کدام زاویه است؟

$$\theta_s = \theta_p - 45$$

$$\theta_s = -18.4^\circ, 71.6^\circ$$

دلیل اینکه $\tau_{\max} = +50 \text{ MPa}$ در زاویه -18.4 درجه است این است که اگر در $\tau_{xy'}$ به جای زاویه -18.4 قرار دهیم $\tau_{\max} = +50 \text{ MPa}$ به دست می‌آید.

• تنش قائم مربوطه عبارت است از:

$$\sigma' = \sigma_{ave} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{50 - 10}{2}$$

$\sigma' = 20 \text{ MPa}$

7 - 12/47

MECHANICS OF MATERIALS

Beer • Johnston • DeWolf

مسئله نمونه 7.2

حل:

- یک سیستم نیرو-کوپل معادل در مرکز مقطع عرضی که از H می‌گذرد به دست آورید.
- تنش‌های قائم و برشی در H را به دست آورید.
- صفحات اصلی را به دست آورده و تنش‌های اصلی را محاسبه کنید.

یک نیروی افقی $P=150 \text{ lb}$ به انتهای دسته D اعمال می‌شود. مطلوب است: الف) تنش‌های قائم و برشی روی المانی در نقطه H که اضلاع آن موازی محورهای X و Y است، ب) صفحات اصلی و تنش‌های اصلی در نقطه H.

7 - 13/47

MECHANICS OF MATERIALS

Beer • Johnston • DeWolf

مسئله نمونه 7.2 (ادامه)

حل:

- یک سیستم نیرو-کوپل معادل در مرکز مقطع عرضی که از H می‌گذرد به دست آورید.
- تنش‌های قائم و برشی در H را به دست آورید.

$P = 150 \text{ lb}$
 $T = (150 \text{ lb})(18 \text{ in}) = 2.7 \text{ kip} \cdot \text{in}$
 $M_x = (150 \text{ lb})(10 \text{ in}) = 1.5 \text{ kip} \cdot \text{in}$

تنش‌های قائم و برشی در H را به دست آورید.

$$\sigma_y = + \frac{M_x c}{I_x} = + \frac{(1.5 \text{ kip} \cdot \text{in})(0.6 \text{ in})}{\frac{1}{4} \pi (0.6 \text{ in})^4} = 8.84 \text{ ksi}$$

$$\tau_{xy} = + \frac{Tc}{J} = + \frac{(2.7 \text{ kip} \cdot \text{in})(0.6 \text{ in})}{\frac{1}{2} \pi (0.6 \text{ in})^4} = 7.96 \text{ ksi}$$

$\sigma_x = 0 \quad \sigma_y = +8.84 \text{ ksi} \quad \tau_{xy} = +7.96 \text{ ksi}$

7 - 14/47

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مسئله نمونه 7.2 (ادامه)

• صفحات اصلی را به دست آورده و تنش‌های اصلی را محاسبه کنید.

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2(7.96)}{0 - 8.84} = -1.8$$

$$2\theta_p = -61.0^\circ, 119^\circ$$

$\theta_p = -30.5^\circ, 59.5^\circ$

$$\sigma_{\max, \min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$= \frac{0 + 8.84}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{0 - 8.84}{2}\right)^2 + (7.96)^2}$$

$\sigma_{\max} = +13.52 \text{ ksi}$
 $\sigma_{\min} = -4.68 \text{ ksi}$

دلیل اینکه $\sigma_{\min}$ در زاویه -30.5° درجه است این است که اگر در رابطه σ_x به جای زاویه -30.5° قرار دهیم $\sigma_{\min} = -4.68 \text{ MPa}$ به دست می‌آید.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشیری
© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 7 - 15/47

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

دایره مور برای تنش صفحه‌ای

• با توجه به اهمیت فیزیکی دایره مور برای تنش صفحه‌ای، آن را می‌توان با هندسه ساده‌ای به کار برد و مقادیر ماکزیمم و مینیمم را به طور ترسیمی تخمین زد و یا محاسبه کرد.

• برای یک حالت تنش صفحه‌ای مشخص با $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ نقاط X و Y را مشخص کرده و دایره‌ای به مرکز C رسم کنید.

$$X \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ -\tau_{xy} \end{Bmatrix}, Y \begin{Bmatrix} \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

معنای این کار این است که اگر چرخش محورهای مختصات را از X شروع کنیم به هر نقطه‌ای برسیم و مقادیر را از دایره مور بخوانیم، مقادیر واقعی با توجه به مختصات فوق خواهد بود.

$$OC = \sigma_{ave} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \quad R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

• تنش‌های اصلی در A و B به شکل زیر به دست می‌آیند.

$$\sigma_{\max, \min} = \sigma_{ave} \pm R$$

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

خیلی مهم: جهت چرخش Ox به طرف Oa مانند CX به طرف CA است. اگر قطر MN را می‌گرفتیم این طور نبود.

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 7 - 16/47

MECHANICS OF MATERIALS

Beer • Johnston • DeWolf

دایره مور برای تنش صفحه‌ای (ادامه)

- از آنجا که دایره مور منحصر به فرد است، حالت تنش در جهت‌های دیگر را می‌توان به وسیله آن به دست آورد.
- برای به دست آوردن حالت تنش در جهتی که با محورهای XY زاویه θ می‌سازد، باید قطر جدیدی مانند $X'Y'$ که با XY زاویه 2θ می‌سازد را رسم کنیم.
- نکته مهم در تعیین علامت تنش برشی $\tau_{x'y'}$ با توجه به شکل: $-\tau_{x'y'} \rightarrow - \therefore \tau_{x'y'} \rightarrow +$
- تنش‌های قائم و برشی از مختصات $X'Y'$ به دست می‌آیند.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

7 - 17/47

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

MECHANICS OF MATERIALS

Beer • Johnston • DeWolf

دایره مور برای تنش صفحه‌ای (دو حالت خاص)

• دایره مور برای بار محوری مرکزی

المان در حالت تنش اصلی

$\sigma_x = \frac{P}{A}, \quad \sigma_y = \tau_{xy} = 0$

المان در حالت تنش برشی ماکزیمم

$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = \frac{P}{2A}$

• دایره مور برای بار پیچشی

المان در حالت تنش برشی خالص (که تنش برشی ماکزیمم هم هست)

$\sigma_x = \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = \frac{Tc}{J}$

المان در حالت تنش اصلی

$\sigma_x = \sigma_y = \frac{Tc}{J}, \quad \tau_{xy} = 0$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

7 - 18/47

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مثال 7.3: مثال 7.1 را با استفاده از دایره مور حل کنید.

