

Third Edition

CHAPTER

7

MECHANICS OF MATERIALS

Ferdinand P. Beer
E. Russell Johnston, Jr.
John T. DeWolf

Lecture Notes:
J. Walt Oler
Texas Tech University

تبدیل کرنش

© M.H. Abolbashari, Ferdowsi University of Mashhad

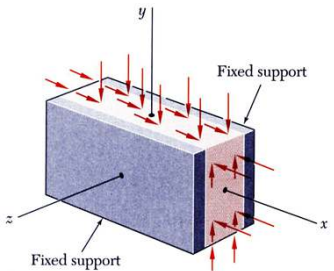
© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

Third Edition

MECHANICS OF MATERIALS

Beer • Johnston • DeWolf

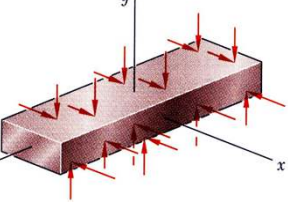
ادامه فصل ۷: تبدیل کرنش صفحه‌ای



- **کرنش صفحه‌ای** - تغییر شکل مصالح در صفحات موازی اتفاق می‌افتد و در همه آن صفحات یکسان است.
- **مثال:** در یک صفحه که از نظر انبساط و انقباض جانبی توسط تکیه‌گاه‌هایی صلب و ثابت مقید شده و تحت یک بار گسترده یکنواخت در امتداد لبه‌های آن قرار گرفته باشد کرنش صفحه‌ای اتفاق می‌افتد.

در این حالت مؤلفه‌های کرنش عبارتند از:

$$\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy} \quad (\epsilon_z = \gamma_{zx} = \gamma_{zy} = 0)$$



- **مثال:** یک میله بلند را که تحت بار گسترده یکنواخت عرضی در امتداد لبه‌هایش قرار دارد در نظر بگیرید. به سبب تقارن، المان‌هایی که در هر مقطع عرضی قرار دارند و خیلی به انتهای میله نزدیک نباشند نمی‌توانند تغییرشکلی خارج از آن صفحه داشته باشند و حالت کرنش صفحه‌ای وجود دارد. یعنی: $\epsilon_z = \gamma_{zx} = \gamma_{zy} = 0$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

7 - 2/14

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

تبدیل کرنش صفحه‌ای

• حالت کرنش در نقطه Q نسبت به مختصات مرجع XY و نسبت به مؤلفه‌های کرنش $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$ دیگرمانند $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$ دارد، که می‌خواهیم آن‌ها را به دست آوریم.

$\Delta x = \Delta s \cos \theta$
 $\Delta y = \Delta s \sin \theta$

$(\Delta s)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$
 $(AB')^2 = (AC')^2 + (C'B')^2 - 2(AC')(C'B')\cos(\frac{\pi}{2} + \gamma_{xy})$
 $\cos(\frac{\pi}{2} + \gamma_{xy}) = -\sin \gamma_{xy} \approx -\gamma_{xy}$

از آنجا که کرنش‌ها کوچکند:

$$(\Delta s)^2 \{1 + 2\epsilon(\theta) + [\epsilon(\theta)]^2\} = (\Delta x)^2 [1 + 2\epsilon_x + \epsilon_x^2] + (\Delta y)^2 [1 + 2\epsilon_y + \epsilon_y^2] - 2(\Delta x)(\Delta y)(1 + \epsilon_x\epsilon_y + \epsilon_x\epsilon_y + \epsilon_y\epsilon_y)\cos(\frac{\pi}{2} + \gamma_{xy})$$

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 7 - 3/14

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

تبدیل کرنش صفحه‌ای (ادامه)

اکنون مقادیر Δx و Δy را جایگزین می‌کنیم:

$$(\Delta s)^2 \{1 + 2\epsilon(\theta) + [\epsilon(\theta)]^2\} = (\Delta s \cos \theta)^2 [1 + 2\epsilon_x + \epsilon_x^2] + (\Delta s \sin \theta)^2 [1 + 2\epsilon_y + \epsilon_y^2] - 2(\Delta s \cos \theta)(\Delta s \sin \theta)(1 + \epsilon_x\epsilon_y + \epsilon_x\epsilon_y + \epsilon_y\epsilon_y)\cos(\frac{\pi}{2} + \gamma_{xy})$$

$\epsilon(\theta) = \epsilon_x \cos^2 \theta + \epsilon_y \sin^2 \theta + \gamma_{xy} \sin \theta \cos \theta$ (1)

• کرنش نرمال در راستای OB که با محور X زاویه 45 درجه دارد عبارت است از:

$$\epsilon_{OB} = \epsilon(45^\circ) = \frac{1}{2}(\epsilon_x + \epsilon_y + \gamma_{xy})$$

$\gamma_{xy} = 2\epsilon_{OB} - (\epsilon_x + \epsilon_y)$ (2)

