

Third Edition

MECHANICS OF MATERIALS

CHAPTER 3

Ferdinand P. Beer
E. Russell Johnston, Jr.
John T. DeWolf

Lecture Notes:
J. Walt Oler
Texas Tech University

پیچش

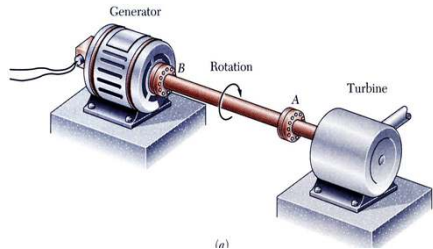
© M.H. Abolbashari, Ferdowsi University of Mashhad

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

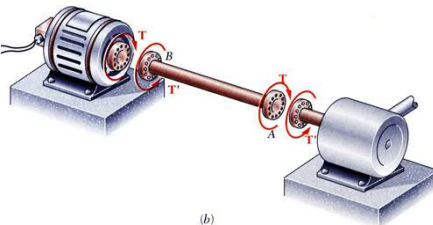
MECHANICS OF MATERIALS

Beer • Johnston • DeWolf

بارهای پیچشی روی محورهای استوانه‌ای



(a)



(b)

- می‌خواهیم تنش‌ها و کرنش‌های محورهای استوانه‌ای را تحت کوپل‌های پیچشی یا گشتاور به دست آوریم.
- توربین‌ها روی محورهای گشتاور T اعمال می‌کنند.
- محورهای گشتاور را به ژنراتور انتقال می‌دهند.
- ژنراتورها گشتاوری برابر با T و در خلاف آن تولید می‌کنند (T').

3-2/24

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

گشتاور خالص در اثر تنش‌های داخلی

- حاصل جمع خالص تنش‌های برشی یک گشتاور داخلی است که برابر و در خلاف گشتاور خارجی است.

$$T = \int \rho dF = \int \rho(\tau dA)$$

- هرچند حاصل جمع خالص گشتاور در اثر تنش‌های برشی معلوم است، ولی توزیع تنش‌ها ناشناخته است. یعنی توزیع تنش‌های برشی از نظر ایستایی نامعین‌اند-برای تعیین آن‌ها باید تغییر شکل‌های محور را در نظر بگیریم.
- برخلاف تنش‌های قائم در بارگذاری محوری، توزیع تنش‌های برشی در اثر اعمال بارهای پیچشی، نمی‌تواند یکنواخت فرض شود.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالشیری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

3-3/24

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مؤلفه‌های برشی در راستای محور

- گشتاورهایی که به محور وارد می‌شوند در صفحاتی که بر محور عمودند تنش‌های برشی تولید می‌کنند.
- شرایط تعادل ایجاب می‌کند که تنش‌هایی برابر با آن‌ها در صفحاتی که موازی محور هستند بوجود آید.
- وجود مؤلفه برش محوری را می‌توان با در نظر گرفتن اینکه محور از صفحاتی نازک که در راستای محور قرار گرفته‌اند تشکیل شده است، توجیه کرد.
- این صفحات نازک وقتی تحت گشتاورهایی در دو سر محور که از نظر مقدار برابر و در خلاف جهت یکدیگرند قرار بگیرند، نسبت به هم می‌لغزند.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالشیری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

3-4/24

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

تغییر شکل محور

- با مشاهده می‌توان دریافت که زاویه پیچش با گشتاور اعمال شده و طول محور متناسب است.
 $\phi \propto T$
- $\phi \propto L$
- وقتی محوری تحت پیچش قرار می‌گیرد هر مقطعی از محور استوانه‌ای به صورت صفحه باقی می‌ماند و اعوجاج نمی‌یابد.
 دلایل عدم اعوجاج را در کتاب مطالعه نمایید.
- سطح مقطع محورهای استوانه‌ای توپر و توخالی صفحه باقی می‌مانند و اعوجاج نمی‌یابند زیرا محور استوانه‌ای تقارن محوری دارد.
- سطح مقطع محورهای غیر استوانه‌ای (غیر متقارن محوری) تحت پیچش اعوجاج می‌یابند.

