

CHAPTER

11

Third Edition

MECHANICS OF MATERIALS

Ferdinand P. Beer
E. Russell Johnston, Jr.
John T. DeWolf

Lecture Notes:
J. Walt Oler
Texas Tech University

روش‌های انرژی

© M.H. Abolbashari, Ferdowsi University of Mashhad

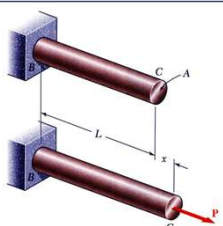
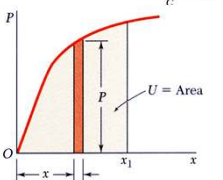
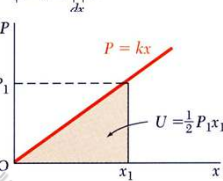
McGraw Hill

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

Third Edition

MECHANICS OF MATERIALS

Beer • Johnston • DeWolf

تعریف مفهوم انرژی کرنشی

- فرض کنید به یک میله یکنواخت یک نیروی محوری به آهستگی اعمال می‌شود.
- کار جزئی du انجام شده توسط بار P هنگامی که میله افزایش طول کوچک dx پیدا می‌کند عبارت است از:

$$dU = P dx = \text{کار جزئی}$$

که برابر است با سطح المان عمودی به عرض dx نمودار بار-تغییر شکل.

- کل کار انجام شده توسط بار برای تغییر شکل x_1 برابر است با:

$$U = \int_0^{x_1} P dx = \text{انرژی کرنشی} = \text{کار کلی}$$

که منجر به افزایش انرژی کرنشی میله می‌شود.

- برای تغییر شکل الاستیک خطی داریم:

$$U = \int_0^{x_1} kx dx = \frac{1}{2} kx_1^2 = \frac{1}{2} P_1 x_1$$

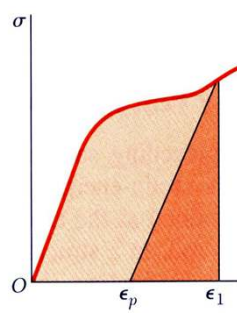
گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

11 – 2/46

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

چگالی انرژی کرنشی



- برای حذف وابستگی به اندازه، انرژی کرنشی در واحد حجم را **چگالی انرژی کرنشی** تعریف می کنیم:

$$\frac{U}{V} = \int_0^{\epsilon_1} \frac{P}{A} \frac{dx}{L}$$

واحد معمول

$$u = \int_0^{\epsilon_1} \sigma_x d\epsilon = \text{strain energy density} \left[\frac{\text{J}}{\text{m}^3} \text{ or } \text{Pa} \right] \quad \text{سیستم SI}$$

$$\left[\frac{\text{in} \cdot \text{lb}}{\text{in}^3} \right] \quad \text{سیستم U.S. یا انگلیسی}$$

هر چند واحد چگالی انرژی کرنشی مانند **تنش** است ولی معمولاً آن را با **ژول بر متر مکعب** نشان می دهند.

□ **چگالی انرژی کرنشی کل** در اثر تغییر مکان برابر است با سطح زیر منحنی تا ϵ_1

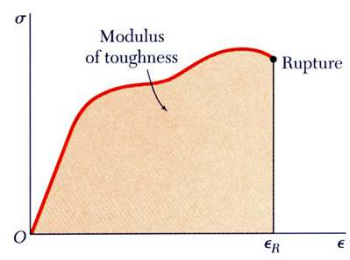
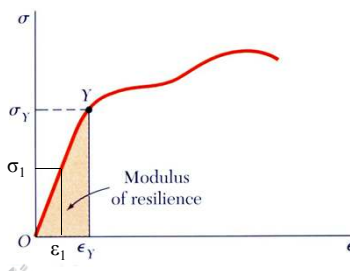
- اگر بار برداشته شود، تنش به صفر می رسد ولی تغییر شکل دائمی بوجود می آید. تنها انرژی کرنشی که توسط مثلث نشان داده شده، بازیابی می شود.
- بقیه انرژی که در تغییر شکل به کار رفته به شکل گرما تلف می شود.

گوداوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 11 – 3/46

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مدول چقرمگی و مدول برجهندگی

- چگالی انرژی کرنشی که از برابر قرار دادن $\epsilon_I = \epsilon_R$ که **کرنش گسیختگی** است، به دست می آید را **مدول چقرمگی** (toughness) می گویند.

$$u = \int_0^{\epsilon_R} \sigma_x d\epsilon$$

- انرژی بر واحد حجمی که باعث گسیختگی مصالح می شود به چکش خوارگی و مقاومت نهایی آن بستگی دارد. ظرفیت یک سازه در مقاومت به **بار ضربه ای** نیز به مدول چقرمگی آن بستگی دارد. **کوپلینگ واگن های قطار از فولادهای چکش خوار** با چقرمگی بالا ساخته می شوند.
- اگر تنش زیر حد تناسب باشد داریم:

$$u = \int_0^{\epsilon_1} E \epsilon_1 d\epsilon_x = \frac{E \epsilon_1^2}{2} = \frac{\sigma_1^2}{2E}$$

- چگالی انرژی کرنشی که از برابر قرار دادن $\sigma_I = \sigma_Y$ به دست می آید، **مدول برجهندگی** (resilience) می گویند.

$$u_Y = \frac{\sigma_Y^2}{2E} = \text{modulus of resilience}$$

گوداوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 11 – 4/46

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

انرژی کرنشی الاستیک برای تنش‌های قائم

- برای یک المان با توزیع تنش غیر یکنواخت:

$$u = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta V} = \frac{dU}{dV} \quad U = \int u \, dV =$$
 انرژی کرنشی کل
- برای مقادیر $u < u_Y$ ، یعنی زیر حد تناسب:

$$U = \int \frac{\sigma_x^2}{2E} dV =$$
 انرژی کرنشی الاستیک
- برای بارگذاری محوری:

$$\sigma_x = P/A \quad dV = A \, dx$$

$$U = \int_0^L \frac{P^2}{2AE} dx$$
- برای یک میله با سطح مقطع یکنواخت:

$$U = \frac{P^2 L}{2AE}$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 11 – 5/46

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مثال 11.1:

میله‌ای از دو قسمت BC و CD ، با جنس یکسان ولی با مقطع عرضی متفاوت، ساخته شده است. این میله تحت بار محوری مرکزی P قرار دارد. انرژی کرنشی میله را بر حسب E ، L ، P ، مساحت مقطع A قسمت CD و نسبت n قطرهای دو قسمت بیان کنید.

و این همان رابطه‌ای است که برای یک میله با طول L و با مساحت یکنواخت A می‌توان داشتیم.

برای $n=1$ داریم:

$$U_n = \frac{P^2(L/2)}{2AE} + \frac{P^2(L/2)}{2n^2AE} = \frac{P^2L}{4AE} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$$

$$U_n = \frac{1+n^2}{2n^2} \frac{P^2L}{2AE}$$

$$U_1 = \frac{P^2L}{2AE}$$

برای $n=2$ داریم:

$$U_2 = \frac{5}{8} \frac{P^2L}{2AE} = \frac{5}{8} U_1$$

چون تنش ماکزیمم در قسمت CD میله روی می‌دهد و عبارت است از $\sigma_{\max} = P/A$ نتیجه می‌شود که: برای یک تنش مجاز معین، افزایش قطر BC میله باعث کاهش ظرفیت جذب انرژی کلی میله می‌شود. بنابراین در طراحی عضوهایی که تحت بارگذاری‌های ضربه‌ای قرار می‌گیرند باید از تغییر غیر ضروری مساحت مقطع عرضی اجتناب کرد.