• از روابط مثلثاتی که در تبدیل تنش استفاده شد، از رابطه (1) داریم:

$$\epsilon_{x'} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\theta$$
 (3)
$$\epsilon_{y'} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} - \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 2\theta - \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\theta$$
 (4)
$$\epsilon_{x'} + \epsilon_{y'} = \epsilon_x + \epsilon_y$$
 (5)

• از جمع دو رابطه داریم:

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالشیری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 7 - 4/14

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

تبدیل کرنش صفحه‌ای (ادامه)

- به دست آوردن $\gamma_{x'y'}$:
- اگر در رابطه (3) $\epsilon_{x'}$ به جای θ مقدار $\theta+45^\circ$ قرار دهیم داریم:

$$\epsilon(OD) = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} - \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \sin 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \cos 2\theta \quad (6)$$

رابطه (2) $\gamma_{xy} = 2\epsilon_{OB} - (\epsilon_x + \epsilon_y)$ را برای OD (راستای 45° محورهای $x'y'$) می‌نویسیم:

$$\gamma_{x'y'} = 2\epsilon_{OD} - (\epsilon_{x'} + \epsilon_{y'})$$

اگر در این رابطه مقدار ϵ_{OD} را از رابطه (6) جایگزین کنیم داریم:

$$\gamma_{x'y'} = 2\left[\frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} - \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \sin 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \cos 2\theta\right] - (\epsilon_{x'} + \epsilon_{y'})$$

$$\frac{\gamma_{x'y'}}{2} = -\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \sin 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \cos 2\theta$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

معادل $\tau_{x'y'}$ در تبدیل تنش

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالشیری
© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 7 - 5/14

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

دایره مور برای کرنش صفحه‌ای

- معادلات تبدیل کرنش صفحه‌ای شبیه روابط تبدیل تنش صفحه‌ای است - بنابراین دایره مور را می‌توان به کار برد.
- دایره‌ای به قطر XY و شعاع R :

$$\epsilon_{ave} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} \quad R = \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

- محورهای اصلی کرنش و کرنش‌های اصلی

$$\tan 2\theta_p = \frac{\gamma_{xy}}{\epsilon_x - \epsilon_y}$$

$$\epsilon_{max} = \epsilon_{ave} + R \quad \epsilon_{min} = \epsilon_{ave} - R$$

- کرنش برشی در صفحه ماکزیمم

$$\gamma_{max} = 2R = \sqrt{(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2}$$

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 7 - 6/14

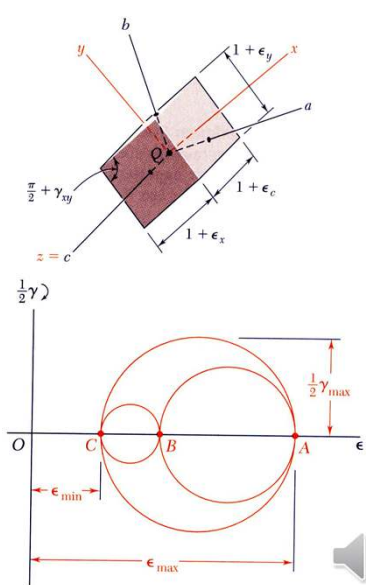
Third Edition

MECHANICS OF MATERIALS

Beer • Johnston • DeWolf

McGraw Hill

تحلیل سه بعدی کرنش



- قبلاً تشریح شد که سه محور اصلی وجود دارد که وجوه المان عمود بر محورها عاری از تنش‌های برشی هستند.
- از قانون هوک ($\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$ و روابط مشابه) می‌توان نتیجه گرفت که کرنش برشی نیز روی آن وجوه صفر است و

صفحات اصلی تنش صفحات اصلی کرنش نیز هستند.

- چرخش حول محورهای اصلی با دایره مور نمایش داده می‌شود.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

7 - 7/14

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

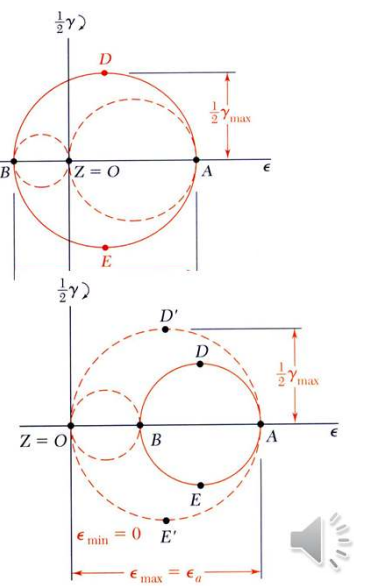
Third Edition

MECHANICS OF MATERIALS

Beer • Johnston • DeWolf

McGraw Hill

تحلیل سه بعدی کرنش (ادامه)