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 3-5/24

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

کرنش برشی

- یک مقطع داخلی از یک محور را در نظر بگیرید (شکل b). با اعمال پیچش، المان داخلی استوانه به شکل لوزی در می‌آید.
- از آنجا که انتهای المان صفحه باقی می‌ماند، کرنش برشی برابر با زاویه پیچش است.

$$L\gamma = \rho\phi \quad \text{or} \quad \gamma = \frac{\rho\phi}{L}$$

- بنابراین

$$\gamma_{\max} = \frac{c\phi}{L} \quad \text{and} \quad \gamma = \frac{\rho}{c} \gamma_{\max}$$

- کرنش برشی متناسب با زاویه پیچش و شعاع است.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالشیری
 © 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 3-6/24

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

تنش‌ها در محدوده الاستیک

- از ضرب معادله قبل در مدول برشی داریم:

$$G\gamma = \frac{\rho}{c} G\gamma_{\max}$$

- با استفاده از قانون هوک $\tau = G\gamma$ ، داریم:

$$\tau = \frac{\rho}{c} \tau_{\max}$$

- تنش برشی در مقطع بر حسب شعاع به شکل خطی تغییر می‌کند.
- یادآور می‌شود که ممان حاصل از توزیع تنش‌های داخلی برابر با گشتاور محور در آن مقطع است:

ممان اینرسی قطبی

$$T = \int \rho \tau dA = \frac{\tau_{\max}}{c} \int \rho^2 dA = \frac{\tau_{\max}}{c} J$$

- نتیجه به عنوان رابطه پیچش الاستیک شناخته می‌شود.

$$\tau_{\max} = \frac{Tc}{J} \quad \text{and} \quad \tau = \frac{T\rho}{J}$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالشیری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

3-7/24

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

تنش‌های قائم

- المان‌هایی که موازی و یا عمود بر محور هستند تنها تنش برشی دارند.
- المان‌هایی که در جهت‌های دیگر قرار گرفته‌اند تنش‌های قائم، تنش‌های برشی و یا ترکیبی از آن‌ها دارند.
- یک المان در راستای 45° با محور در نظر بگیرید.

$$A_0 = A \cos 45^\circ = A \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow A = \sqrt{2} A_0$$

$$F = 2(\tau_{\max} A_0) \cos 45^\circ = \tau_{\max} A_0 \sqrt{2}$$

$$\sigma_{45^\circ} = \frac{F}{A} = \frac{\tau_{\max} A_0 \sqrt{2}}{A_0 \sqrt{2}} = \tau_{\max}$$

- المان a در برش خالص است.
- المان c در یک راستا تحت کشش و در راستای دیگر تحت فشار است.
- توجه کنید که تنش‌های المان‌های a و c از نظر عددی مقادیر یکسانی دارند.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالشیری

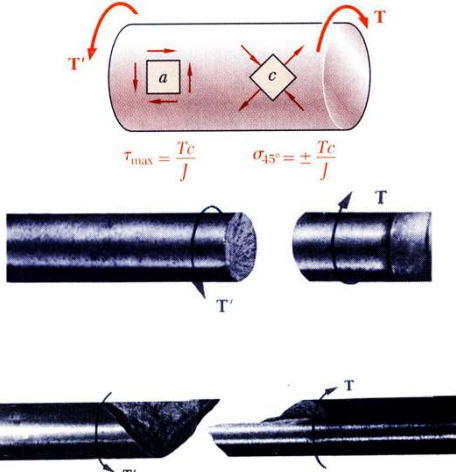
© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

3-8/24

MECHANICS OF MATERIALS

Beer • Johnston • DeWolf

مود شکست پیچشی برعکس مود شکست کششی!