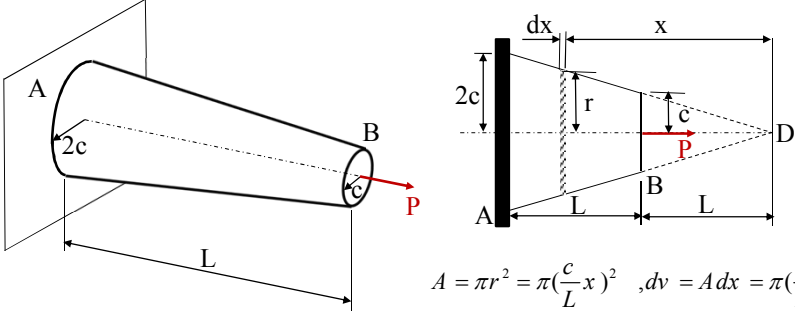
گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 11 – 6/46

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مسئله 10.19 Beer & Johnston, 1981, P 487-

با انتگرال گیری نشان دهید که انرژی کرنشی میله مخروطی AB برابر است با $U = \frac{1}{4} \frac{P^2 L}{EA_{\min}}$ که در آن $A_{\min}$ مساحت سطح مقطع انتهای B است.



$A = \pi r^2 = \pi \left(\frac{c}{L}x\right)^2$, $dv = A dx = \pi \left(\frac{c}{L}x\right)^2 dx$

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{P}{\pi \left(\frac{c}{L}x\right)^2} = \frac{PL^2}{\pi c^2 x^2}$$

$$u = \frac{\sigma^2}{2E} = \frac{1}{2E} \frac{P^2 L^4}{\pi^2 c^4 x^4}$$

چگالی انرژی کرنشی

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 11 - 7/46

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مسئله 10.19 Beer & Johnston, 1981, P 487- (ادامه)

$$U = \int dU = \int u dv = \int_L^{2L} \frac{1}{2E} \frac{P^2 L^4}{\pi^2 c^4 x^4} \frac{\pi c^2 x^2}{L^2} dx$$

$$= \frac{P^2 L^2}{2E \pi c^2} \int_L^{2L} \frac{1}{x^2} dx \quad A_{\min} = \pi c^2$$

$$= \frac{P^2 L^2}{2E A_{\min}} \left[-\frac{1}{x} \right]_L^{2L} = \frac{P^2 L^2}{2E A_{\min}} \left[-\frac{1}{2L} + \frac{1}{L} \right]$$

$$U = \frac{1}{4} \frac{P^2 L}{EA_{\min}}$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 11 - 8/46

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

انرژی کرنشی الاستیک برای تنش‌های قائم

• برای یک تیر تحت بار خمشی:

$$U = \int \frac{\sigma_x^2}{2E} dv = \int \frac{M^2 y^2}{2EI^2} dv$$

• با قرار دادن: $dV = dA dx$ و دانستن این که $\frac{M^2}{2EI^2}$ تنها به x بستگی دارد (زیرا مربوط به یک مقطع خاص است و نه بخشی از مقطع و المان. از طرف دیگر y مربوط به المان داخل مقطع است و به dA وابسته است) داریم:

$$U = \int_0^L \int_A \frac{M^2 y^2}{2EI^2} dA dx = \int_0^L \frac{M^2}{2EI^2} \left(\int_A y^2 dA \right) dx$$

$$= \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx$$

• برای یک تیر یکسرگیردار که در سر آزاد آن یک بار متمرکز قرار دارد:

$$U = \int_0^L \frac{P^2 x^2}{2EI} dx = \frac{P^2 L^3}{6EI}$$

$M = -Px$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

11 - 9/46

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مسئله 10.34- Beer & Johnston, 1981, P 488-

با فرض اینکه تیر AB سطح مقطع یکنواخت مستطیلی داشته باشد، نشان دهید که برای بار نشان داده شده، بیشترین مقدار **چگالی انرژی کرنشی** در تیر عبارت است از $u_m = \frac{45U}{8V}$ که در آن U انرژی کرنشی تیر و V حجم آن است.

ω

L

h

b

$c/2$

y

z

x

M

$\omega L/2$

$M_{\max} = \frac{\omega L^2}{8}$

$M + \frac{\omega x^2}{2} - \frac{\omega L}{2}x = 0$

$M = -\frac{\omega x^2}{2} + \frac{\omega L}{2}x = \frac{\omega x}{2}(L - x)$

$\frac{dM}{dx} = \omega x - \frac{\omega L}{2} = 0 \rightarrow x = \frac{L}{2}$

$M_{\max} = M|_{x=L/2} = \frac{\omega L^2}{8}$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

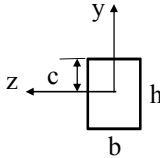
© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

11 - 10/46

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مسئله 10.34- Beer & Johnston, 1981, P 488- (ادامه)

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_{\max}|c}{I}$$

$$= \frac{wL^2}{8} \cdot \frac{h/2}{bh^3/12} = \frac{3wL^2}{4bh^2}$$


چگالی انرژی کرنشی

$$u_m = \frac{\sigma_m^2}{2E} = \frac{1}{2E} \left(\frac{3wL^2}{4bh^2} \right)^2 = \frac{9w^2L^4}{32Eb^2h^4}$$

حجم تیر

$$V = bhL$$

انرژی کرنشی ارتجاعی

$$U = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx = \frac{1}{2EI} \int_0^L \left(\frac{w}{2} \right)^2 (Lx - x^2)^2 dx$$

$$= \frac{w^2}{8EI} \int_0^L (L^2x^2 - 2Lx^3 + x^4) dx = \frac{w^2}{8EI} \left[\frac{L^2x^3}{3} - \frac{2Lx^4}{4} + \frac{x^5}{5} \right]_0^L = \frac{w^2L^5}{240EI}$$

$$= \frac{w^2L^5}{240E \frac{bh^3}{12}} = \frac{w^2L^5}{20Eb^2h^3}$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 11 – 11/46

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مسئله 10.34- Beer & Johnston, 1981, P 488- (ادامه)

اگر فرض کنیم $u_m = k \frac{U}{V}$ است، داریم:

$$k = \frac{Vu_m}{U} = \frac{6kL}{1} \cdot \frac{9w^2L^4}{32Eb^2h^4} \cdot \frac{1}{\frac{w^2L^5}{20Eb^2h^3}} = \frac{45}{8}$$

$$u_m = \frac{45U}{8V}$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

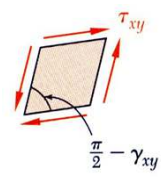
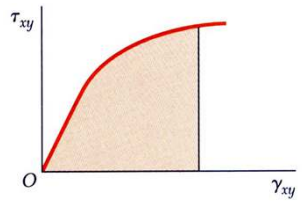
© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 11 – 12/46

Third Edition

MECHANICS OF MATERIALS

Beer • Johnston • DeWolf

انرژی کرنشی برای تنش‌های برشی

- برای مصالحی که تحت بار تنش برشی صفحه‌ای قرار دارد:

$$u = \int_0^{\gamma_{xy}} \tau_{xy} d\gamma_{xy} \quad \text{چگالی انرژی کرنشی}$$

- اگر τ_{xy} زیر حد تناسب باشد:

$$u = \frac{1}{2} G \gamma_{xy}^2 = \frac{1}{2} \tau_{xy} \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}^2}{2G}$$

- انرژی کرنشی کل عبارت است از:

$$U = \int u dV$$

- قبلاً داشتیم: $U = \int \frac{\sigma_x^2}{2E} dV$

انرژی کرنشی برای تنش‌های قائم

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

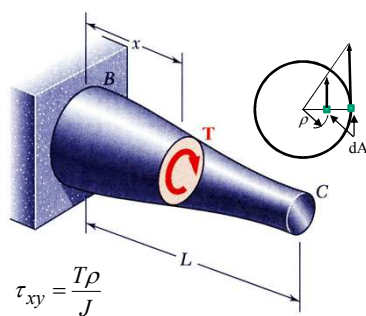
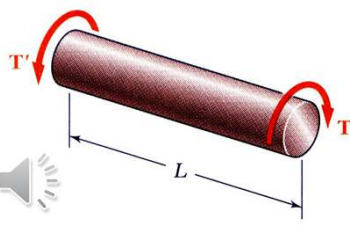
© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 11 - 13/46

