

2.14- تفسیر هندسی مؤلفه‌های تانسوری (Geometric Interpretation of Tensor Components)

© M.H. Abolbashari, Ferdowsi University of Mashhad

بردارهای مبنا (Base vectors)

هنگامی که مختصات کارتزین انتخاب شود، بردارهای $\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3$ را می‌توان به عنوان بردارهای مبنا انتخاب کرد که موازی محورهای مختصات هستند. بنابراین اگر بردار $\vec{A}$ سه مؤلفه (A_1, A_2, A_3) داشته باشد، می‌توان نوشت:

$$\vec{A} = A_1 \vec{i}_1 + A_2 \vec{i}_2 + A_3 \vec{i}_3$$

در مختصات منحنی‌الخط در فضای اقلیدسی، بردارهای مبنا را با شرایط زیر معرفی می‌نماییم.

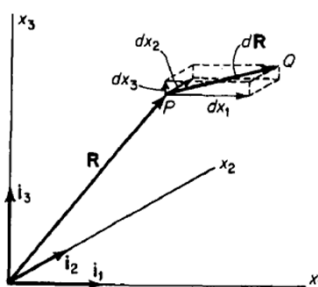


Fig. 2.14:1. Base vectors.

اگر $\overline{PQ}$ یک بردار کوچک $d\vec{R}$ باشد که نقطه $P=(x_1, x_2, x_3)$ را به نقطه $Q=(x_1+dx_1, x_2+dx_2, x_3+dx_3)$ متصل می‌کند که در آن مختصات کارتزین متعامدند، آنگاه، بدیهی است که:

$$(1) \quad d\vec{R} = dx^r \vec{i}_r = dx_r \vec{i}^r$$

که در آن $\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3$ و $\vec{i}^1, \vec{i}^2, \vec{i}^3$ بردارهای مبنا در امتداد محورهای مختصاتند.

در اینجا که سیستم مختصات کارتزین متعامد استفاده شده، می‌توان اندیس را کوارینت یا کنترارینت در نظر گرفت. در روابط بالا dx_r و dx^r به ترتیب دیفرانسیل‌های کنترارینت و کوارینت‌اند.

اکنون یک انتقال از سیستم مختصات **کارتزین متعامد** x^i به مختصات **عمومی** θ^i در نظر بگیرید.

$$(2) \quad \theta^i = \theta^i(x_1, x_2, x_3)$$

بر اساس قانون انتقال تانسورها، اگر dx^r و dx_r به عنوان تانسورهای مرتبه یک در نظر گرفته شوند، مؤلفه‌های آنها در مختصات **عمومی** عبارتند از:

$$(3) \quad d\theta^j = \frac{\partial \theta^j}{\partial x^i} dx^i, \quad dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial \theta^j} d\theta^j$$

$$(4) \quad d\theta_j = \frac{\partial \theta_j}{\partial x^i} dx^i, \quad dx_i = \frac{\partial \theta_j}{\partial x^i} d\theta_j$$

اکنون در (3)، $d\theta^i$ را می‌توان به عنوان **دیفرانسیل معمولی** متغیر θ^i که در معادله (2) تعریف شد در نظر گرفت؛ و اندیس بالا توجیه می‌شود. اما در معادله (4)، $d\theta_j$ را نمی‌شود یک دیفرانسیل معمول در نظر گرفت. $d\theta_j$ یک **دیفرانسیل کوارینت** است و معنی هندسی دیگری دارد که بعداً خواهیم دید.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

3/28

با استفاده از معادلات (3) و (4) می‌توان معادله (1) را به شکل زیر نوشت:

$$(5) \quad \begin{aligned} d\vec{R} &= dx^r \vec{i}_r = \frac{\partial x^s}{\partial \theta^r} d\theta^r \vec{i}_s = \left[\frac{\partial x^s}{\partial \theta^r} \vec{i}_s \right] d\theta^r = \left[\vec{g}_r \right] d\theta^r \\ &= dx_r \vec{i}^r = \frac{\partial \theta^r}{\partial x^s} d\theta_r \vec{i}^s = \left[\frac{\partial \theta^r}{\partial x^s} \vec{i}^s \right] d\theta_r = \left[\vec{g}^r \right] d\theta_r \end{aligned}$$