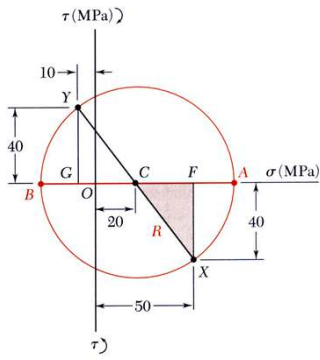
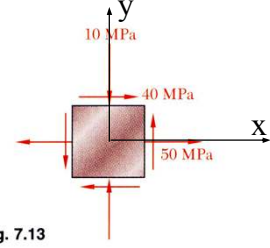



Fig. 7.13

برای حالت تنش صفحه‌ای نشان داده شده، الف)
دایره مور را رسم کنید و ب) صفحات اصلی، ج)
تنش‌های اصلی، د) تنش برشی ماکزیمم و تنش
قائم مربوطه را به دست آورید.

ابتدا محوره‌های X و Y را مشخص می‌کنیم.

داریم:

$$\sigma_x = 50 \text{ MPa}$$

$$\sigma_y = -10 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xy} = 40 \text{ MPa}$$

حل:

• رسم دایره مور

$$x \begin{cases} 50 \\ -40 \end{cases}, y \begin{cases} -10 \\ 40 \end{cases}$$

$$\sigma_{ave} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{(50) + (-10)}{2} = 20 \text{ MPa}$$

$$CF = 50 - 20 = 30 \text{ MPa} \quad FX = 40 \text{ MPa}$$

$$R = CX = \sqrt{(30)^2 + (40)^2} = 50 \text{ MPa}$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. **7 - 19/47**

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مثال 7.3: (ادامه)

• تنش‌ها و صفحات اصلی

$$\sigma_{max} = OA = OC + CA = 20 + 50$$

$$\sigma_{max} = 70 \text{ MPa}$$

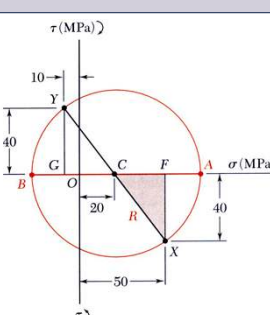
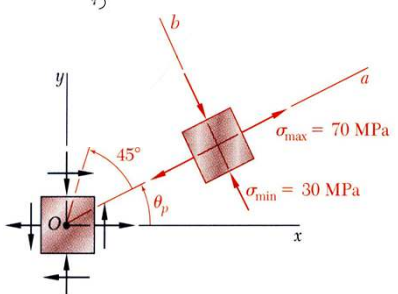
$$\sigma_{min} = OB = OC - BC = 20 - 50$$

$$\sigma_{min} = -30 \text{ MPa}$$

$$\tan 2\theta_p = \frac{FX}{CF} = \frac{40}{30}$$

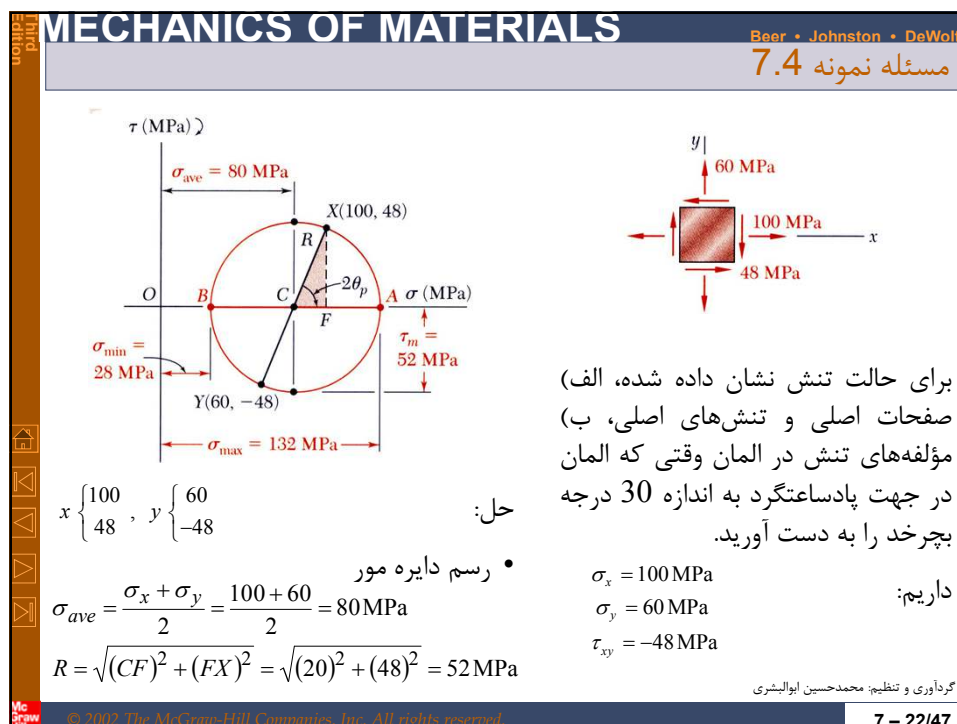
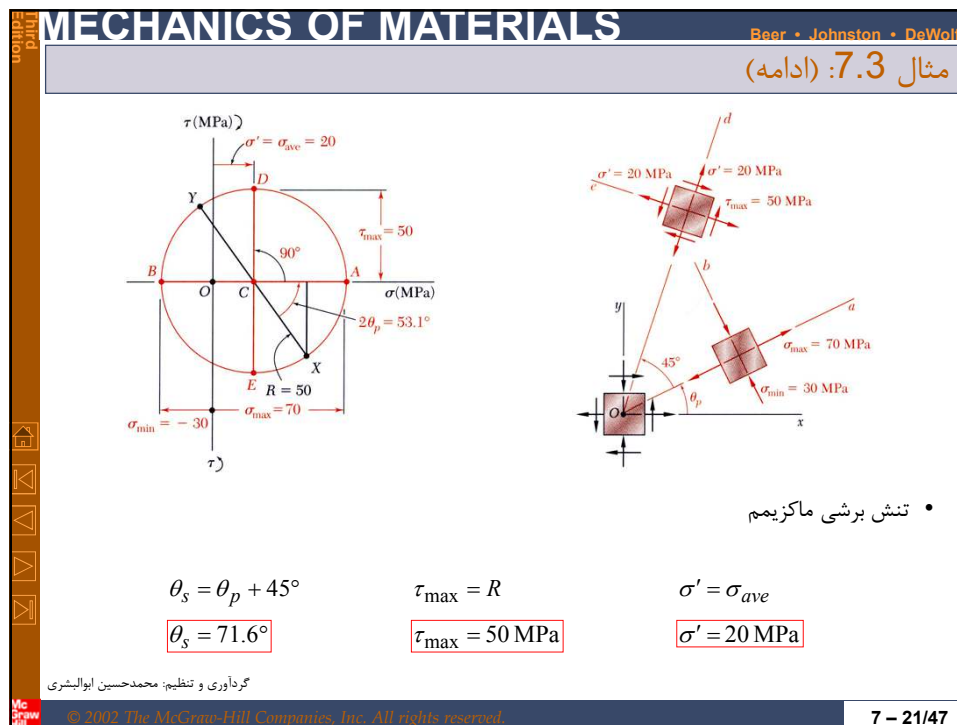
$$2\theta_p = 53.1^\circ$$