- قبلاً دیدیم که مصالح چکش خوار معمولاً در اثر برش گسیخته می‌شوند.
- در اثر پیچش، یک نمونه از جنس مصالح چکش خوار در راستای صفحه برش ماکزیمم (یعنی صفحه عمود بر محور) گسیخته می‌شود. تحت بار محوری مود شکست آن متفاوت و مانند شکل زیر بود.
- ولی مصالح شکننده در اثر کشش ضعیف‌ترند تا برش.
- در اثر پیچش، یک نمونه از جنس مصالح شکننده در راستای صفحاتی که عمود بر جهتی هستند که در آن‌ها کشش ماکزیمم است (یعنی در صفحاتی که با محور زاویه 45° می‌سازند) می‌شکند.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالشیری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

3-9/24

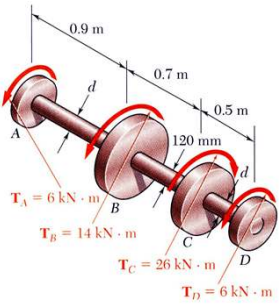
MECHANICS OF MATERIALS

Beer • Johnston • DeWolf

مسئله نمونه 3.1

حل:

- در محورهای AB و BC برش می‌زنیم و تحلیل تعادل ایستایی می‌کنیم تا بار گشتاور آن‌ها را بیابیم.
- رابطه پیچش الاستیک را به کار می‌بریم تا تنش‌های مینیمم و ماکزیمم محور BC را به دست آوریم.
- با داشتن تنش برش مجاز و گشتاور، از رابطه پیچش الاستیک قطر لازم را به دست می‌آوریم.



محور BC تو خالی و قطر داخلی و خارجی آن به ترتیب 90 mm و 120 mm است. محور AB و CD توپر هستند و قطر آنها d است. برای بارگذاری نشان داده شده، به دست آورید: الف) تنش برشی مینیمم و ماکزیمم در محور BC ، ب) قطر لازم d محور AB و CD اگر تنش برشی مجاز در این محورها 65 MPa باشد.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالشیری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

3-10/24

Beer • Johnston • DeWolf

MECHANICS OF MATERIALS

مسئله نمونه 3.1 (ادامه)

حل:

- محورهای AB و BC را مقطع می‌زنیم و تحلیل تعادل ایستایی می‌کنیم تا بار گشتاور آن‌ها را بیابیم.

$$\sum M_x = 0 = (6 \text{ kN} \cdot \text{m}) + (14 \text{ kN} \cdot \text{m}) - T_{BC}$$

$$T_{BC} = 20 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$\sum M_x = 0 = (6 \text{ kN} \cdot \text{m}) - T_{AB}$$

$$T_{AB} = 6 \text{ kN} \cdot \text{m} = T_{CD}$$

3-11/24

Beer • Johnston • DeWolf

MECHANICS OF MATERIALS

مسئله نمونه 3.1 (ادامه)

- رابطه پیچش الاستیک را به کار می‌بریم تا تنش‌های مینیمم و ماکزیمم محور BC را به دست آوریم.

$$\tau_{\max} = \frac{Tc}{J} = \frac{Tc}{\frac{\pi}{2}c^4}$$

$$65 \text{ MPa} = \frac{6 \text{ kN} \cdot \text{m}}{\frac{\pi}{2}c^3}$$

$$c = 38.9 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$d = 2c = 77.8 \text{ mm}$$

$$J = \frac{\pi}{2}(c_2^4 - c_1^4) = \frac{\pi}{2}[(0.060)^4 - (0.045)^4]$$

$$J = 13.92 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$\tau_{\max} = \tau_2 = \frac{T_{BC}c_2}{J} = \frac{(20 \text{ kN} \cdot \text{m})(0.060 \text{ m})}{13.92 \times 10^{-6} \text{ m}^4}$$

$$= 86.2 \text{ MPa}$$

$$\frac{\tau_{\min}}{\tau_{\max}} = \frac{c_1}{c_2} \quad \frac{\tau_{\min}}{86.2 \text{ MPa}} = \frac{45 \text{ mm}}{60 \text{ mm}}$$

$$\tau_{\min} = 64.7 \text{ MPa}$$

$C_2 - C_1$	$\tau_{\max} - \tau_{\min}$
15	21.5
2	2.39

نکته:

بنابراین هر چه جداره نازکتر باشد، تنش برشی تغییرات کمتری دارد. به همین دلیل برای به دست آوردن خواص برشی مصالح از استوانه جدار نازک به عنوان نمونه استفاده می‌کنند.