که در آن

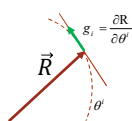
$$(6) \quad \begin{aligned} \text{بردارهای مبنای کوارینت یا} & \quad \vec{g}_r = \frac{\partial x^s}{\partial \theta^r} \vec{i}_s \\ \text{بردارهای مبنای معکوس (reciprocal)} & \quad \vec{g}^r = \frac{\partial \theta^r}{\partial x^s} \vec{i}^s \end{aligned}$$

از آنجا که $\vec{g}_r$ و $\vec{g}^r$ ترکیب خطی از بردارهای یک‌هستند، خودشان نیز بردارند.

$$\text{معادله (5)} \quad d\vec{R} = \vec{g}_r d\theta^r \quad \text{نشان می‌دهد که:}$$

$$(7) \quad g_i = \frac{\partial R}{\partial \theta^i}$$

بنابراین $\vec{g}_i$ چگونگی تغییرات بردار موقعیت $\vec{R}$ را با تغییر θ^i مشخص می‌کند. به عبارت دیگر، نیست عمود بردار بر لزوماً مماس که شود دقت است. θ^i **مختصات منحنی امتداد** در مماس $\vec{g}_i$



این بردارها در شکل 2.14:2 (اسلاید بعدی) نشان داده شده است.

4/28

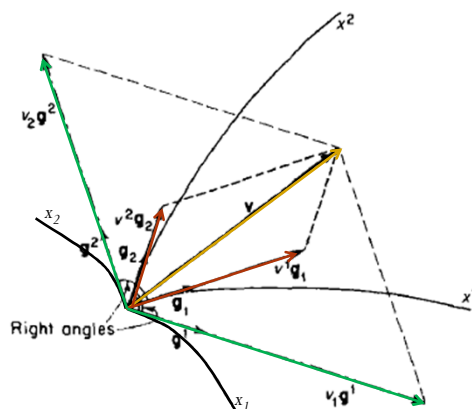


Fig. 2.14.2. Contravariant and covariant components of a vector $\mathbf{v}$ in two dimensions.

x^i و x_i دو سیستم مختصاتی که به هم تبدیل شده باشند نیستند، بلکه یک سیستم مختصات است که در آن دو نوع بردار پایه $\bar{g}^i$ و $\bar{g}_i$ را می توان تعریف کرد.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

5/28

به سادگی اثبات می شود که:

$$(8) \quad \begin{cases} \bar{g}_r \cdot \bar{g}_s = g_{rs}, & \text{Euclidean metric tensor} \\ \bar{g}^r \cdot \bar{g}^s = g^{rs}, & \text{Associated or Conjugate metric tensor} \end{cases}$$

$$\bar{g}_r \cdot \bar{g}_s = \frac{\partial x^n}{\partial \theta^r} \bar{i}_n \cdot \frac{\partial x^m}{\partial \theta^s} \bar{i}_m = \frac{\partial x^n}{\partial \theta^r} \cdot \frac{\partial x^m}{\partial \theta^s} \delta_{nm} = \frac{\partial x^m}{\partial \theta^r} \cdot \frac{\partial x^m}{\partial \theta^s} = g_{rs}$$

تعریف Euclidean metric tensor

به طور مشابه می توان قسمت دوم رابطه (8) و روابط (9) و (10) زیر را اثبات کرد.

$$(9) \quad \bar{g}^r \cdot \bar{g}_s = g_s^r = \delta_s^r$$

$$(10) \quad \bar{g}^r = g^{rs} \bar{g}_s, \quad \bar{g}_r = g_{rs} \bar{g}^s$$

از معادله (9) واضح است که بردارهای مبنای کنتراورینت $\bar{g}^1$ بر صفحه $\bar{g}_2 \bar{g}_3$ عمود است و $\bar{g}^2$ بر صفحه $\bar{g}_1 \bar{g}_3$ و $\bar{g}^3$ بر صفحه $\bar{g}_1 \bar{g}_2$ (مسئله 2.28 را ببینید)