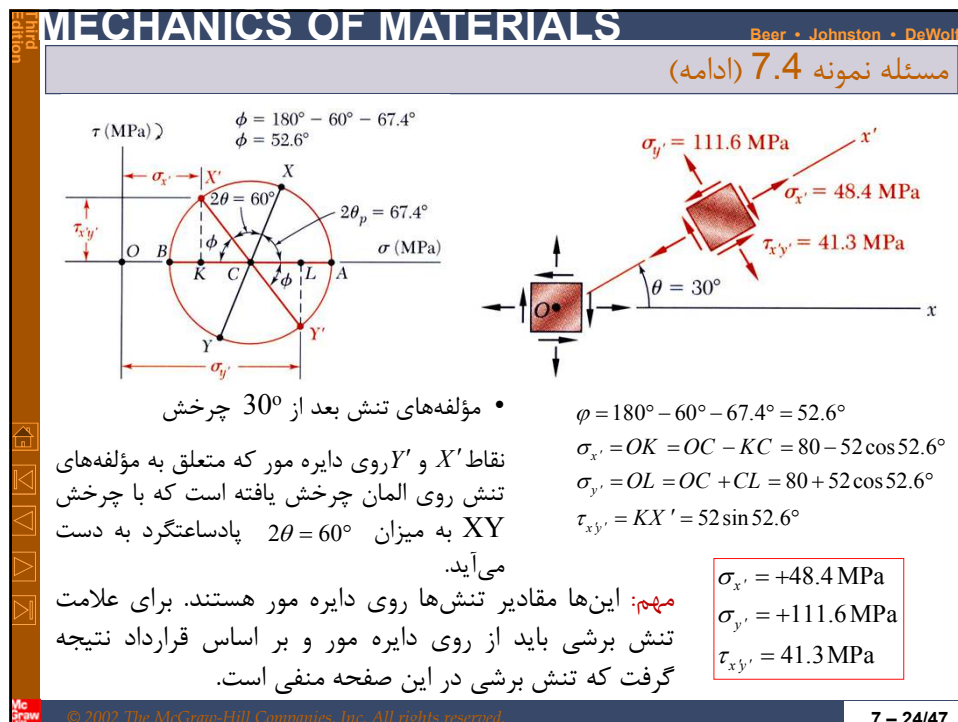
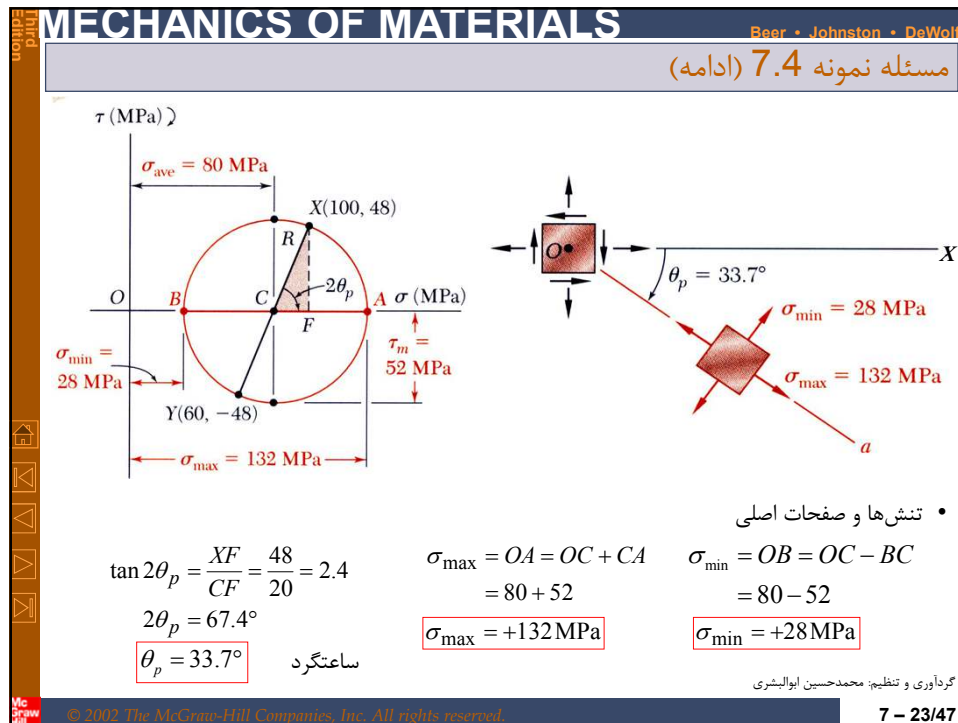
$$\theta_p = 26.6^\circ$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. **7 - 20/47**





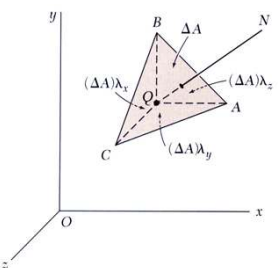
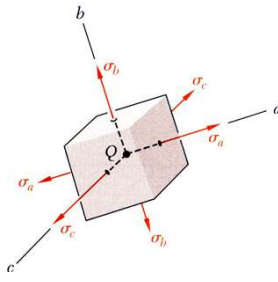
Third Edition