3-12/24

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

زاویه پیچش در محدوده الاستیک

- در اسلایدهای قبلی دیدیم که زاویه پیچش و کرنش برشی ماکزیمم با رابطه زیر به هم مربوط می‌شوند:

$$\gamma_{\max} = \frac{c\phi}{L}$$

- در محدوده الاستیک، کرنش برشی و تنش برشی با رابطه هوک به هم مربوط می‌شوند:

$$\gamma_{\max} = \frac{\tau_{\max}}{G} = \frac{Tc}{JG}$$

JG = صلبیت یا سختی پیچشی

- اگر از دو رابطه فوق مقدار کرنش برشی را مساوی هم قرار دهیم، زاویه پیچش به دست می‌آید.

$$\phi = \frac{TL}{JG}$$

شبهه $\delta = \frac{PL}{AE}$

- اگر بارگذاری پیچشی یا مقطع تغییر کند، زاویه پیچش مجموع پیچش‌های قطعات (ی یا گشتاور و مقطع ثابت) است.

$$\phi = \sum_i \frac{T_i L_i}{J_i G_i}$$

شبهه $\delta = \sum_i \frac{P_i L_i}{A_i E_i}$

- در صورتی که J, T و یا G در امتداد طول تغییر کنند:

$$\phi = \int_0^L \frac{T}{JG} dx$$

شبهه $\delta = \int_0^L \frac{P}{AE} dx$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالشیری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

3-13/24

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

محورهای نامعین ایستایی

- با داشتن ابعاد محور و گشتاور وارد شده، می‌خواهیم گشتاورهای عکس‌العمل را در A و B بیابیم.

از ترسیم آزاد محور داریم:

$$T_A + T_B = 90 \text{ lb} \cdot \text{ft}$$

که برای به دست آوردن گشتاورهای عکس‌العمل کافی نیست. مسئله از نظر ایستایی نامعین است.

- محور را به دو قسمت که باید تغییر شکل‌های سازگار داشته باشند تقسیم می‌کنیم.

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 = \frac{T_A L_1}{J_1 G} - \frac{T_B L_2}{J_2 G} = 0 \quad T_B = \frac{L_1 J_2}{L_2 J_1} T_A$$

در معادله تعادل اصلی جایگذاری می‌کنیم.

$$T_A + \frac{L_1 J_2}{L_2 J_1} T_A = 90 \text{ lb} \cdot \text{ft} \rightarrow T_A$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالشیری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

3-14/24

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مسئله نمونه 3.4

حل:

- برای هر دو محور تحلیل ایستایی می‌نماییم تا رابطه‌ای بین T_0 و T_{CD} بیابیم.
- از تحلیل سینماتیکی زاویه پیچش چرخنده‌ها را به هم مربوط می‌کنیم.
- گشتاور مجاز ماکزیمم هر محور را به دست می‌آوریم - **کوچکترین** را انتخاب می‌کنیم.
- زاویه چرخش مربوط و پیچش خالص انتهای A را به دست می‌آوریم.

دو محور فولادی توسط چرخنده به هم متصل شده‌اند. اگر برای هر محور $G = 11.2 \times 10^6$ Psi و تنش برشی مجاز 8 ksi باشد، به دست آورید: الف) بیشترین گشتاور T_0 که می‌توان به انتهای محور AB وارد کرد، ب) زاویه‌ای که انتهای A محور AB می‌پیچد.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالشیری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

3-15/24

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مسئله نمونه 3.4 (ادامه)

حل:

- برای هر دو محور تحلیل ایستایی می‌نماییم تا رابطه‌ای بین T_0 و T_{CD} بیابیم:
- از تحلیل سینماتیکی زاویه پیچش چرخنده‌ها را به هم مربوط می‌کنیم:

$$r_B \phi_B = r_C \phi_C$$

$$\phi_B = \frac{r_C}{r_B} \phi_C = \frac{2.45 \text{ in.}}{0.875 \text{ in.}} \phi_C$$

$$\phi_B = 2.8 \phi_C$$

$$\sum M_B = 0 = F(0.875 \text{ in.}) - T_0$$

$$\sum M_C = 0 = F(2.45 \text{ in.}) - T_{CD}$$

$$T_{CD} = 2.8 T_0$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالشیری

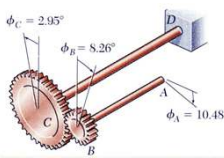
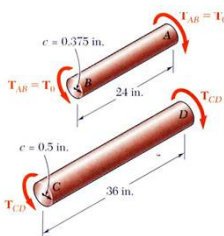
© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