برای **مختصات متعامد** که در آن: $\bar{g}_i \cdot \bar{g}_j = 0$ for $i \neq j$ ، می توان نشان داد که $\bar{g}_i$ در جهت $\bar{g}^i$ است و اینکه:

$$\bar{g}^i \cdot \bar{g}^j = 0 \text{ for } i \neq j$$

و همچنین از رابطه (9) داریم: (مسئله 2-12 که در اسلاید شماره ۱۸ سری ۱۳ نیز آمده است).

$$\bar{g}^r \cdot \bar{g}_s = \delta_s^r \rightarrow \bar{g}^i = \frac{1}{\bar{g}_i} \cdot \bar{g}^i, \bar{g}^i = \bar{g}^i \cdot \bar{g}^i = \frac{1}{\bar{g}_i} \cdot \frac{1}{\bar{g}_i} = \frac{1}{\bar{g}_i \bar{g}_i} = \frac{1}{\bar{g}_i \bar{g}_{ri} \bar{g}^m \bar{g}_{mi}} = \frac{1}{\bar{g}_i \bar{g}_{ri} \bar{g}^m \bar{g}_{mi}} = \frac{1}{\bar{g}_i \cdot \bar{g}_i} = \frac{1}{g_{ii}}, i \text{ not summed}$$

6/28

مؤلفه‌های کنتراورینت و کوارینت یک بردار

عبارت $v^r \bar{g}_r$ که در آن v^r یک تانسور کنتراورینت از رنک یک و $\bar{g}_r$ بردارهای مبنای کوارینت در یک نقطه دلخواه است را در نظر بگیرید. این عبارت تحت انتقال مختصات **نامتغیر** باقی می‌ماند.

$$v^r \bar{g}_r = \frac{\partial \bar{\theta}^r}{\partial \theta^s} v^s \cdot \frac{\partial \theta^s}{\partial \bar{\theta}^r} \bar{g}_s = \underbrace{\delta_i^s v^i}_{\delta_i^s} \bar{g}_s = v^s \bar{g}_s$$

و چون یک ترکیب خطی از بردارهای مبنای $\bar{g}_r$ است، یک بردار است که آن را با $\bar{V}$ نشان می‌دهیم:

$$(11) \quad \bar{V} = v^r \bar{g}_r$$

با استفاده از معادله (10)، $\bar{g}_r$ را با $g_{rs} \bar{g}^s$ جایگزین می‌نماییم. همچنین داریم:

$$(12) \quad \bar{V} = v^r \bar{g}_r = v^r g_{rs} \bar{g}^s = v_s \bar{g}^s$$

که

$$(13) \quad v_s = g_{rs} v^r \quad \text{به روش مشابهی داریم:} \quad v^r = g^{rs} v_s$$

از رابطه (10) تعریف می‌کنیم

بر اساس معادله (12) اگر $\bar{V}$ را با یک خط جهت‌دار نشان دهیم، آنگاه مؤلفه‌های کنتراورینت v^r مؤلفه‌های $\bar{V}$ در جهت بردارهای مبنای کوارینت است و مؤلفه‌های کوارینت v_r مؤلفه‌های $\bar{V}$ در امتداد بردارهای مبنای کنتراورینت است. یک نمایش دوبعدی در شکل [Fig. 2.14:2](#) نشان داده شده است.

7/28

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

$$\text{معادله (12)} \quad \bar{V} = v^r \bar{g}_r = v^r g_{rs} \bar{g}^s = v_s \bar{g}^s \quad \text{دلیل نامگذاری } v^r \text{ مؤلفه‌های}$$

کنتراورینت بردار $\bar{V}$ و v_r **مؤلفه‌های کوارینت** $\bar{V}$ است. بنابراین در فضای اقلیدسی تانسورهای v^r و v_r دو نوع بیان بردار $\bar{V}$ است. معادله (13) $v_s = g_{rs} v^r$ $v^r = g^{rs} v_s$ فرایند تبدیل اندیس‌های بالا و پایین را مشخص می‌کند.

Skip to slide 17

An advanced topic (added in the 2nd Edition)انتقال بردارهای مبنا $(g^i, \bar{g}^i)$ و $(g_i, \bar{g}_i)$

با توجه به بردارهای مبناي کوارینت و کنتراورینت در هر سیستم مختصات، از آنها می‌توان قوانین انتقال بردارها و تانسورها را از یک سیستم به سیستم مختصات دیگر به دست آورد.