Third Edition

MECHANICS OF MATERIALS

Beer • Johnston • DeWolf

انرژی کرنشی برای تنش‌های برشی (ادامه)

- برای محوری مانند BC که در مقطعی به فاصله X تحت بار پیچشی T قرار دارد و ممان اینرسی قطبی مقطع J است داریم:

$$U = \int \frac{\tau_{xy}^2}{2G} dV = \int \frac{T^2 \rho^2}{2GJ^2} dV$$

- با جایگزینی: $dV = dA dx$ و دانستن این که $\frac{T^2}{2GJ^2}$ تنها به X بستگی دارد (زیرا مربوط به یک مقطع خاص است و نه بخشی از مقطع و المان. از طرف دیگر rho مربوط به المان داخل مقطع است و به dA وابسته است)) داریم:

$$U = \int_0^L \int_A \frac{T^2 \rho^2}{2GJ^2} dA dx = \int_0^L \frac{T^2}{2GJ^2} \left(\int_A \rho^2 dA \right) dx$$

$$= \int_0^L \frac{T^2}{2GJ} dx$$

- برای یک محور یکنواخت داریم:

$$U = \frac{T^2 L}{2GJ}$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 11 - 14/46

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مثال 11.4:

یک محور دایره‌ای از دو قسمت BC و CD ، با جنس یکسان ولی با مقطع عرضی متفاوت، ساخته شده است. این محور در سر D تحت کوپل پیچشی T قرار دارد. انرژی کرنشی محور را بر حسب G, L, T ، ممان اینرسی قطبی J مقطع عرضی کوچکتر و نسبت n قطرهای دو قسمت بیان کنید.

قطر nd و قطر d

$$J_{BC} = \frac{\pi(nd)^4}{32}$$

$$J_{CD} = \frac{\pi d^4}{32}$$

$$U_n = \frac{T^2(L/2)}{2GJ} + \frac{T^2(L/2)}{2G(n^4J)} = \frac{T^2L}{4GJ} \left(1 + \frac{1}{n^4}\right)$$

$$U_n = \frac{1+n^4}{n^4} \frac{T^2L}{4GJ}$$

برای $n=1$ داریم:

$$U_1 = \frac{T^2L}{2GJ}$$

و این همان رابطه‌ای است که برای یک محور به طول L و با مقطع عرضی یکنواخت داشتیم.

برای $n=2$ داریم:

$$U_2 = \frac{17}{32} \frac{T^2L}{2GJ} = \frac{17}{32} U_1$$

چون تنش برشی ماکزیمم در قسمت CD میله روی می‌دهد و عبارت است از $\tau_{\max} = T(d/2)/J$ نتیجه می‌شود که: برای یک تنش مجاز معین، افزایش قطر BC میله باعث کاهش ظرفیت جذب انرژی کلی محور می‌شود. بنابراین در طراحی محورهایی که تحت بارگذاری‌های ضربه‌ای قرار می‌گیرند باید از تغییر غیر ضروری قطر مقطع عرضی اجتناب کرد.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

11 – 15/46

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مسئله نمونه 11.2

حل:

- عکس‌العمل‌ها در A و B را با استفاده از ترسیم آزاد تیر به دست می‌آوریم.
- نمودار توزیع ممان خمشی را ترسیم می‌کنیم.
- روی حجم تیر انتگرال‌گیری می‌کنیم و انرژی کرنشی را به دست می‌آوریم.
- شرایط داده شده را اعمال می‌کنیم و انرژی کرنشی را به دست می‌آوریم.

الف) انرژی کرنشی را برای تیر منشوری AB بیابید. تنها اثر تنش‌های قائم را در نظر بگیرید.

ب) انرژی کرنشی تیر را با داده‌های زیر به دست آورید.

$W10 \times 45$, $P = 40$ kips, $L = 12$ ft,
 $a = 3$ ft, $b = 9$ ft, $E = 29 \times 10^6$ psi

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

11 – 16/46

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مسئله نمونه 11.2 (ادامه)

حل:

- عکس العمل‌ها در A و B را با استفاده از ترسیم آزاد تیر به دست می‌آوریم.

$$R_A = \frac{Pb}{L} \quad R_B = \frac{Pa}{L}$$

- نمودار توزیع ممان خمشی را ترسیم می‌کنیم.

$$M_1 = \frac{Pb}{L}x \quad M_2 = \frac{Pa}{L}v$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 11 - 17/46

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مسئله نمونه 11.2 (ادامه)

- روی حجم تیر انتگرال‌گیری می‌کنیم و انرژی کرنشی را به دست می‌آوریم.

$$U = \int_0^a \frac{M_1^2}{2EI} dx + \int_0^b \frac{M_2^2}{2EI} dv$$

$$= \frac{1}{2EI} \int_0^a \left(\frac{Pb}{L}x \right)^2 dx + \frac{1}{2EI} \int_0^b \left(\frac{Pa}{L}x \right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{2EI} \frac{P^2}{L^2} \left(\frac{b^2 a^3}{3} + \frac{a^2 b^3}{3} \right) = \frac{P^2 a^2 b^2}{6EI L^2} (a+b)$$

$$U = \frac{P^2 a^2 b^2}{6EIL}$$

برای قسمت AD

$$M_1 = \frac{Pb}{L}x$$

برای قسمت BD

$$M_2 = \frac{Pa}{L}v$$

$P = 40 \text{ kips} \quad L = 144 \text{ in.}$
 $a = 36 \text{ in.} \quad b = 108 \text{ in.}$
 $E = 29 \times 10^3 \text{ ksi} \quad I = 248 \text{ in}^4$

$$U = \frac{(40 \text{ kips})^2 (36 \text{ in})^2 (108 \text{ in})^2}{6(29 \times 10^3 \text{ ksi})(248 \text{ in}^4)(144 \text{ in})}$$

$$U = 3.89 \text{ in} \cdot \text{kips}$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 11 - 18/46

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

چگالی انرژی کرنشی برای حالت کلی تنش

• انرژی کرنشی که قبلاً بیان شد برای تنش محوری و برشی بود. برای حالت کلی تنش همه آنها را با هم جمع می‌کنیم:

$$u = \frac{1}{2}(\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx})$$

با جایگزینی معادله $\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu \sigma_y}{E} - \frac{\nu \sigma_z}{E}$ ، $\tau_{xy} = G \gamma_{xy}$ ، و مانند آن داریم:

$$u = \frac{1}{2} \left[\sigma_x \left(\frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu \sigma_y}{E} - \frac{\nu \sigma_z}{E} \right) + \sigma_y \left(\frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu \sigma_x}{E} - \frac{\nu \sigma_z}{E} \right) + \sigma_z \left(\frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu \sigma_y}{E} - \frac{\nu \sigma_x}{E} \right) + \frac{\tau_{xy}^2}{G} + \frac{\tau_{yz}^2}{G} + \frac{\tau_{zx}^2}{G} \right]$$

$$u = \frac{1}{2E} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\nu(\sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z)] + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)$$

اگر در نقطه مورد نظر از محورهای اصلی استفاده کنیم و از برابری $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ بهره ببریم داریم:

$$u = \frac{1}{2E} [\sigma_a^2 + \sigma_b^2 + \sigma_c^2 - 2\nu(\sigma_a \sigma_b + \sigma_b \sigma_c + \sigma_c \sigma_a)]$$

$$= \frac{1-2\nu}{6E} (\sigma_a + \sigma_b + \sigma_c)^2 + \frac{1}{12G} [(\sigma_a - \sigma_b)^2 + (\sigma_b - \sigma_c)^2 + (\sigma_c - \sigma_a)^2] =$$

$$= u_v + u_d$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری
© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 11 - 19/46