3-16/24

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

مسئله نمونه 3.4 (ادامه)

- برای بیشترین گشتاور مجاز هر محور T_0 را می یابیم - کوچکترین را انتخاب می کنیم.
- زاویه چرخش هر محور و پیچش خالص انتهای A را به دست می آوریم.

$$\varphi_{A/B} = \frac{T_{AB}L}{J_{AB}G} = \frac{(561 \text{ lb} \cdot \text{in.})(24 \text{ in.})}{\frac{\pi}{2}(0.375 \text{ in.})^4 (11.2 \times 10^6 \text{ psi})}$$

$$= 0.0387 \text{ rad} = 2.22^\circ$$

$$\varphi_{C/D} = \frac{T_{CD}L}{J_{CD}G} = \frac{2.8(561 \text{ lb} \cdot \text{in.})(36 \text{ in.})}{\frac{\pi}{2}(0.5 \text{ in.})^4 (11.2 \times 10^6 \text{ psi})}$$

$$= 0.0514 \text{ rad} = 2.95^\circ, \text{ but } \varphi_C = \varphi_{C/D}$$

$$\varphi_B = 2.8\varphi_C = 2.8(2.95^\circ) = 8.26^\circ$$

$$\varphi_A = \varphi_B + \varphi_{A/B} = 8.26^\circ + 2.22^\circ \quad \boxed{\varphi_A = 10.48^\circ}$$

$$\tau_{\max} = \frac{T_{AB}c}{J_{AB}} \quad 8000 \text{ psi} = \frac{T_0(0.375 \text{ in.})}{\frac{\pi}{2}(0.375 \text{ in.})^4}$$

$$T_0 = 663 \text{ lb} \cdot \text{in.}$$

$$\tau_{\max} = \frac{T_{CD}c}{J_{CD}} \quad 8000 \text{ psi} = \frac{2.8T_0(0.5 \text{ in.})}{\frac{\pi}{2}(0.5 \text{ in.})^4}$$

$$T_0 = 561 \text{ lb} \cdot \text{in.} \quad \boxed{T_0 = 561 \text{ lb} \cdot \text{in.}}$$

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 3-17/24

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

طراحی محوره‌های انتقال

- اصول مشخصه عملکردی محوره‌های انتقال عبارتند از:
 - توان
 - سرعت
- گشتاور (T [N.m])، اعمال شده به محور را با توجه به توان P و سرعت زاویه‌ای ω [rad/s] به دست می آوریم:

$$T = \frac{P}{\omega} = \frac{P}{2\pi f}$$
- طراحی باید مصالح و سطح مقطع محور را چنان انتخاب کند که مشخصات عملکردی برآورده شود و تنش برشی از تنش برشی مجاز بیشتر نشود.
- تنش از تنش مجاز برشی بیشتر نشود.
- مینیمم مقدار مجاز پارامتر J/C

$$\tau_{\max} = \frac{Tc}{J}$$
- در محوره‌های تو خالی J/C_2 (که شعاع خارجی است) تعیین کننده است زیرا تنش ماکزیمم در شعاع خارجی اتفاق می افتد.

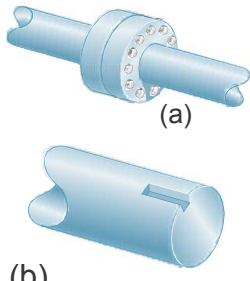
$$\frac{J}{c} = \frac{\pi}{2}c^3 = \frac{T}{\tau_{\max}} \quad (\text{solid shafts})$$

$$\frac{J}{c_2} = \frac{\pi}{2c_2}(c_2^4 - c_1^4) = \frac{T}{\tau_{\max}} \quad (\text{hollow shafts})$$

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. 3-18/24

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

تمرکز تنش در محورهاى دایره‌ای



(a)
(b)
Shaft examples.