اگر $g^i, \bar{g}^i$ و $g_i, \bar{g}_i$ به ترتیب بردارهای مبناي کنتراورینت و کوارینت دو سیستم مختصات باشند، حاصل ضرب داخلی بردارها را به شکل زیر تعریف می‌کنیم که عبارتست از مقدار حاصل ضرب مقدار بردارها در کسینوس زاویه بین آنها:

$$(14) \quad \beta_m^r = (\bar{g}_m \cdot g^r) = |\bar{g}_{mm} g^r| \cos(\bar{g}_m, g^r) \quad (m \text{ and } r \text{ not summed})$$

$$\beta_r^m = (\bar{g}^m \cdot g_r) = |\bar{g}^{mm} g_r| \cos(\bar{g}^m, g_r)$$

اندیس اول بالا و یا پایین مربوط به مختصاتی هستند که بردارهای مبناي آن $\bar{g}$'s و اندیس دوم مربوط به مختصاتی است که بردار مبناي آن g 's است. به طور

مشابه داریم:

$$\beta_m^r = (g_m \cdot \bar{g}^r) = |g_{mm} \bar{g}^r| \cos(g_m, \bar{g}^r) \quad (m \text{ and } r \text{ not summed})$$

$$\beta_r^m = (g^m \cdot \bar{g}_r) = |g^{mm} \bar{g}_r| \cos(g^m, \bar{g}_r)$$

9/28

استفاده از نقطه (dot) در اندیس پایین یا بالا برای تاکید بر تفاوت β_m^r و β_r^m است. $\beta_m^r = |g_{mm} \bar{g}^r| \cos(g_m, \bar{g}^r)$ (m, r not summed)

در حالت کلی $\beta_m^r \neq \beta_r^m \neq \beta_m^m \neq \beta_r^r$. ولی در کارتیزین تفاوت بین β_m^r و β_r^m از بین می‌رود، زیرا در کارتیزین: $(g_i = g^i \text{ and } \bar{g}^i = \bar{g}_i)$ و همچنین g 's و $\bar{g}$'s بردارهای یک‌ه هستند.

$$\beta_m^r = (g_m \cdot \bar{g}^r) \xrightarrow{\text{in Cartesian}} (\bar{g}_m \cdot g^r) = \beta_m^r$$

به سادگی می‌توان نشان داد:

$$(15) \quad \bar{g}_r = (\bar{g}_r \cdot g^m) g_m = \beta_r^m g_m$$

اثبات بخش اول رابطه (15)

For Example

$$(\bar{g}_r \cdot g^m) g_m = (\bar{g}_r \cdot g^1) g_1 = \bar{g}_r$$

$$(16) \quad g_m = (g_m \cdot \bar{g}^k) \bar{g}_k = (\bar{g}^k \cdot g_m) \bar{g}_k = \beta_m^k \bar{g}_k$$

و β 'ها با تانسورهای متریک دو مختصات به هم مربوط می‌شوند:

$$\beta_m^r = \bar{g}_m \cdot g^r = \bar{g}_{mp} \bar{g}^p \cdot g^{rq} g_q = \bar{g}_{mp} g^{rq} \bar{g}^p \cdot g_q = \bar{g}_{mp} \beta_q^p g^{rq}$$

$$\beta_m^r = g_m \cdot \bar{g}^r = g_{mq} g^q \cdot \bar{g}^{rp} \bar{g}_p = \bar{g}^{rp} g_{qm} (g^q \cdot \bar{g}_p) = \bar{g}^{rp} \beta_p^q g_{qm}$$

10/28

از معادلات (6) و (14) می توان نتیجه گرفت که:

$$\beta_r^m = \bar{g}_r \cdot g^m = \frac{\partial \bar{x}^s}{\partial \theta^r} \bar{i}_s \cdot \frac{\partial \theta^m}{\partial x^q} \bar{i}^q = \frac{\partial \bar{x}^s}{\partial \theta^r} \frac{\partial \theta^m}{\partial x^q} \delta_s^q = \frac{\partial \bar{x}^s}{\partial \theta^r} \frac{\partial \theta^m}{\partial x^s} = \frac{\partial \bar{x}^s}{\partial \theta^r} \frac{\partial \theta^m}{\partial \bar{x}^s} = \frac{\partial \theta^m}{\partial \theta^r} \quad (17)$$

$$\beta_{\cdot m}^k = \bar{g}^k \cdot g_m = \frac{\partial \bar{\theta}^k}{\partial \theta^m}$$