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

انرژی کرنشی برای حالت کلی تنش

که در آن:

$$u_v = \frac{1-2\nu}{6E} (\sigma_a + \sigma_b + \sigma_c)^2$$

به خاطر تغییر حجم

$$u_d = \frac{1}{12G} [(\sigma_a - \sigma_b)^2 + (\sigma_b - \sigma_c)^2 + (\sigma_c - \sigma_a)^2]$$

به خاطر اعوجاج

اساس معیار شکست ماکزیمم انرژی اعوجاج (distortion)

برای یک نمونه آزمایش کشش

$$u_d < (u_d)_Y = u_d \Big|_{\substack{\sigma_b = \sigma_c = 0 \\ \sigma_a = \sigma_Y}} = \frac{1}{12G} (2\sigma_a^2) = \frac{\sigma_Y^2}{6G}$$

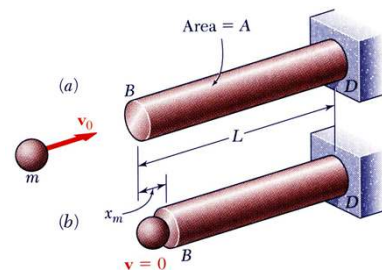
یعنی فقط یک σ داریم.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری
© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 11 - 20/46

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

محاسبه تنش ماکزیمم در بار ضربه‌ای

- برای به دست آوردن تنش ماکزیمم σ_m
 - فرض کنید تمام انرژی جنبشی به سازه منتقل می‌شود:
 $U_m = \frac{1}{2}mv_0^2$
 - این فرض ایجاب می‌کند که: ۱- هنگام ضربه انرژی تلف نمی‌شود. ۲- جسم پس از برخورد بر نمی‌گردد و کمی از انرژی خود را پس نمی‌گیرد.
 - چون هیچکدام از این دو ضرورت برآورده نمی‌شود، این فرض یک **طراحی محافظه کارانه** و **ایمن** خواهد بود.
 - فرض کنید نمودار تنش-کرنش که از آزمون ایستایی به دست آمده برای بار ضربه‌ای نیز معتبر است.
- مقدار ماکزیمم انرژی کرنشی:
 $U_m = \int \frac{\sigma_m^2}{2E} dV$
- برای میله یکنواخت:
 $\sigma_m = \sqrt{\frac{2U_mE}{V}} = \sqrt{\frac{mv_0^2 E}{V}}$



- میله‌ای را در نظر بگیرید که جسمی به جرم m که با سرعت v_0 در حال حرکت است به انتهای آن برخورد می‌کند.
- میله تحت ضربه تغییر شکل می‌دهد. **تنش‌ها به یک مقدار ماکزیمم σ_m می‌رسند و سپس از بین می‌روند.**

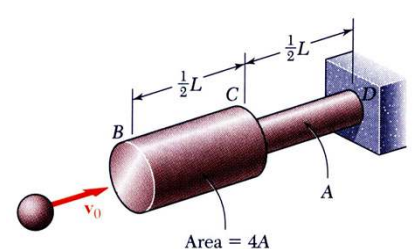
گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری
© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 11 – 21/46

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مثال 11.06

حل:

- از آنجا که قطر تغییر می‌کند، توزیع تنش قائم غیر یکنواخت است.
- بار استاتیکی P_m که انرژی کرنشی معادل انرژی کرنشی ضربه ایجاد می‌کند را به دست می‌آوریم.
- تنش ماکزیمم حاصل از بار استاتیکی P_m را محاسبه می‌کنیم.



جسمی به جرم m با سرعت v_0 به انتهای میله BCD غیر یکنواخت برخورد می‌کند. قطر قسمت BC دو برابر قطر قسمت CD است. مقدار ماکزیمم تنش قائم در میله را به دست آورید.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری
© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 11 – 22/46

Beer • Johnston • DeWolf

مثال 11.06 (ادامه)

• بار استاتیکی P_m که انرژی کرنشی مشابه ضربه ایجاد می کند به دست می آوریم.

CD BC

$$U_m = \frac{P_m^2 (L/2)}{2AE} + \frac{P_m^2 (L/2)}{2(4A)E} = \frac{5}{16} \frac{P_m^2 L}{AE}$$

$$P_m = \sqrt{\frac{16 U_m AE}{5 L}}$$

• تنش ماکزیمم حاصل از بار استاتیکی P_m را محاسبه می کنیم.

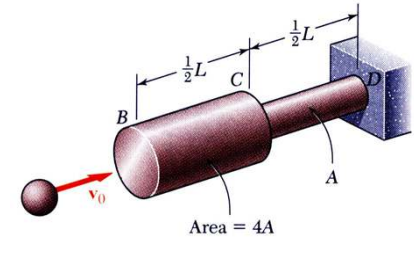
$$\sigma_m = \frac{P_m}{A}$$

$$= \sqrt{\frac{16 U_m E}{5 AL}}$$

$$= \sqrt{\frac{8 m v_0^2 E}{5 AL}} = 1.265 \sqrt{\frac{m v_0^2 E}{AL}} = 1.265 \sqrt{\frac{m v_0^2 E}{V}}$$

• توجه: V حجم میله یکنواخت است.

• با مقایسه با تنش برای میله یکنواخت، می بینیم که تنش ماکزیمم 26.5% از میله یکنواخت سبک تر بزرگ تر است. بنابراین افزایش قطر **BC** باعث کاهش ظرفیت جذب انرژی میله می شود.



حل:

• از آنجا که قطر تغییر می کند، توزیع تنش قائم غیر یکنواخت است.

$$U_m = \frac{1}{2} m v_0^2$$

$$= \int \frac{\sigma_m^2}{2E} dV \neq \frac{\sigma_m^2 V}{2E}$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

11 - 23/46

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

Beer • Johnston • DeWolf

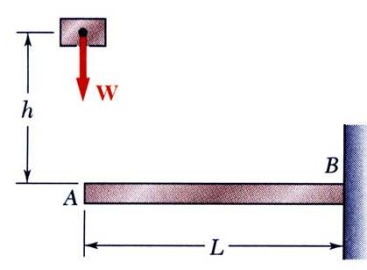
مثال 11.07

حل:

• تنش قائم در امتداد طول و همچنین در امتداد مقطع عرضی به طور خطی تغییر می کند.

• بار استاتیکی P_m که انرژی کرنشی به اندازه بار ضربه ای تولید می کند را به دست می آوریم.

• تنش ماکزیمم که در اثر بار استاتیکی P_m بوجود می آید را به دست می آوریم.



یک بلوک به وزن W از ارتفاع h رها شده و به انتهای آزاد یک تیر یکسرگیردار برخورد می کند. مقدار تنش ماکزیمم در تیر را به دست آورید.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

11 - 24/46

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

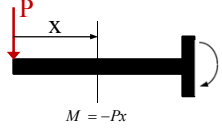
مثال 11.07 (ادامه)

• تنش قائم در امتداد طول و همچنین در امتداد مقطع عرضی به طور خطی تغییر می‌کند.