- در عمل گشتاورها معمولاً از طریق کوپلینگ‌های فلانچی بر محور وارد می‌شوند. در محل اتصال فلانچ‌ها و یا در مجاورت خار تنش‌های بزرگی ایجاد می‌شود که از طریق روش‌های تحلیل تنش آزمایشگاهی و یا تئوری الاستیسیته می‌توان آن‌ها را محاسبه کرد.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالشیری
© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

3-19/24

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

تمرکز تنش در محورهاى دایره‌ای (ادامه)

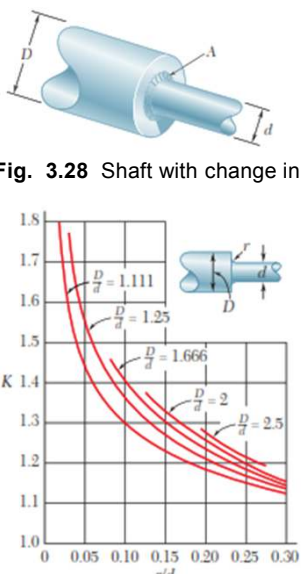


Fig. 3.28 Shaft with change in diameter.

Fig. 3.29 Stress-concentration factors for fillets in circular shafts†.

- در محوری که قطر آن به طور ناگهانی تغییر می‌کند، تمرکز تنش در نزدیک ناپیوستگی ایجاد می‌شود که با بیشترین تنش‌ها در A همراه است.
- این تنش‌ها را با استفاده از گرده می‌توان کاهش داد، و ماکزیمم مقدار تنش برشی در گرده عبارتست از:

$$\tau_{\max} = k \frac{TC}{J}$$

- که در آن TC/J برای محور با قطر کمتر و K ضریب تمرکز تنش است که از نمودار مقابل به دست می‌آید.

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

پیچش مقاطع غیر دایره‌ای

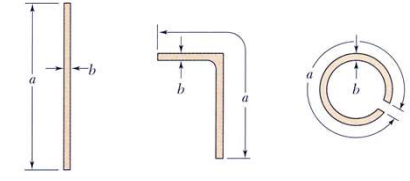


- رابطه پیچش قبلی برای محوره‌ای دایره‌ای تقارن محوری معتبر است.
- صفحات مسطح مقطع‌های محوره‌ای غیر دایره‌ای پس از پیچش مسطح باقی نمی‌مانند و توزیع تنش و کرنش خطی نیست.
- برای مقاطع یکنواخت:

$$\tau_{\max} = \frac{T}{c_1 ab^2} \quad \phi = \frac{TL}{c_2 ab^3 G}$$

TABLE 3.1. Coefficients for Rectangular Bars in Torsion

a/b	c ₁	c ₂
1.0	0.208	0.1406
1.2	0.219	0.1661
1.5	0.231	0.1958
2.0	0.246	0.229
2.5	0.258	0.249
3.0	0.267	0.263
4.0	0.282	0.281
5.0	0.291	0.291
10.0	0.312	0.312
∞	0.333	0.333



- برای محوره‌ای با سطح مقطع روبرو و a/b بزرگ، تنش برشی و زاویه پیچش مانند میله‌های با مقطع مستطیلی است.

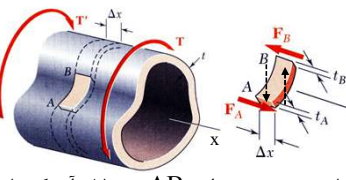
گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالشیری

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

3-21/24

MECHANICS OF MATERIALS Beer • Johnston • DeWolf

محوره‌ای توخالی جدار نازک با مقاطع غیر دایره‌ای



- ضخامت جداره می‌تواند در مقطع عرضی تغییر کند.
- با جمع نیروها در جهت X روی المان AB داریم:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow F_A - F_B = \tau_A (t_A \Delta x) - \tau_B (t_B \Delta x) = 0$$

$$\tau_A t_A = \tau_B t_B = \tau t = q = \text{shear flow} = \text{const.}$$

از آنجا که سطوح داخلی و خارجی المان بدون تنش هستند، مؤلفه‌های تنش برشی لبه AB و مقابل آن که با فلش خط چین نشان داده شده نیز صفر است.