McGraw Hill

MECHANICS OF MATERIALS

Beer • Johnston • DeWolf

حالت کلی تنش

- حالت کلی تنش سه بعدی در یک نقطه و تبدیل تنش را برای چرخش المان در نظر بگیرید.
- حالت تنش در Q با مؤلفه‌های $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ بیان می‌شود.
- یک هرم که قاعده آن بر خط QN (با کسینوس دایرکتوری‌های $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$) عمود است در نظر بگیرید.
- شرط $\sum F_n = 0$ ایجاب می‌کند که:

$$\sigma_n = \sigma_x \lambda_x^2 + \sigma_y \lambda_y^2 + \sigma_z \lambda_z^2 + 2\tau_{xy} \lambda_x \lambda_y + 2\tau_{yz} \lambda_y \lambda_z + 2\tau_{zx} \lambda_z \lambda_x$$
- این معادله تضمین می‌کند که جهتی می‌توان یافت که:

$$\sigma_n = \sigma_a \lambda_a^2 + \sigma_b \lambda_b^2 + \sigma_c \lambda_c^2$$

این‌ها محورها اصلی و جهت‌های اصلی اند و تنش‌های قائم تنش‌های اصلی اند.

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

7 - 25/47

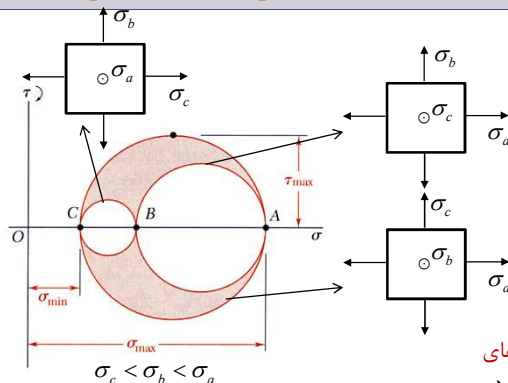
Third Edition

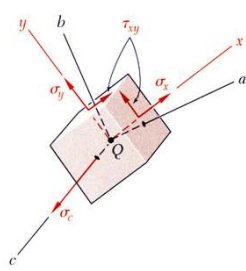
McGraw Hill

MECHANICS OF MATERIALS

Beer • Johnston • DeWolf

کاربرد دایره مور در تحلیل تنش سه بعدی و تنش برشی ماکزیمم خارج صفحه





- می‌توان نشان داد که دوران حول هر محور دیگری (غیراصلی) باعث بوجود آمدن تنش‌هایی می‌شود که در شکل با یک نقطه در داخل مساحت سایه خورده نشان داده می‌شود.
- شعاع بزرگترین دایره، تنش برشی ماکزیمم را می‌دهد.

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} |\sigma_{\max} - \sigma_{\min}|$$

- تبدیل تنش برای المانی که حول **محورهای اصلی** خودش چرخیده با دایره مور بیان می‌شود.
- نقاط A, B و C ممین تنش‌های اصلی در صفحات اصلی‌اند (تنش‌های برشی صفرند).
- سه دایره ممین تنش‌های قائم و برشی برای چرخش حول هر یک از **محورهای اصلی** است.

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

7 - 26/47

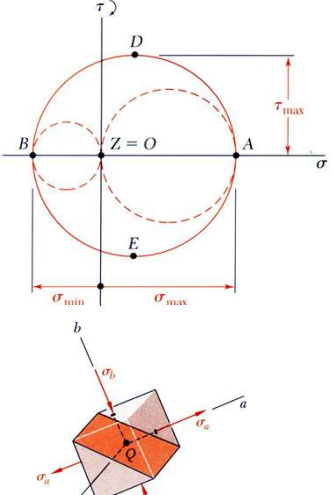
Third Edition

MECHANICS OF MATERIALS

Beer • Johnston • DeWolf

McGraw Hill

کاربرد دایره مور در تحلیل تنش سه بعدی (ادامه)



- در حالت تنش صفحه‌ای (مثلاً XY)، محور عمود بر صفحه تنش یک محور اصلی است (زیرا تنش برشی τ_{xz} و τ_{yz} صفر است).
- اگر نقاط A و B (که مبین صفحات اصلی‌اند) در دو طرف مرکز مختصات باشند، آنگاه:
 - (a) تنش‌های اصلی مربوطه تنش‌های قائم ماکزیمم و مینیمم المان هستند.
 - (b) تنش برشی ماکزیمم برای المان برابر با **تنش برشی ماکزیمم در صفحه** است.
- (چرخش محورها حول محور Z است)
- (c) صفحات تنش برشی ماکزیمم نسبت به صفحات اصلی زاویه 45° می‌سازند. صفحه نارنجی در شکل و یا صفحه عمود بر آن که نشان داده نشده ولی در کتاب هست.

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

7 - 27/47

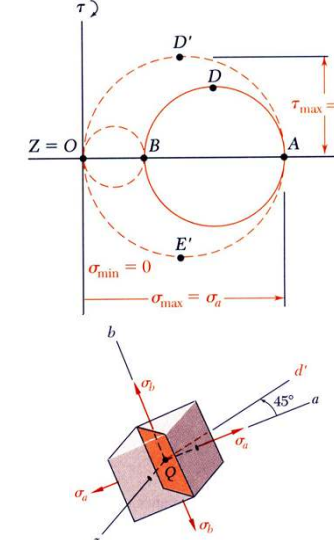
Third Edition

MECHANICS OF MATERIALS

Beer • Johnston • DeWolf

McGraw Hill

کاربرد دایره مور در تحلیل تنش سه بعدی (ادامه)



- اگر نقاط A و B در یک طرف مرکز مختصات باشند (یعنی هم علامت باشند)، آنگاه:
 - (a) دایره‌ای که σ_{max} ، τ_{max} و σ_{min} را برای المان تعریف می‌کند دایره‌ای که مربوط به تبدیل تنش صفحه‌ای است نمی‌باشد.
 - (b) تنش برشی ماکزیمم خارج از صفحه المان برابر با نصف تنش قائم ماکزیمم است.
- (c) صفحات تنش برشی ماکزیمم نسبت به صفحات اصلی تنش زاویه 45° درجه می‌سازند. یعنی صفحه az باید حول محور b به اندازه 45° درجه بچرخد تا به صفحه تنش برشی ماکزیمم برسیم.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