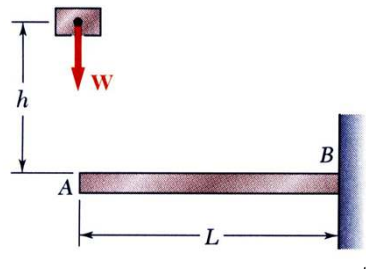
• برای یک تیر یکسرگیردار که در انتهایش بارگذاری شده داریم:

$$U = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx = \int_0^L \frac{P^2 x^2}{2EI} dx$$

$$U_m = \frac{P^2 L^3}{6EI}$$

$$P_m = \sqrt{\frac{6U_m EI}{L^3}}$$


$M = -Px$



حل:

• تنش قائم در امتداد طول و همچنین در امتداد مقطع عرضی به طور خطی تغییر می‌کند. (از تنش‌های برشی چشم‌پوشی می‌شود). اگر ارتفاع رها شدن از خیز ماکزیمم خیلی بزرگتر باشد:

$$U_m = W(h + y_{\max}) \xrightarrow{\text{if } h \gg y_{\max}} Wh$$

$$= \int \frac{\sigma_m^2}{2E} dv \neq \frac{\sigma_m^2 V}{2E}$$

• تنش بار استاتیکی P_m (که انرژی کرنشی به اندازه بار ضربه‌ای تولید می‌کند) را به دست می‌آوریم.

$$\sigma_m = \frac{|M|_m c}{I} = \frac{P_m L c}{I}$$

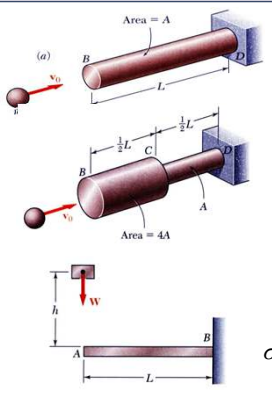
$$= \sqrt{\frac{6U_m E}{L(I/c^2)}} = \sqrt{\frac{6WhE}{L(I/c^2)}}$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری
© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

11 – 25/46

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

نتیجه گیری: نکات مهم در طراحی برای بار ضربه‌ای



Area = A

Area = 4A

• برای یک میله یکنواخت به حجم V_1 :

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{2U_m E}{V_1}}$$

• برای میله غیر یکنواخت به حجم V_2 :

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{16U_m E}{5AL}}$$

$$V_2 = 4A(L/2) + A(L/2) = 5AL/2 = 2.5V_1$$

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{8U_m E}{V_1}}$$

یا

• برای تیر یکسرگیردار با مقطع دایره‌ای به شعاع C:

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{6U_m E}{L(I/c^2)}}, \quad L(I/c^2) = L(\frac{1}{4}\pi c^4/c^2) = \frac{1}{4}(\pi c^2 L) = \frac{1}{4}V_3$$

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{24U_m E}{V_3}}$$

سازه‌هایی که برای بارهای ضربه‌ای طراحی می‌شوند، برای داشتن تنش کمتر باید دارای ویژگی‌های زیر باشند:

- ۱- حجم بزرگی داشته باشند.
- ۲- از مصالحی با E کم و مقاومت تسلیم (σ_Y) بالا (با آلیاژبندی) ساخته شده باشند.
- ۳- سازه طوری شکل داده شود که تنش‌ها در تمام سازه تا حد امکان به طور یکنواخت توزیع شده باشد.

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

11 – 26/46

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

راه دیگر محاسبه کار و انرژی برای سازه‌هایی که تنها یک بارگذاری دارند

- انرژی کرنشی را همچنین می‌توان از کار انجام شده توسط یک نیروی P_1 که به تنهایی اعمال می‌شود به دست آورد.

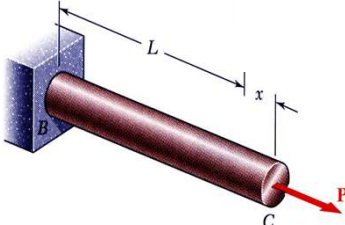
$$U = \int_0^{x_1} P dx$$

- برای تغییر شکل الاستیک، کار انجام شده توسط نیرو P_1 :

$$U = \int_0^{x_1} P dx = \int_0^{x_1} kx dx = \frac{1}{2} k x_1^2 = \frac{1}{2} P_1 x_1$$

- با دانستن رابطه بین نیرو و تغییر مکان:

$$x_1 = \frac{P_1 L}{AE}$$

$$U = \frac{1}{2} P_1 \left(\frac{P_1 L}{AE} \right) = \frac{P_1^2 L}{2AE}$$


- قبلاً انرژی کرنشی را با انتگرال‌گیری چگالی انرژی روی حجم به دست آوردیم. برای یک میله یکنواخت:

$$U = \int u dV = \int \frac{\sigma^2}{2E} dV$$

$$= \int_0^L \frac{(P_1/A)^2}{2E} A dx = \frac{P_1^2 L}{2AE}$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

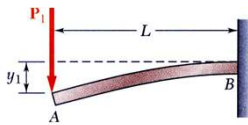
© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 11 – 27/46

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

راه دیگر محاسبه کار و انرژی برای سازه‌هایی که تنها یک بارگذاری دارند (ادامه)

- انرژی کرنشی را می‌توان برای انواع بارهای متمرکز دیگری که به تنهایی اعمال می‌شوند به دست آورد.

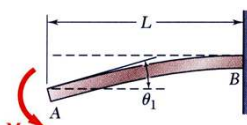
- بار عرضی



$$U = \int_0^{y_1} P dy = \frac{1}{2} P_1 y_1$$

$$= \frac{1}{2} P_1 \left(\frac{P_1 L^3}{3EI} \right) = \frac{P_1^2 L^3}{6EI}$$

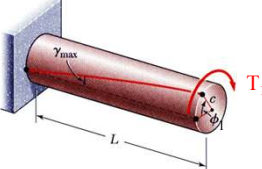
- کوپل خمشی



$$U = \int_0^{\theta_1} M d\theta = \frac{1}{2} M_1 \theta_1$$

$$= \frac{1}{2} M_1 \left(\frac{M_1 L}{EI} \right) = \frac{M_1^2 L}{2EI}$$

- کوپل پیچشی



$$U = \int_0^{\phi_1} T d\phi = \frac{1}{2} T_1 \phi_1$$

$$= \frac{1}{2} T_1 \left(\frac{T_1 L}{JG} \right) = \frac{T_1^2 L}{2JG}$$

و این‌ها دقیقاً روابطی هستند که قبلاً به دست آورده بودیم. از جدول

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 11 – 28/46

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

خیز در سازه‌هایی که تنها یک بارگذاری دارند با استفاده از کار و انرژی

- اگر انرژی کرنشی سازه‌ای تحت یک بار متمرکز معلوم باشد، آنگاه از برابر قرار دادن کار انجام شده توسط بار و انرژی کرنشی می‌توان خیز را به دست آورد.
- انرژی کرنشی سازه

$$U = \frac{F_{BC}^2 L_{BC}}{2AE} + \frac{F_{BD}^2 L_{BD}}{2AE}$$

$$= \frac{P^2 l [(0.6)^3 + (0.8)^3]}{2AE} = 0.364 \frac{P^2 l}{AE}$$

از هندسه سازه داریم:

$$L_{BC} = 0.6l \quad L_{BD} = 0.8l$$

از استاتیک داریم:

$$F_{BC} = +0.6P \quad F_{BD} = -0.8P$$

• کار و انرژی کرنشی را برابر هم قرار می‌دهیم:

$$U = 0.364 \frac{P^2 l}{AE} = \frac{1}{2} P y_B$$

$$y_B = 0.728 \frac{Pl}{AE}$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

11 – 29/46

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مسئله نمونه 11.4- خیز در سازه‌هایی که تنها یک بارگذاری دارند با استفاده از کار و انرژی

حل:

- عکس‌العمل‌ها در A و B را از ترسیمه آزاد کل سازه به دست می‌آوریم.
- با استفاده از روش مفصل‌ها، نیروی محوری هر عضو را به دست می‌آوریم.
- انرژی کرنشی خرپا در اثر بار P را به دست می‌آوریم.
- انرژی کرنشی را با کار انجام شده توسط P برابر قرار می‌دهیم و تغییر مکان را به دست می‌آوریم.

اعضای خرپای فوق از لوله‌های آلومنیومی تشکیل شده که مساحت سطح مقطع‌های آن‌ها نشان داده شده است. اگر $E = 73 \text{ GPa}$ باشد، خیز عمودی نقطه E را در اثر بار P به دست آورید.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

11 – 30/46

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مسئله نمونه 11.4 - خیز در سازه‌هایی که تنها یک بارگذاری دارند با استفاده از کار و انرژی (ادامه)

حل:

- عکس‌العمل‌ها در A و B را از ترسیم آزاد کل سازه به دست می‌آوریم.
- با استفاده از روش مفصل‌ها، نیروی محوری هر عضو را به دست می‌آوریم.