- گشتاور محور را از انتگرال ممان بوجود آمده حول یک نقطه اختیاری مانند O در اثر تنش برشی محاسبه می‌کنیم.

$$dM_O = p dF = p \tau (t ds) = q (p ds) = q (2dA)$$

$$T = \oint dM_O = \oint 2q dA = 2qA$$

- برای مقاطع دایره‌ای جدار نازک:

$$\tau = \frac{q}{t} = \frac{T}{2tA} = \frac{Tr_m}{2tA r_m} = \frac{Tr_m}{2t(\pi r_m^2) r_m} = \frac{Tr_m}{2t\pi r_m^3} = \frac{Tr_m}{J}$$

- زاویه پیچش با استفاده از روش انرژی (از فصل ۱۱) عبارت است از:

$$\phi = \frac{TL}{4A^2 G} \oint \frac{ds}{t}$$

- انتگرال در امتداد خط وسط ضخامت مقطع (خط چین) محاسبه می‌شود.

$$J = \int r_m^2 dA = r_m^2 A = r_m^2 (2\pi r_m t) = 2\pi r_m^3 t$$

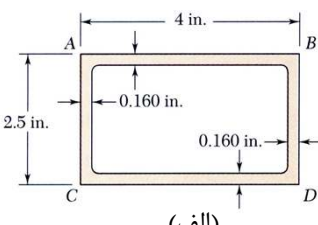
© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

3-22/24

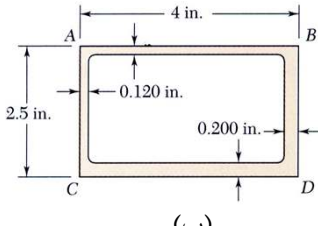
Beer • Johnston • DeWolf

مثال 3.10

روی یک لوله آلومینیمی با مقطع مستطیلی گشتاور 24 kip-in اعمال می‌شود. تنش برشی در هر چهار جداره را به دست آورید با الف) ضخامت یکنواخت 0.16 in و ب) ضخامت جداره در AC و AB 0.12 in و در BD و CD 0.2 in



(الف)



(ب)

حل:

- جریان برش را در دیواره‌ها به دست می‌آوریم.
- تنش‌های برشی را در هر دیواره به دست می‌آوریم.

3-23/24

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

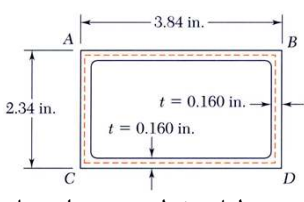
Beer • Johnston • DeWolf

مثال 3.10

حل:

- تنش‌های برشی را در هر جداره به دست می‌آوریم.
- جریان برش را در دیواره‌ها به دست می‌آوریم.

ابعاد مقطع مربوط به مستطیل خط چین است.



• مساحت مستطیل خط چین را محاسبه می‌نماییم.

$$A = (3.84 \text{ in.})(2.34 \text{ in.}) = 8.986 \text{ in.}^2$$

$$q = \frac{T}{2A} = \frac{24 \text{ kip-in.}}{2(8.986 \text{ in.}^2)} = 1.335 \frac{\text{kip}}{\text{in.}}$$

با ضخامت جداره متغیر

$$\tau = \frac{q}{t} = \frac{1.335 \text{ kip/in.}}{0.160 \text{ in.}} = 8.34 \text{ ksi}$$

$$\tau_{AB} = \tau_{AC} = \frac{1.335 \text{ kip/in.}}{0.120 \text{ in.}} = 11.13 \text{ ksi}$$

$$\tau_{BD} = \tau_{CD} = \frac{1.335 \text{ kip/in.}}{0.200 \text{ in.}} = 6.68 \text{ ksi}$$

پایان اسلایدهای پیش

3-24/24

© 2002 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