- برای حالت کرنش صفحه‌ای که X و Y محورهای صفحه کرنش باشند، داریم:
 - محور Z نیز محور اصلی است.
 - کرنش قائم مربوطه با نقطه $Z=0$ یا مرکز مختصات بیان می‌شود.
- اگر نقاط A و B در دو طرف مرکز مختصات قرار گرفته باشند، کرنش برشی ماکزیمم کرنش برشی در-صفحه ماکزیمم، D و E هستند.
- اگر نقاط A و B در یک طرف مرکز مختصات قرار گرفته باشند، کرنش برشی ماکزیمم کرنش برشی خارج-از-صفحه و نقاط D' و E' هستند.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

7 - 8/14

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

MECHANICS OF MATERIALS

Beer • Johnston • DeWolf

تحلیل سه بعدی کرنش (ادامه)

- حالت تنش اصلی صفحه‌ای در نظر بگیرید با:

$$\sigma_x = \sigma_a \quad \sigma_y = \sigma_b \quad \sigma_z = 0$$
- کرنش‌های قائم مربوط عبارتست از:

$$\varepsilon_a = \frac{\sigma_a}{E} - \frac{\nu \sigma_b}{E}$$

$$\varepsilon_b = -\frac{\nu \sigma_a}{E} + \frac{\sigma_b}{E}$$

$$\varepsilon_c = -\frac{\nu}{E}(\sigma_a + \sigma_b) = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_a + \varepsilon_b)$$
- کرنش عمود بر صفحه تنش (صفحه XY) صفر نیستند.
- اگر در دایره مور B بین A و C قرار داشته باشد، کرنش برشی ماکزیمم نقاط D' و E' است که برابر با قطر CA است و کرنش برشی خارج از صفحه ماکزیمم است.

$$R = \frac{\gamma_{\max}}{2} = \frac{CA}{2} \quad \text{or} \quad \gamma_{\max} = CA$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالشیری

7 - 9/14

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

MECHANICS OF MATERIALS

Beer • Johnston • DeWolf

اندازه‌گیری کرنش: گل کرنش

- کرنش سنج‌ها از طریق تغییر مقاومتشان کرنش‌های قائم را نشان می‌دهند.
- **گل کرنش 45°:** ε_x و ε_y مستقیماً اندازه‌گیری می‌شوند. γ_{xy} از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{OB} - (\varepsilon_x + \varepsilon_y)$$

- **گل کرنش با زوایای دلخواه:** کرنش‌های قائم و برشی از کرنش‌های قائمی که در هر سه جهت دلخواهی اندازه‌گیری گرفته شده باشند، از روابط زیر به دست می‌آیند.

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \varepsilon_x \cos^2 \theta_1 + \varepsilon_y \sin^2 \theta_1 + \gamma_{xy} \sin \theta_1 \cos \theta_1 \\ \varepsilon_2 &= \varepsilon_x \cos^2 \theta_2 + \varepsilon_y \sin^2 \theta_2 + \gamma_{xy} \sin \theta_2 \cos \theta_2 \\ \varepsilon_3 &= \varepsilon_x \cos^2 \theta_3 + \varepsilon_y \sin^2 \theta_3 + \gamma_{xy} \sin \theta_3 \cos \theta_3 \end{aligned}$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالشیری

7 - 10/14

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مثال:

به وسیله اندازه گیری‌هایی که با استفاده از کرنش‌سنج متعامد در یک نقطه مشخص از یک قطعه ماشین انجام شده است، مقادیر $\varepsilon_{45^\circ} = 0.0002$ ، $\varepsilon_{90^\circ} = 0.0003$ و $\varepsilon_{0^\circ} = -0.0005$ به دست آمده است. با فرض $E = 200 \times 10^3 \text{ N/mm}^2$ و $\nu = 0.3$ تنش‌های اصلی را در نقطه مورد نظر به دست آورید. (از روابط تنش و کرنش در حالت تنش صفحه‌ای استفاده کنید)

$\varepsilon_x = \varepsilon_{0^\circ} = -0.0005$
 $\varepsilon_y = \varepsilon_{90^\circ} = 0.0003$
 $\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{45^\circ} - (\varepsilon_{0^\circ} + \varepsilon_{90^\circ})$
 $= 2(0.0002) - (-0.0005 + 0.0003) = 0.0006$
 $x(-5, -3) \quad y(3, 3) \quad OC = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} = \frac{-5 + 3}{2} = -1$
 $R = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$
 $\varepsilon_1 = \varepsilon_{\max} = R - OC = 10^{-4}(5 - 1) = 0.0004$
 $\varepsilon_2 = \varepsilon_{\min} = -R - OC = 10^{-4}(-5 - 1) = -0.0006$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالشیری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

7 - 11/14

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مثال (ادامه)