بنابراین معادلات (15) و (16) انتقال بین $\bar{g}^s$ و g^s را مانند قوانین انتقال تانسوری بیان می کنند. با جایگزینی (16) $g_m = \beta_{\cdot m}^k \bar{g}_k$ در (15) $\bar{g}_r = \beta_r^m g_m$ و برعکس داریم:

$$\bar{g}_r = \beta_r^k g_k = \beta_r^k \beta_{\cdot k}^m \bar{g}_m, \quad g_m = \beta_{\cdot m}^k \bar{g}_k = \beta_{\cdot m}^k \beta_k^r g_r$$

که ایجاب می کند که روابط زیر برقرار باشد:

$$(18) \quad \beta_r^k \beta_{\cdot k}^m = \delta_{rm}, \quad \beta_{\cdot m}^k \beta_k^r = \delta_{rm}$$

اکنون می توانیم قانون انتقال مؤلفه های V بین سیستم های مختلف را به دست آوریم. اگر دو طرف معادله $\bar{v}^r \bar{g}_r = v^m g_m$ را در $\bar{g}^i$ ضرب نقطه ای کنیم، قانون انتقال را می دهد:

$$(19) \quad \bar{v}^i = (\bar{g}^i \cdot g_m) v^m = \beta_{\cdot m}^i v^m = \frac{\partial \bar{\theta}^i}{\partial \theta^m} v^m$$

11/28

به طور مشابه، اگر معادله را در g^j ضرب نقطه ای کنیم، قانون انتقال معکوس را می دهد:

$$(20) \quad v^j = (\bar{g}_r \cdot g^j) \bar{v}^r = \beta_r^j \bar{v}^r = \frac{\partial \theta^j}{\partial \bar{\theta}^r} \bar{v}^r$$

با استفاده از رابطه بردارهای مبنای کنتراورینت داریم:

$$(21) \quad \bar{g}^r = (\bar{g}^r \cdot g_m) g^m = \beta_{\cdot m}^r g^m, \quad g^m = (\bar{g}_r \cdot g^m) \bar{g}^r = \beta_r^m \bar{g}^r$$

و با استفاده از $\bar{v} = \bar{v}^r \bar{g}_r = v_m g^m$ داریم:

$$(22) \quad \bar{v}_r = (\bar{g}^r \cdot g^m) v_m = \beta_r^m v_m, \quad v_m = (\bar{g}_r \cdot g_m) \bar{v}^r = \beta_{\cdot m}^r \bar{v}^r$$

اگر هر دو مختصات کارتزین باشند: $\bar{g}^i = g^i$ and $\bar{g}_i = g_i$ و همچنین $\bar{g}^s$ و g^s بردارهای یکه هستند و معادله (14) به شکل زیر خواهد بود.

$$\beta_m^r = (\bar{g}_m \cdot g^r) = |\bar{g}_m g^r| \cos(\bar{g}_m, g^r) \xrightarrow{\text{Cartesian}} \cos(\bar{g}_m, g^r) = \bar{g}_m \cdot g_r = \beta_{mr}$$

$$(23) \quad \beta_{mr} = \cos(\bar{g}_r, g_m) = \bar{g}_r \cdot g_m = g_m \cdot \bar{g}_r$$

که β_{mr} کسینوس زاویه $\bar{g}_r$ و g_m است. معادله (18) نیز به شکل زیر خواهد شد.

$$(24) \quad \beta_{rk} \beta_{mk} = \beta_{kr} \beta_{km} = \delta_{rm}$$

12/28

یعنی ترانهاده تانسور کارتزین $\beta_{m\bar{m}}$ معکوس $\beta_{m\bar{m}}$ است. معادلات (19)، (20) و (22) به شکل زیر در خواهند آمد: (در کارتزین)