7 - 28/47

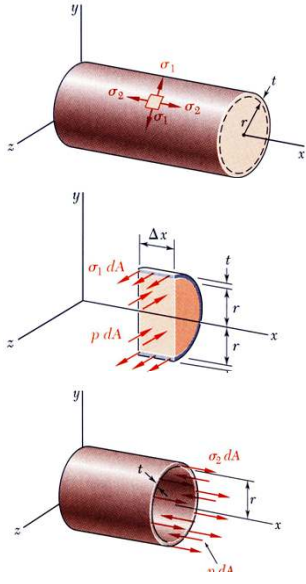
Third Edition

MECHANICS OF MATERIALS

Beer • Johnston • DeWolf

McGraw Hill

تنش‌های برشی ماکزیمم در-صفحه و خارج-از-صفحه در مخازن جدار نازک تحت فشار



- مخازن استوانه‌ای با تنش‌های اصلی
- تنش محیطی (مداری) σ_1
- تنش طولی (نصف‌النهاری) σ_2
- تنش محیطی (مداری):
$$\sum F_z = 0 = \sigma_1(2t \Delta x) - p(2r \Delta x)$$

$$\sigma_1 = \frac{pr}{t}$$
- تنش طولی (نصف‌النهاری):
$$\sum F_x = 0 = \sigma_2(2\pi r t) - p(\pi r^2)$$

$$\sigma_2 = \frac{pr}{2t}$$

$$\sigma_1 = 2\sigma_2$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

7 - 29/47

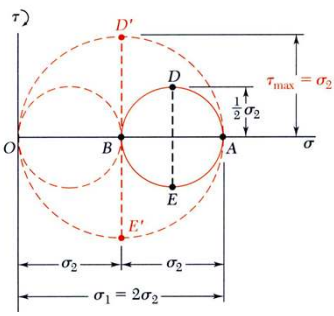
Third Edition

MECHANICS OF MATERIALS

Beer • Johnston • DeWolf

McGraw Hill

تنش‌های برشی ماکزیمم در-صفحه و خارج-از-صفحه در مخازن جدار نازک تحت فشار (ادامه)



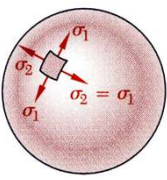
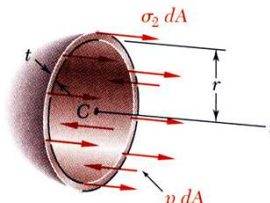
- نقاط A و B مربوط به تنش محیطی، σ_1 ، و تنش طولی، σ_2 است.
- تنش برشی ماکزیمم در-صفحه:
$$\tau_{\max(\text{in-plane})} = \frac{1}{2}\sigma_2 = \frac{pr}{4t}$$
- تنش برشی ماکزیمم خارج-از-صفحه در صفحه‌ای است که نسبت به المان تنش صفحه‌ای حول محور طولی 45° چرخیده.
$$\tau_{\max} = \sigma_2 = \frac{pr}{2t}$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

7 - 30/47

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

تنش‌های برشی ماکزیمم در-صفحه و خارج-از-صفحه در مخازن جدار نازک تحت فشار (ادامه)

• مخازن تحت فشار کروی:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{pr}{2t}$$

• دایره مور برای تبدیل در-صفحه تنها یک نقطه است. نقطه A و B

$\sigma = \sigma_1 = \sigma_2 = \text{constant}$

تنش برشی در-صفحه ماکزیمم: $\tau_{\max(\text{in-plane})} = 0$

• تنش برشی ماکزیمم خارج-از-صفحه:

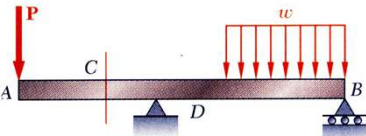
نقطه D' $\tau_{\max} = \frac{1}{2} \sigma_1 = \frac{pr}{4t}$

• بنابراین در صورتی که تنش مجاز برشی در مصالح مخزن کروی دقیقاً نصف تنش قائم مجاز آن باشد مخزن ممکن است تحت برش نصف شود. در اکثر مصالح $\tau_{\max} > \frac{1}{2} \sigma_{\text{all}}$ ؛ به عنوان مثال در فولاد تنش‌های مجاز برشی و قائم به ترتیب 30MPa و 50MPa است.

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 7 - 31/47

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

چند مثال از فصل ۸: تنش‌های اصلی در تیر



• تیرهای منشوری تحت بارگذاری عرضی

• ماکزیمم در تارهای بالا و پایین است.