$\sigma_1 = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2) = \frac{200 \times 10^3}{1-(0.3)^2} [0.0004 - (0.3)(0.0006)] = 48.3 \text{ N/mm}^2$
 $\sigma_2 = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1) = \frac{200 \times 10^3}{1-(0.3)^2} [-0.0006 - (0.3)(0.0004)] = -105 \text{ N/mm}^2$

$\tan 2\theta_p = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} = \frac{6}{-5-3} = -\frac{3}{4}, 2\theta_p = -36.8^\circ, \theta_p = -18.4^\circ$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالشیری

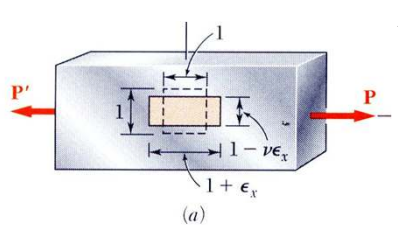
© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

7 - 12/14

MECHANICS OF MATERIALS

Beer • Johnston • DeWolf

رابطه میان E ، G و ν



• یک میلۀ باریک که تحت بارگذاری محوری است، در جهت محور کشیده شده و در جهات عرضی منقبض می‌شود.

• یک المان مکعبی نیز در آن شرایط مکعب مستطیل می‌شود. نیروی محوری باعث بوجود آمدن کرنش قائم می‌شود.

• اگر یک المان مکعبی مانند شکل مقابل بارگذاری شود، به شکل متوازی‌السطوح در می‌آید. پس نیروی محوری باعث کرنش برشی نیز می‌شود.

• بنابراین مؤلفه‌های کرنش‌های قائم و برشی به هم مربوط می‌شوند. از این ارتباط می‌توان اثبات کرد که رابطه زیر برقرار است.

$$\frac{E}{2G} = (1 + \nu)$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالشیری

7 - 13/14

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

MECHANICS OF MATERIALS

Beer • Johnston • DeWolf

اثبات رابطه:

اگر در رابطه $\epsilon_{x'}$ حالت کرنش برشی خالص داشته باشیم که در زاویه ۴۵ درجه تبدیل به کرنش قائم اصلی می‌شود:

$$\epsilon_{x'} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\theta$$

از رابطه کرنش راستای ۴۵ درجه $\gamma_{xy} = 2\epsilon_{OB} - (\epsilon_x + \epsilon_y)$ هم به نتیجه مشابهی می‌رسیم.

از طرفی بر اساس قانون هوک:

$$\epsilon_{OB} = \epsilon_{x'} = \frac{\gamma_{xy}}{2}$$

بنابراین:

$$\epsilon_{x'} = \frac{\tau_{xy}}{2G} \quad (1)$$

ولی هر تنش برشی خالص τ_{xy} را می‌توان بر حسب تنش‌های اصلی که در امتداد ۴۵ درجه نسبت به امتداد تنش برشی عمل می‌کند بیان کرد:

از رابطه تنش و کرنش (تنش صفحه‌ای) داریم:

$$\sigma_{\max, \min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_{\max} = \sigma_1 = +\tau_{xy}, \quad \sigma_{\min} = \sigma_2 = -\tau_{xy}$$

$$\epsilon_{x'} = \epsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \nu \frac{\sigma_2}{E} = \frac{\tau_{xy}}{E} - \nu \frac{-\tau_{xy}}{E} = \frac{\tau_{xy}}{E} (1 + \nu) \quad (2)$$

از برابر قرار دادن (1) و (2) داریم:

$$\frac{\tau_{xy}}{2G} = \frac{\tau_{xy}}{E} (1 + \nu) \rightarrow G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالشیری

7 - 14/14

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

روابطی که تا کنون معرفی شده:

$$\pm \frac{\sigma_1}{r_1} \pm \frac{\sigma_2}{r_2} = \frac{P}{t}$$

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

$$\sigma_{ave} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \quad R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_{max} = \sigma_{ave} + R, \quad \sigma_{min} = \sigma_{ave} - R$$

$$\sigma_{max,min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

$$X \begin{cases} \sigma_x \\ -\tau_{xy} \end{cases}, Y \begin{cases} \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{cases}$$

$$\tau_{max,min} = R = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\tan 2\theta_s = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}$$

$$\sigma' = \sigma_{ave} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

$$\theta_p - \theta_s = 45^\circ$$

$$\tau_{max} = \pm \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

تنشهای قائم

$$\sigma_x = \pm \frac{P}{A} \pm \frac{M_z y}{I_z} \pm \frac{M_y z}{I_y}$$

شعاع محور

$$\tau_{xy} \text{ or } \tau_{xz} = \frac{Tc}{J}$$

$$\tau_{xy} = \frac{V_y Q}{I_z t}$$

$$\tau_{xz} = \frac{V_z Q}{I_y t}$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

7 - 16