(25) $\bar{v}_r = (\bar{g}_r \cdot g_m) v_m = \beta_{rm} v_m$ ، $v_m = (\bar{g}_r \cdot g_m) \bar{v}_r = \beta_{rm} \bar{v}_r$
دقت شود که در حالت کلی (به جز کارتزین) ما همچنان داریم: $\beta_{rm} \neq \beta_{mr}$
اگر $\bar{v}$ و v هر دو کارتزین متعامد باشند، معادله (24) قانون انتقال بین دو سیستم مختصات را بیان می کند که قبلا در معادلات (2.8:2,3)

برای انتقال صفر ($a_i = b_i = 0$) .
 $x_i = \beta_{ji} \bar{x}_j + b_i$ ، $\bar{x}_i = \beta_{ij} x_j + a_i$
برای مولفه های کنتراورینت و کوارینت تانسورهای مرتبه دو و یا بالاتر نیز مفهوم مشابهی می تواند مطرح شود. عبارت زیر را در نظر بگیرید.

$$A = A^{rs} g_r g_s$$

که در آن A^{rs} یک تانسور کنتراورینت از مرتبه دو است. اگر g_r را از معادله (10) با $g^m g^m$ جایگزین کنیم، همچنین داریم:

$$A = A^{rs} g_r g_s \stackrel{(10)}{=} A^{rs} g_m g^n g_{sm} g^m = A^{rs} g_m g_{sm} g^n g^m = A_{mn} g^m g^n$$

یا:

$$A = A^{rs} g_r g_s = A_{mn} g^m g^n$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

13/28

عبارت $A = A^{rs} g_r g_s = A_{mn} g^m g^n$ تحت انتقال مختصات دو سیستم مختصات مختلف θ و $\bar{\theta}$ نامتغیر است. یعنی:

$$(26) \quad A = \bar{A}^{rs} \bar{g}_r \bar{g}_s = A^{mn} g_m g_n = \bar{A}_{rs} \bar{g}^r \bar{g}^s = A_{mn} g^m g^n$$

برای به دست آوردن رابطه بین A^{rs} و $\bar{A}^{rs}$ ، معادله (16) را در (26) جایگزین می کنیم و داریم:

$$(27) \quad A = \bar{A}^{rs} \bar{g}_r \bar{g}_s = A^{mn} \beta_{.m}^r \beta_{.n}^s \bar{g}_r \bar{g}_s \quad \text{or} \quad \bar{A}^{rs} = \beta_{.m}^r \beta_{.n}^s A^{mn}$$

با جایگزینی (15) در (26) نیز داریم:

$$(28) \quad A = A^{mn} g_m g_n = \bar{A}^{rs} \beta_r^m \beta_s^n g_m g_n \quad \text{or} \quad A^{mn} = \beta_r^m \beta_s^n \bar{A}^{rs}$$

به طور مشابه، می توان از بردارهای مبنای کنتراورینت معادله (21)
 $\bar{g}^r = (\bar{g}^r \cdot g_m) g^m = \beta_{.m}^r g^m$ ، $g^m = (\bar{g}^r \cdot g^m) \bar{g}^r = \beta_r^m \bar{g}^r$
استفاده کرد و روابط زیر را به دست آورد.

$$(29) \quad \bar{A}_{rs} = \beta_r^m \beta_s^n A_{mn} \quad \text{and} \quad A_{mn} = \beta_{.m}^r \beta_{.n}^s \bar{A}_{rs}$$

اگر هر دو مختصات **کارتزین** باشند، معادلات (27)، (28) و (29) به شکل زیر در می آیند.

$$(30) \quad \bar{A}_{rs} = \beta_{rm} \beta_{sn} A_{mn} \quad \text{and} \quad A_{mn} = \beta_{rm} \beta_{sn} \bar{A}_{rs}$$

14/28

این روابط چگونگی انتقال بردارها و تانسورها را در انتقال محورهای مختصات بیان می‌کنند. انتقال محورهای مختصات به دلایل متعددی جایگاه مهمی دارد. **یک دلیل** خوب آن استفاده انیشتن از آن برای توسعه نظریه نسبیت است.