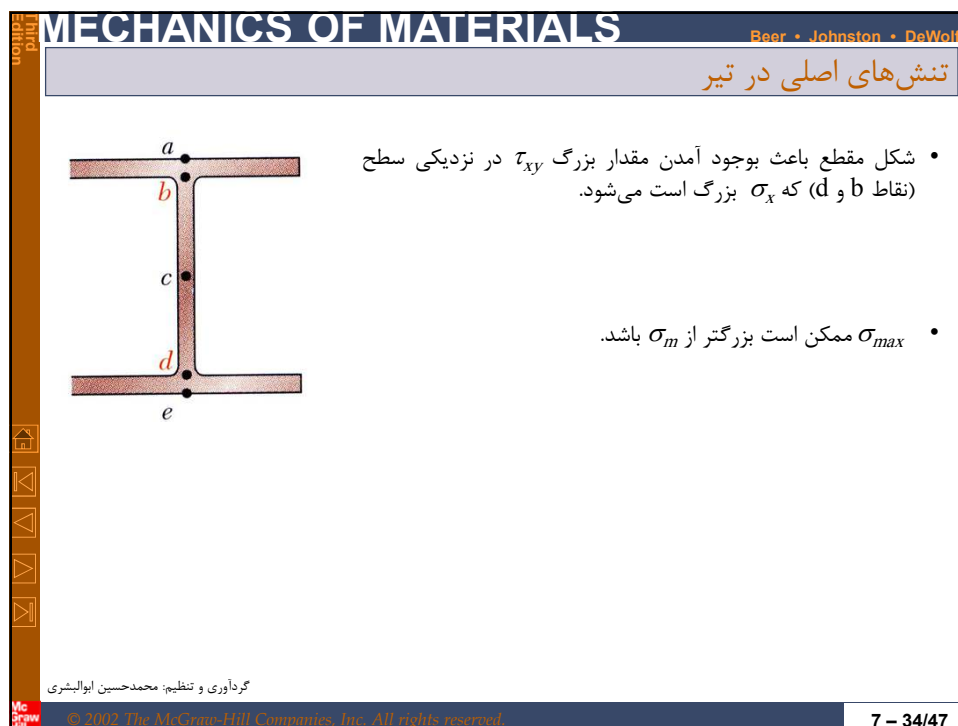
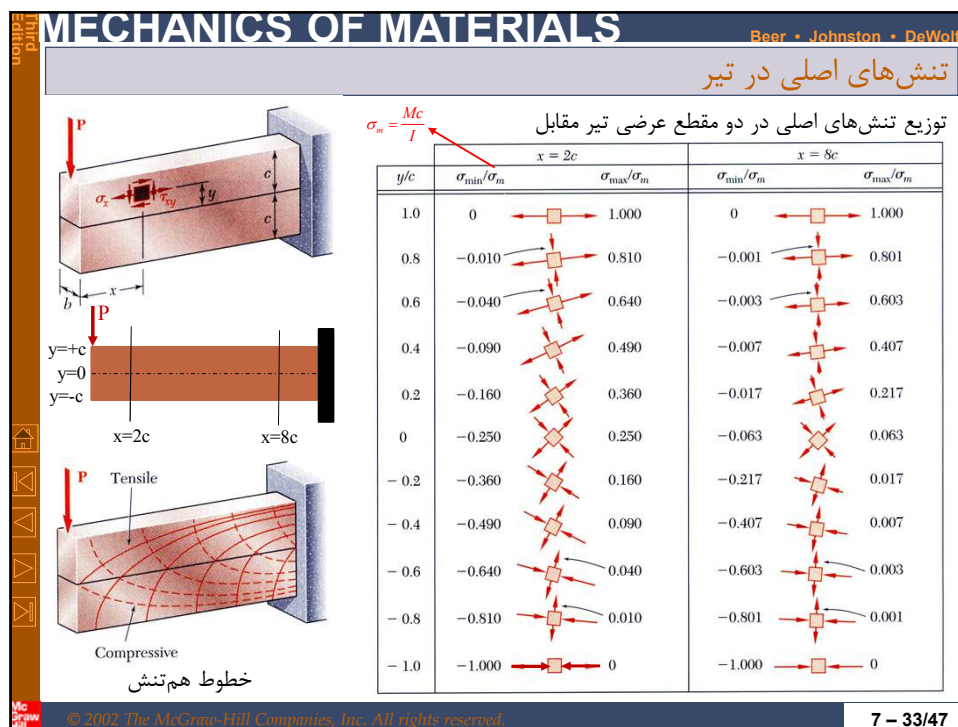
• ماکزیمم در تار خنثی است.

• تنش‌های اصلی با استفاده از روش‌های فصل ۷ به دست می‌آیند.

• آیا تنش قائم ماکزیمم در مقطع می‌تواند بزرگتر از مقدار زیر باشد؟

در اسلاید صفحه بعد خواهیم دید که برای این تیر با مقطع مستطیل شکل پاسخ منفی است. ولی در مثال بعد خواهیم دید که پاسخ مثبت است.

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 7 - 32/47



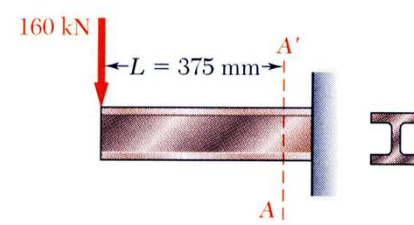
MECHANICS OF MATERIALS

Beer • Johnston • DeWolf

مسئله نمونه 8.1

حل:

- نیروی برشی و ممان خمشی را به دست آورید.
- تنش قائم در محل اتصال بال و جان در سطح بالایی را محاسبه کنید.
- تنش برشی محل اتصال بال و جان در سطح بالایی را به دست آورید.
- تنش اصلی در محل اتصال بال و جان را محاسبه کنید.



یک نیروی 160 kN به انتهای یک تیر فولادی نورد شده W200×52 وارد می‌شود. با چشمپوشی از اثرات گرده و تمرکز تنش، بررسی کنید که آیا در مقطع A-A تنش قائم شرط طراحی را که باید برابر یا کمتر از 150MPa باشد برآورده می‌سازد؟

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

7 - 35/47

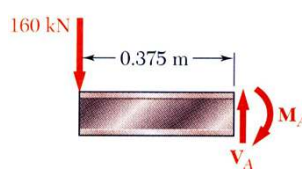
MECHANICS OF MATERIALS

Beer • Johnston • DeWolf

مسئله نمونه 8.1 (ادامه)

حل:

- نیروی برشی و ممان خمشی در مقطع A - A را به دست آورید.
- تنش قائم در محل اتصال بال و جان در سطح بالایی را محاسبه کنید.



اگر تنها تنش‌های قائم ناشی از ممان خمشی ملاک بود:

$$\sigma_a = \frac{M_A}{S} = \frac{60 \text{ kN} \cdot \text{m}}{512 \times 10^{-6} \text{ m}^3} = 117.2 \text{ MPa} < (150 \text{ MPa}) \text{ ok}$$

$$\sigma_b = \sigma_a \frac{y_b}{c} = (117.2 \text{ MPa}) \frac{90.4 \text{ mm}}{103 \text{ mm}} = 102.9 \text{ MPa}$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

7 - 36/47

18

MECHANICS OF MATERIALS
Beer • Johnston • DeWolf

مسئله نمونه 8.1 (ادامه)

- تنش برشی در محل اتصال بال و جان را به دست آورید.

$$Q = (204 \times 12.6)96.7 = 248.6 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

$$= 248.6 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

$$\tau_b = \frac{V_A Q}{I t} = \frac{(160 \text{ kN})(248.6 \times 10^{-6} \text{ m}^3)}{(52.7 \times 10^{-6} \text{ m}^4)(0.0079 \text{ m})}$$

$$= 95.5 \text{ MPa}$$

- تنش اصلی در محل اتصال بال و جان را محاسبه کنید.