$A_x = 21P/8$ $A_y = P$ $B = 21P/8$
 $A_x = -21P/8$ $A_y = P$ $B = 21P/8$

$\sum F_y = 0 \rightarrow F_{DE} = \frac{17}{8}P$ $\sum F_x = 0 \rightarrow F_{AC} = \frac{15}{8}P$ $\sum F_y = 0 \rightarrow F_{AD} = \frac{5}{4}P$ $\sum F_y = 0 \rightarrow F_{AB} = 0$
 $\sum F_x = 0 \rightarrow F_{CE} = \frac{15}{8}P$ $\sum F_y = 0 \rightarrow F_{CD} = 0$ $\sum F_x = 0 \rightarrow F_{BD} = \frac{21}{8}P$ $\sum F_x = 0 \rightarrow \text{checks}$

در روش تعادل مفصل‌ها، نیروهای وارد به مفصل‌ها از طرف اعضا نشان داده می‌شوند و مثبت بودن آن‌ها به معنی صحیح بودن جهت در نظر گرفته شده است. سپس کششی یا فشاری بودن نیروی اعضا را می‌توان با توجه به آن‌ها تعیین کرد.

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 11 - 31/46

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مسئله نمونه 11.4 - خیز در سازه‌هایی که تنها یک بارگذاری دارند با استفاده از کار و انرژی (ادامه)

علامت مثبت و منفی در این ستون به معنی کششی و فشاری بودن نیروی عضو است.

Member	F_i	L_i, m	A_i, m^2	$\frac{F_i^2 L_i}{A_i}$
AB	0	0.8	500×10^{-6}	0
AC	$+15P/8$	0.6	500×10^{-6}	$4\,219P^2$
AD	$+5P/4$	1.0	500×10^{-6}	$3\,125P^2$
BD	$-21P/8$	0.6	1000×10^{-6}	$4\,134P^2$
CD	0	0.8	1000×10^{-6}	0
CE	$+15P/8$	1.5	500×10^{-6}	$10\,547P^2$
DE	$-17P/8$	1.7	1000×10^{-6}	$7\,677P^2$

• انرژی کرنشی خرابا در اثر بار P را محاسبه
 • انرژی کرنشی را با کار انجام شده توسط P برابر قرار می‌دهیم و تغییر مکان را به دست می‌آوریم.

$\frac{1}{2}Py_E = U$
 $y_E = \frac{2U}{P} = \frac{2}{P} \left(\frac{29700P^2}{2E} \right)$
 $y_E = \frac{(29.7 \times 10^3)(40 \times 10^3)}{73 \times 10^9}$

$y_E = 16.27 \text{ mm} \downarrow$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 11 - 32/46

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مثال 11.5 - بررسی اثر تنش برشی در محاسبه انرژی کرنشی در تیرهای لاغر

انرژی کرنشی تیر مکعب مستطیل AB را با در نظر گرفتن تنش‌های قائم و برشی به دست آورید.

$$\tau_{xy} = \frac{3V}{2A} \left(1 - \frac{y^2}{c^2}\right) = \frac{3P}{2bh} \left(1 - \frac{y^2}{c^2}\right)$$

$$U = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx = \int_0^L \frac{P^2 x^2}{2EI} dx, \quad U_\sigma = \frac{P^2 L^3}{6EI}$$

$$U_\tau = \int_0^L \frac{\tau_{xy}^2}{2G} dV, \quad U_\tau = \frac{1}{2G} \left(\frac{3P}{2bh}\right)^2 \int_0^L \left(1 - \frac{y^2}{c^2}\right)^2 dV, \quad dV = b dy dx$$

$$U_\tau = \frac{9P^2}{8Gbh^2} \int_{-c}^{+c} \left(1 - 2\frac{y^2}{c^2} + \frac{y^4}{c^4}\right) dy \int_0^L dx = \frac{9P^2 L}{8Gbh^2} \left[y - \frac{2}{3} \frac{y^3}{c^2} + \frac{1}{5} \frac{y^5}{c^4} \right]_{-c}^{+c} = \frac{3P^2 L}{5Gbh} = \frac{3P^2 L}{5GA}$$

$$U = U_\sigma + U_\tau = \frac{P^2 L^3}{6EI} + \frac{3P^2 L}{5GA}$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشیری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

11 - 33/46

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مثال 11.5 - بررسی اثر تنش برشی در محاسبه انرژی کرنشی در تیرهای لاغر (ادامه)

از طرفی:

تغییر حجم به واحد حجم یک المان مکعبی به حجم واحد

در حالت هیدرواستاتیک

برای مصالح پایدار:

$$U = U_\sigma + U_\tau = \frac{P^2 L^3}{6EI} + \frac{3P^2 L}{5GA}$$

$$U = \frac{P^2 L^3}{6EI} \left(1 + \frac{3Eh^2}{10GL^2}\right) = U_\sigma \left(1 + \frac{3Eh^2}{10GL^2}\right)$$

$$e = \frac{\Delta V}{V} = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = \frac{1-2\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -P$$

$$e = -\frac{3(1-2\nu)}{E} P$$

$$\Delta V = V_2 - V_1 \rightarrow \Delta V < 0 \rightarrow e < 0 \rightarrow (1-2\nu) > 0 \rightarrow \nu < 0.5$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad E \leq 2(1+0.5)G \leq 3G \rightarrow G \geq E/3$$

بنابراین اگر اثر تنش برشی را در نظر نگیریم، خطا کمتر از $(h/L)^2$ خواهد بود. برای تیری با $h/L < 1/10$ درصد خطا کمتر از 0.9% است. به همین دلیل در تیرهای لاغر اثر برش را در نظر نمی‌گیرند.

$$\left(1 + \frac{3Eh^2}{10GL^2}\right) \leq 1 + 0.9(h/L)^2$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشیری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

11 - 34/46

MECHANICS OF MATERIALS

Beer • Johnston • DeWolf

کار و انرژی در سازه‌هایی که همزمان تحت تأثیر چند بار قرار دارند (قضیه دوطرفه ماکسول)

(a) $U = \frac{1}{2} P_1 x_{11} = \frac{1}{2} P_1 (\alpha_{11} P_1)$

(b) $U = \frac{1}{2} P_2 x_{22} = \frac{1}{2} P_2 (\alpha_{22} P_2)$

فرض می‌کنیم رابطه بین بار و تغییر مکان خطی است و تغییر مکان‌ها در اثر P_1 به شکل زیر بیان می‌شوند که به α ضرایب تأثیر می‌گویند.

• خیز یک تیر الاستیک که تحت تأثیر دو بار متمرکز قرار دارد:

$$x_{11} = \alpha_{11} P_1, \quad x_{21} = \alpha_{21} P_1$$

$$x_1 = \underbrace{x_{11}}_{\text{فقط } P_1} + \underbrace{x_{12}}_{\text{فقط } P_2} = \underbrace{\alpha_{11} P_1}_{\text{فقط } P_1} + \underbrace{\alpha_{12} P_2}_{\text{فقط } P_2}$$

$$x_2 = \underbrace{x_{21}}_{\text{فقط } P_1} + \underbrace{x_{22}}_{\text{فقط } P_2} = \underbrace{\alpha_{21} P_1}_{\text{فقط } P_1} + \underbrace{\alpha_{22} P_2}_{\text{فقط } P_2}$$

• انرژی کرنشی در تیر را با اعمال آهسته بار P_1 به تنهایی P_2 به تنهایی و سپس اول P_1 و بعد P_2 بنویسید.

• دقت شود وقتی P_2 به آهستگی در حال اعمال است P_1 کاری به اندازه $U_{P_1 P_2} = P_1 (\alpha_{12} P_2)$ نیز انجام می‌دهد.

$$U = \frac{1}{2} (\alpha_{11} P_1^2 + 2 \alpha_{12} P_1 P_2 + \alpha_{22} P_2^2)$$

• با برعکس کردن ترتیب بارگذاری داریم:

$$U = \frac{1}{2} (\alpha_{22} P_2^2 + 2 \alpha_{21} P_2 P_1 + \alpha_{11} P_1^2)$$

□ روابط انرژی کرنشی باید معادل باشند. در نتیجه $\alpha_{12} = \alpha_{21}$

(قضیه دوطرفه ماکسول).

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 11 - 35/46

MECHANICS OF MATERIALS

Beer • Johnston • DeWolf

قضیه کستیگیلیانو

• انرژی کرنشی برای هر سازه الاستیک که تحت تأثیر دو بار متمرکز باشد عبارت است از:

$$U = \frac{1}{2} (\alpha_{11} P_1^2 + 2 \alpha_{12} P_1 P_2 + \alpha_{22} P_2^2)$$

• مشتق نسبت به بار عبارت است از:

$$\frac{\partial U}{\partial P_1} = \alpha_{11} P_1 + \alpha_{12} P_2 = x_1$$

$$\frac{\partial U}{\partial P_2} = \alpha_{12} P_1 + \alpha_{22} P_2 = x_2$$

• قضیه کستیگیلیانو: برای یک سازه الاستیک خطی که تحت تأثیر n بار قرار دارد، تغییر مکان x_j در اثر اعمال بار P_j می‌تواند به شکل زیر بیان شود:

$$x_j = \frac{\partial U}{\partial P_j} \quad \text{and} \quad \theta_j = \frac{\partial U}{\partial M_j}, \quad \varphi_j = \frac{\partial U}{\partial T_j}$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 11 - 36/46

H1 ص ۵۷۲ پیرجانشون فارسی
Hossein ۰۱/۰۶/۲۰۱۸ ؛

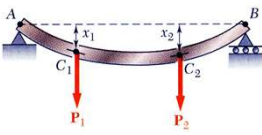
Third Edition

MECHANICS OF MATERIALS

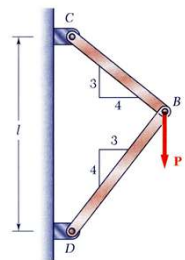
Beer • Johnston • DeWolf

به دست آوردن خیز با استفاده از قضیه کستیگلیانو

- خیز و یا تغییر مکان نقاط مختلف سازه با کاربرد قضیه کستیگلیانو و با مشتق‌گیری نسبت به P_j (قبل از انتگرال‌گیری) و سپس جمع‌بندی برای به دست آوردن انرژی کرنشی U ، به دست خواهد آمد.
- برای تیر:



$$U = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx \quad x_j = \frac{\partial U}{\partial P_j} = \int_0^L \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial P_j} dx$$
- برای خرپا



$$U = \sum_{i=1}^n \frac{F_i^2 L_i}{2 A_i E} \quad x_j = \frac{\partial U}{\partial P_j} = \sum_{i=1}^n \frac{F_i L_i}{A_i E} \frac{\partial F_i}{\partial P_j}$$
- مهم: برای محاسبه خیز x_j از قضیه کستیگلیانو باید نیروی P_j در همان راستای خیز x_j اعمال شود. اگر نیرویی در C_j اعمال نشود یا جهت آن با خیز متفاوت باشد بار مجازی Q_j را اعمال می‌کنیم و سپس در معادله $x_j = \frac{\partial U}{\partial Q_j}$ مقدار Q_j را صفر قرار می‌دهیم.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری
 © 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

11 – 37/46

Third Edition

MECHANICS OF MATERIALS

Beer • Johnston • DeWolf

استفاده از قضیه کستیگلیانو در حل مسائل نامعین ایستایی از مرتبه اول

هدف: به دست آوردن عکس‌العمل‌های مجهول در سازه‌های نامعین ایستایی از مرتبه اول

- ۱- عکس‌العمل مجهول را زاید در نظر می‌گیریم.
- ۲- آن تکیه‌گاه را حذف یا در آن تغییر مناسب می‌دهیم.
- ۳- آن عکس‌العمل را به عنوان بار مجهول می‌گیریم.
- ۴- انرژی کرنشی U سازه را که ناشی از بارهای داده شده و عکس‌العمل زاید است به دست می‌آوریم.
- ۵- مشتق جزئی U نسبت به عکس‌العمل زاید، باید برابر با صفر (برای تکیه‌گاه‌های لولایی و گیردار) یا خیز مجاز داده شده (برای تکیه‌گاه‌های غلطکی) باشد و این معادله، خیز (یا شیب) در تکیه‌گاه حذف شده را می‌دهد.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری
 © 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

11 – 38/46

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مسئله نمونه 11.5

حل:

- برای کاربرد قضیه کستیگیانو یک بار عمودی مجازی Q در C قرار دهید. از ترسیمه آزاد کل خرپا عکس‌العمل‌ها در A و B را در اثر این بار مجازی به دست می‌آوریم (زیرا عکس‌العمل‌ها در اثر بار P را در مسئله قبل به دست آورده بودیم).
- با کاربرد روش مفصل‌ها، نیروی محوری هر عضو را در اثر اعمال بار Q به دست می‌آوریم.
- با ترکیب نتایج مسئله نمونه 11.4، مشتق انرژی کرنشی نسبت به Q را در اثر بارهای P و Q به دست می‌آوریم.
- با قرار دادن $Q=0$ مشتق را به دست می‌آوریم که معادل با تغییر مکان در C است.

اعضای خرپای نشان داده شده از لوله‌های آلومینیومی تشکیل شده که سطح مقطع آن‌ها نیز در شکل داده شده است. اگر $E=73 \text{ GPa}$ باشد، خیز عمودی مفصل C را در اثر بار P به دست آورید.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

11 – 39/46

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مسئله نمونه 11.5 (ادامه)

حل:

- از ترسیمه آزاد کل خرپا عکس‌العمل‌ها در A و B را در اثر بار مجازی Q در C به دست می‌آوریم (زیرا در مسئله قبل عکس‌العمل‌ها در اثر P را به دست آورده بودیم).
- با کاربرد روش مفصل‌ها، نیروی محوری هر عضو را در اثر اعمال بار Q به دست می‌آوریم.

$A_x = -\frac{3}{4}Q$ $A_y = Q$ $B = \frac{3}{4}Q$

عضو BD فشاری است.

عضو CD فشاری است.

عضو AD کششی است.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالیشری

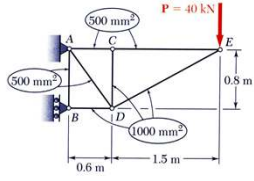
© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

11 – 40/46

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مسئله نمونه 11.5 (ادامه)

علامت مثبت و منفی در این ستون به معنی کششی و فشاری بودن نیروی عضو است.



Member	F_i	$\partial F_i / \partial Q$	L_i, m	A_i, m^2	$\left(\frac{F_i L_i}{A_i} \right) \frac{\partial F_i}{\partial Q}$
AB	0	0	0.8	500×10^{-6}	0
AC	$+15P/8$	0	0.6	500×10^{-6}	0
AD	$+5P/4 + 5Q/4$	0	1.0	500×10^{-6}	$+3125P + 3125Q$
BD	$-21P/8 - 3Q/4$	$-3/4$	0.6	1000×10^{-6}	$+1181P + 338Q$
CD	$-Q$	-1	0.8	1000×10^{-6}	$+800Q$
CE	$+15P/8$	0	1.5	500×10^{-6}	0
DE	$-17P/8$	0	1.7	1000×10^{-6}	0

• با ترکیب نتایج مسئله نمونه 11.4، مشتق انرژی کرنشی نسبت به Q را در اثر بارهای P و Q به دست می آوریم.

$$y_C = \frac{\partial U}{\partial Q} = \sum_{i=1}^7 \left(\frac{F_i L_i}{A_i E} \right) \frac{\partial F_i}{\partial Q} = \left(\frac{F_3 L_3}{A_3 E} \right) \frac{\partial F_3}{\partial Q} + \left(\frac{F_4 L_4}{A_4 E} \right) \frac{\partial F_4}{\partial Q} + \left(\frac{F_5 L_5}{A_5 E} \right) \frac{\partial F_5}{\partial Q} = \frac{1}{E} (4306P + 4263Q)$$

• با قرار دادن $Q=0$ در این رابطه، تغییر مکان در C به دست می آید.