$$\sigma_{\max} = \frac{1}{2} \sigma_b + \sqrt{\left(\frac{1}{2} \sigma_b\right)^2 + \tau_b^2}$$

$$= \frac{102.9}{2} + \sqrt{\left(\frac{102.9}{2}\right)^2 + (95.5)^2}$$

$$= 169.9 \text{ MPa} \quad (> 150 \text{ MPa})$$

شرط طراحی برآورده نمی‌شود.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

7 – 37/47

MECHANICS OF MATERIALS
Beer • Johnston • DeWolf

مسئله نمونه 8.2

حل:

- عکس‌العمل‌ها در A و D را به دست آورید.
- نیروی برشی و ممان خمشی ماکزیمم را از نمودار آن‌ها به دست آورید.
- مدول مقطع مورد نیاز را محاسبه کنید و مقطع مناسب را انتخاب کنید.
- تنش قائم ماکزیمم را به دست آورید.
- تنش برشی ماکزیمم را به دست آورید.

یک تیر با تکیه‌گاه میانی (سرآویز) یک بار گسترده و یک بار متمرکز را تحمل می‌کند. اگر تنش مجاز فولاد استفاده شده در تیر $\sigma_{all} = 24 \text{ ksi}$ و $\tau_{all} = 14.5 \text{ ksi}$ باشد، مقطع بال پهنی که باید به کار رود را انتخاب کنید.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

7 – 38/47

MECHANICS OF MATERIALS

Beer • Johnston • DeWolf

مسئله نمونه 8.2 (ادامه)

حل:

- عکس العمل‌ها در A و D :

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow R_D = 59 \text{ kips}$$

$$\sum M_D = 0 \Rightarrow R_A = 41 \text{ kips}$$

- نیروی برشی و ممان خمشی ماکزیمم را از نمودار آن‌ها به دست می‌آوریم.

$13.2 \times 9 = 28.8$

$$|M|_{\max} = 239.4 \text{ kip} \cdot \text{ft} = 2872.8 \text{ kip} \cdot \text{in}$$

with $V + 28.8 - 41 = 0 \Rightarrow V = 12.2 \text{ kips}$

$$|V|_{\max} = 43 \text{ kips}$$

- مدول مقطع مورد نیاز را محاسبه و مقطع مناسب را انتخاب می‌کنیم.

$$S_{\min} = \frac{|M|_{\max}}{\sigma_{\text{all}}} = \frac{2872.8 \text{ kip} \cdot \text{in}}{24 \text{ ksi}} = 119.7 \text{ in}^3$$

از جدول چندین مقطع که S آن‌ها بیشتر از 119.7 باشد در نظر می‌گیریم و از بین آن‌ها مقطعی که وزن کمتری دارد انتخاب می‌کنیم.

Shape	S (in ³)
W24 × 68	154
W21 × 62	127
W18 × 76	146
W16 × 77	134
W14 × 82	123
W12 × 96	131

7 - 39/47

MECHANICS OF MATERIALS

Beer • Johnston • DeWolf

مسئله نمونه 8.2 (ادامه)

- تنش برشی ماکزیمم را به دست می‌آوریم.
- با فرض تنش برشی یکنواخت در جان:

$$\tau_{\max} = \frac{V_{\max}}{A_{\text{web}}} = \frac{43 \text{ kips}}{8.40 \text{ in}^2} = 5.12 \text{ ksi} < 14.5 \text{ ksi}$$

- تنش قائم ماکزیمم را به دست می‌آوریم.

$$\sigma_a = \frac{M_{\max}}{S} = \frac{2872.8 \text{ kip} \cdot \text{in}}{127 \text{ in}^3} = 22.6 \text{ ksi}$$

$$\sigma_b = \sigma_a \frac{y_b}{c} = (22.6 \text{ ksi}) \frac{9.88}{10.5} = 21.3 \text{ ksi}$$

$$\tau_b = \frac{V}{A_{\text{web}}} = \frac{12.2 \text{ kips}}{8.40 \text{ in}^2} = 1.45 \text{ ksi}$$

تنش برشی در b منفی است زیرا نیروی برشی مقطع منفی است.

$$\sigma_{\max} = \frac{21.3 \text{ ksi}}{2} + \sqrt{\left(\frac{21.3 \text{ ksi}}{2}\right)^2 + (1.45 \text{ ksi})^2}$$

$$= 21.4 \text{ ksi} < 24 \text{ ksi}$$

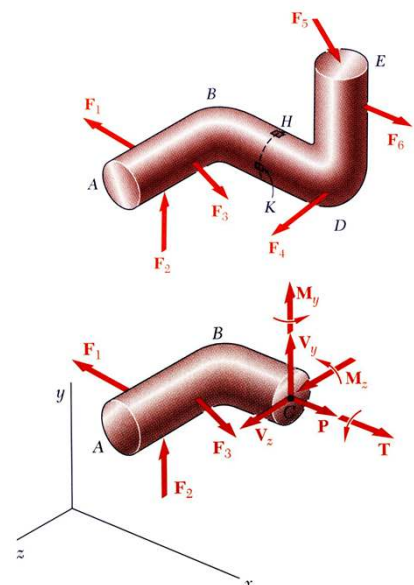
در این مسئله شکل مقطع به گونه‌ای است که تنش قائم در b بیشتر از تنش قائم در a نیست و تنش قائم ماکزیمم در a است.

7 - 40/47

MECHANICS OF MATERIALS

Beer • Johnston • DeWolf

تنش‌ها در اثر بارهای ترکیبی



- می‌خواهیم تنش‌ها در اعضای سازه‌ای لاغر (که فرض مستوی بودن صفحات عمود بر محور بعد از بارگذاری در آنها صحیح است) که تحت بارگذاری اختیاری قرار دارند را به دست آوریم.
- از نقاط مورد نظر مقطع بزنید. با توجه به الزام تعادل، مجموعه نیرو-کوپل در مرکز سطح را به دست آورید.
- مجموعه نیروهای داخلی از سه مؤلفه نیرو و سه بردار کوپل تشکیل شده است.
- توزیع تنش را با استفاده از اصل جمع آثار به دست آورید.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

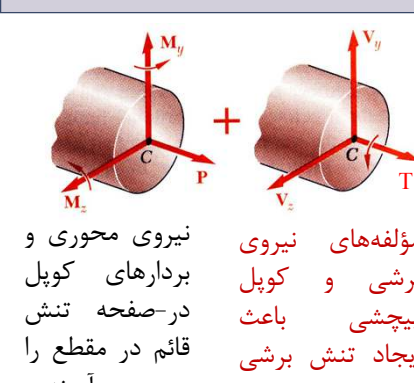
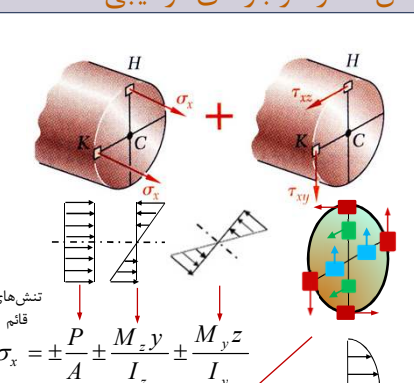
© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

7 - 41/47

MECHANICS OF MATERIALS

Beer • Johnston • DeWolf

تنش‌ها در اثر بارهای ترکیبی

نیروی محوری و
بردارهای کوپل
در-صفحه تنش
قائم در مقطع را
وجود می‌آورند.

مؤلفه‌های نیروی
برشی و کوپل
پیش‌نی باعث
ایجاد تنش برشی
در مقطع می‌شوند.

تنش‌های
قائم

$$\sigma_x = \pm \frac{P}{A} \pm \frac{M_z y}{I_z} \pm \frac{M_y z}{I_y}$$

شعاع محور

تنش‌های برشی

$$\tau_{xy} \text{ or } \tau_{xz} = \frac{Tc}{J}$$

$$\tau_{xy} = \frac{V_y Q}{I_z t}$$

$$\tau_{xz} = \frac{V_z Q}{I_y t}$$

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

7 - 42/47

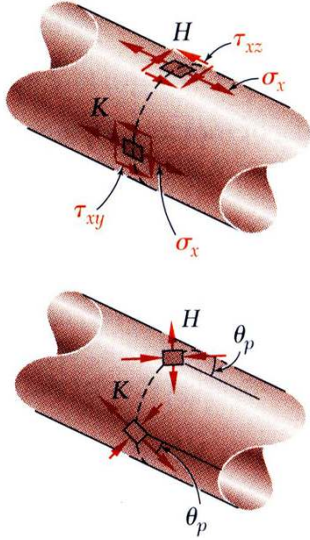
Third Edition

MECHANICS OF MATERIALS

Beer • Johnston • DeWolf

McGraw Hill

تنش‌ها در اثر بارهای ترکیبی



- برای به دست آوردن تنش‌های اصلی و تنش برشی ماکزیمم و زاویه صفحات اصلی از تنش‌های قائم و برشی استفاده می‌شود.
- تحلیل تا جایی معتبر خواهد بود که شرایط قابلیت کاربرد اصل جمع آثار و اصل سنت ونان برآورده شود.

اصل سنت ونان:

- بجز در محدوده بسیار نزدیک نقاط اعمال نیروها، توزیع تنش را می‌توان مستقل از حالت (مود) اعمال بارها فرض کرد.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

7 - 43/47

Third Edition

MECHANICS OF MATERIALS

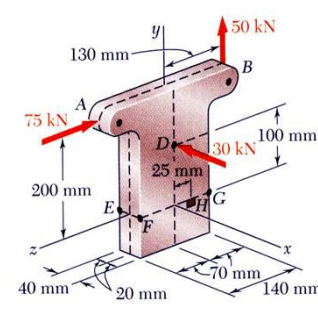
Beer • Johnston • DeWolf

McGraw Hill

مسئله نمونه 8.5

حل:

- نیروهای داخلی در مقطع EFG را به دست آورید.
- تنش قائم در H را محاسبه کنید.
- تنش برشی در H را محاسبه کنید.
- تنش‌های اصلی و تنش برشی ماکزیمم را محاسبه کنید. صفحات اصلی را به دست آورید.



سه نیرو به پایه کوتاه فولادی مطابق شکل وارد می‌شود. تنش‌های اصلی و صفحات اصلی و تنش برشی ماکزیمم را در نقطه H به دست آورید.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

7 - 44/47

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مسئله نمونه 8.5 (ادامه)

حل:

- نیروهای داخلی در مقطع EFG را به دست آورید.

$$V_x = -30 \text{ kN}, \quad P = 50 \text{ kN}, \quad V_z = -75 \text{ kN}$$

$$M_x = (50 \text{ kN})(0.130 \text{ m}) - (75 \text{ kN})(0.200 \text{ m}) = -8.5 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_y = 0$$

$$M_z = (30 \text{ kN})(0.100 \text{ m}) = 3 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

خواص مقطع:

$$A = (0.040 \text{ m})(0.140 \text{ m}) = 5.6 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$I_x = \frac{1}{12}(0.040 \text{ m})(0.140 \text{ m})^3 = 9.15 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$I_z = \frac{1}{12}(0.140 \text{ m})(0.040 \text{ m})^3 = 0.747 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 7 - 45/47

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مسئله نمونه 8.5 (ادامه)

- تنش قائم در H را محاسبه کنید.
- تنش برشی در H را محاسبه کنید.

$$\sigma_y = +\frac{P}{A} + \frac{|M_z|a}{I_z} - \frac{|M_x|b}{I_x}$$

$$= \frac{50 \text{ kN}}{5.6 \times 10^{-3} \text{ m}^2} + \frac{(3 \text{ kN} \cdot \text{m})(0.020 \text{ m})}{0.747 \times 10^{-6} \text{ m}^4} - \frac{(8.5 \text{ kN} \cdot \text{m})(0.025 \text{ m})}{9.15 \times 10^{-6} \text{ m}^4}$$

$$= (8.93 + 80.3 - 23.2) \text{ MPa} = 66.0 \text{ MPa}$$

$$Q = A_1 \bar{y}_1 = [(0.040 \text{ m})(0.045 \text{ m})](0.0475 \text{ m}) = 85.5 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

$$\tau_{yz} = \frac{V_z Q}{I_x t} = \frac{(75 \text{ kN})(85.5 \times 10^{-6} \text{ m}^3)}{(9.15 \times 10^{-6} \text{ m}^4)(0.040 \text{ m})} = 17.52 \text{ MPa}$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 7 - 46/47