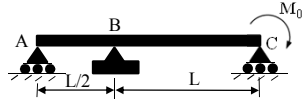
$$y_C = \frac{4306(40 \times 10^3 N)}{73 \times 10^9 Pa} \quad y_C = 2.36 \text{ mm} \downarrow$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری
© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 11 - 41/46

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مسئله 10.119 Beer & Johnston, 1981, P 522-

در تیر یکنواخت مقابل عکس العمل هر تکیه گاه را به دست آورید.



تیر نامعین از درجه اول است و یک تکیه گاه اضافه تر از حد مورد نیاز برای باقی ماندن در تعادل وجود دارد.

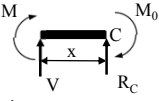
$$\sum M_B = 0 \rightarrow R_C L - M_0 - R_A L / 2 = 0$$

$$R_C = \frac{R_A}{2} + \frac{M_0}{L}$$

اکنون با استفاده از قضیه کستینگلیانو خیز نقطه ای که عکس العمل مجهول اضافی داشتیم و به جایش نیروی R گذاشتیم (مثلاً A) را به دست می آوریم.

برای استفاده از قضیه کستینگلیانو $x_j = \int_0^L \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial P_j} dx$ داریم:

برای قسمت BC : $0 < x < L$



$$\sum M = 0 \rightarrow -M + R_C x - M_0 = 0 \quad M = \left(\frac{R_A}{2} + \frac{M_0}{L} \right) x - M_0 \quad \frac{dM}{dR_A} = \frac{x}{2}$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری
© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 11 - 42/46

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مسئله 10.119- Beer & Johnston, 1981, P 522- (ادامه)

برای قسمت AB : $0 < v < L/2$

$\sum M = 0 \rightarrow -M + R_A v = 0 \quad M = R_A v \quad \frac{dM}{dR_A} = v$

قضیه کستینگلیانو (که همیشه برای کل سازه نوشته می شود):

$$y_A = \frac{1}{EI} \int M \frac{dM}{dR_A} dx = \frac{1}{EI} \int_0^{L/2} (R_A v) v dv + \frac{1}{EI} \int_0^L \left[\left(\frac{M_0}{L} + \frac{R_A}{2} \right) x - M_0 \right] \frac{x}{2} dx$$

از آنجا که $y_A = 0$ است: $= \frac{1}{EI} \int_0^{L/2} R_A v^2 dv + \frac{1}{EI} \int_0^L \left(\frac{M_0}{2L} x^2 + \frac{R_A}{4} x^2 - \frac{M_0}{2} x \right) dx = 0$

با صرف نظر کردن از EI داریم:

$$R_A \frac{(L/2)^3}{3} + \frac{M_0}{2L} \frac{L^3}{3} + \frac{R_A}{4} \frac{L^3}{3} - \frac{M_0}{2} \frac{L^2}{2} = 0 \quad R_A = \frac{2}{3} \frac{M_0}{L} \uparrow$$

از رابطه $R_c = \frac{R_A}{2} + \frac{M_0}{L}$ داریم:

$$R_c = \frac{R_A}{2} + \frac{M_0}{L} = \frac{2M_0}{3L} \cdot \frac{1}{2} + \frac{M_0}{L} = \frac{4}{3} \frac{M_0}{L}$$

از $\sum F_y = 0$ برای کل تیر داریم:

$$R_A + R_B + R_c = 0$$

$$R_B = -\frac{2M_0}{3L} - \frac{4}{3} \frac{M_0}{L} = -2 \frac{M_0}{L} \quad R_B = 2 \frac{M_0}{L} \downarrow$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری
© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 11 - 43/46

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مسئله 10.128- Beer & Johnston, 1981, P 523-

شناگری به جرم 75kg از ارتفاع 0.6m روی انتهای یک تخته شیرجه فرود می آید. سطح مقطع تخته شیرجه یکنواخت است. با فرض اینکه پای شیرجه زن صلب است، به دست آورید: الف: خیز ماکزیمم در C ب: تنش خمشی ماکزیمم در تخته شیرجه ج: بار ایستایی معادل $E=10\text{GPa}$ است.

$$I = \frac{1}{12} b d^3 = \frac{1}{12} (350)(60)^3$$

$$= 63 \times 10^5 \text{ mm}^4 = 6.3 \times 10^6 \text{ m}^4$$

$$EI = 10 \times 10^3 \text{ MPa} \times 63 \times 10^5 \text{ mm}^4$$

$$= 63 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{mm}^2 = 63 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}^2$$

$$\sum M_B = 0 \rightarrow -P_m (3) + R_A (1) = 0$$

$$R_A = 3P_m$$

بار ایستایی معادلی که به اندازه فرود آمدن شیرجه زن خیز ایجاد می کند.

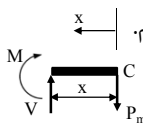
گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری
© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 11 - 44/46

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مسئله 10.128- Beer & Johnston, 1981, P 523- (ادامه)

برای راحتی انتگرال گیری دو مختصات x و v را برای هر انتها در نظر می گیریم.

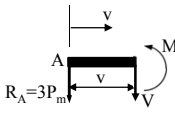
برای قسمت BC : $0 < x < 3$



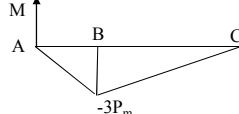
$$M + P_m x = 0 \rightarrow M = -P_m x$$

$$\frac{dM}{dP_m} = -x$$

برای قسمت AB : $0 < v < 1$



$$M + 3P_m v = 0 \rightarrow M = -3P_m v$$

$$\frac{dM}{dP_m} = -3v$$


$$y_m = \int \frac{M}{EI} \frac{dM}{dP_m} ds = \frac{1}{EI} \int_0^3 (-P_m x)(-x) dx + \frac{1}{EI} \int_0^1 (-3P_m v)(-3v) dv$$

$$= \frac{P_m}{EI} \left[\frac{(3)^3}{3} + \frac{9(1)^3}{3} \right] = \frac{P_m}{63 \times 10^3 \text{ N.m}^2} [9 + 3] = 1.90476 \times 10^{-4} P_m$$

$$P_m = 5250 y_m$$

یا:
گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 11 - 45/46

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مسئله 10.128- Beer & Johnston, 1981, P 523- (ادامه)

برای $h = 600 \text{ mm}$ داریم: وزن شناگر: $W = 75 \text{ kg} \times 9.81 \text{ m/s}^2$

دقت شود در محاسبه انرژی پتانسیل از y_m صرف نظر نمی کنیم؛ زیرا مقدار آن مجهول مسئله است.

$$W(h + y_m) = U_m = \frac{1}{2} P_m y_m = \frac{1}{2} (5250) y_m^2 = 2625 y_m^2$$

$$75 \text{ kg} \times 9.81 \text{ m/s}^2 (0.6 + y_m) = 2625 y_m^2$$

$$2625 y_m^2 - 735.75 y_m - 441.45 = 0$$

$$y_m = 0.5735, -0.2932$$

بار ایستایی معادل

$$P_m = 5250 y_m = 5250(0.5735) = 3010.875 \text{ N}$$

تنش ماکزیمم در نقطه B که M ماکزیمم است اتفاق می افتد.

$$M_B = -P_m (3) = -3010.875 (3) = -9032.625 \text{ N.m}$$

$$\sigma_m = \frac{MC}{I} = \frac{-9032.625 \left(\frac{0.06}{2} \right)}{6.3 \times 10^{-6} \text{ m}^4} = -43012500 \text{ Pa} = -43 \text{ MPa}$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 11 - 46/46