دلیل دیگر این است که شکل طبیعی بعضی از اشیا (اجسام) که در علوم و مهندسی مورد مطالعه قرار می‌گیرند، مختصات ترجیحی برای بیان آنها وجود دارد. به عنوان مثال، زمین گرد و ریل مستقیم و تخم مرغی شکل تخم مرغی دارد.

هر دلیلی باشد، ممکن است لازم باشد که یک معادله در یک سیستم مختصات در سیستم مختصات معتبر دیگری نوشته شود. برای این کار روش بالا می‌تواند مفید باشد.

2.15- تفسیر هندسی مشتقات کوارینت Geometric Interpretation of Covariant Derivatives

اکنون یک میدان برداری $\vec{V}$ که در هر نقطه از فضا در ناحیه R تعریف می‌شود را در نظر بگیرید. اگر بردار در نقطه $P(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$ باشد داریم:

$$(1) \quad \vec{v}(P) = v^i(P) \vec{g}_i(P)$$

در یک نقطه همسایه $P'(\theta^1 + d\theta^1, \theta^2 + d\theta^2, \theta^3 + d\theta^3)$ بردار عبارت است از:

$$\vec{v}(P') = \vec{v}(P) + d\vec{v}(P) = [v^i(P) + dv^i][\vec{g}_i(P) + d\vec{g}_i(P)]$$

با میل دادن حد $d\theta^i \rightarrow 0$ ، قسمت اساسی تفاوت و یا مشتق را به دست می‌آوریم.

$$(2) \quad d\vec{v} = (v^i + dv^i)(\vec{g}_i + d\vec{g}_i) - v^i \vec{g}_i = \vec{g}_i dv^i + v^i d\vec{g}_i$$

و مشتق:

$$(3) \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial \theta^j} = \vec{g}_i \frac{\partial v^i}{\partial \theta^j} + \frac{\partial \vec{g}_i}{\partial \theta^j} v^i$$

بنابراین مشتق بردار $\vec{V}$ به دو قسمت تجزیه می‌شود: $(3) \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial \theta^j} = \vec{g}_i \frac{\partial v^i}{\partial \theta^j} + \frac{\partial \vec{g}_i}{\partial \theta^j} v^i$
 یک قسمت تغییر مؤلفه‌ها در v^i به سبب تغییرات مختصات $\theta^1, \theta^2, \theta^3$ است و
 بخش دیگر به سبب تغییرات بردارهای مبنای $\vec{g}_i$ به سبب تغییر موقعیت نقطه θ^i است.

در اسلاید بعدی نشان داده می‌شود که در فضای اقلیدسی:

$$(4) \quad \frac{\partial \vec{g}_i}{\partial \theta^j} = \Gamma_{ij}^\alpha \vec{g}_\alpha$$

در رابطه (3) جایگزین می‌کنیم:

$$(5) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}}{\partial \theta^j} &= \vec{g}_\alpha \frac{\partial v^\alpha}{\partial \theta^j} + v^i \Gamma_{ij}^\alpha \vec{g}_\alpha \\ &= \left(\frac{\partial v^\alpha}{\partial \theta^j} + v^i \Gamma_{ij}^\alpha \right) \vec{g}_\alpha = v^\alpha|_j \vec{g}_\alpha \end{aligned}$$

بنابراین مشتق کوارینت $v^\alpha|_j$ نشان‌دهنده مؤلفه‌های $\partial \vec{v} / \partial \theta^j$ در امتداد بردارهای مبنای $\vec{g}_\alpha$ است.

اثبات رابطه (4) $\frac{\partial \bar{g}_i}{\partial \theta^j} = \Gamma_{ij}^\alpha \bar{g}_\alpha$

از رابطه $g_{ij} = \bar{g}_i \cdot \bar{g}_j$ مشتق می گیریم:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial \theta^k} = \frac{\partial \bar{g}_i}{\partial \theta^k} \bar{g}_j + \frac{\partial \bar{g}_j}{\partial \theta^k} \bar{g}_i$$

جای اندیس j و k را عوض می کنیم:

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial \theta^j} = \frac{\partial \bar{g}_i}{\partial \theta^j} \bar{g}_k + \frac{\partial \bar{g}_k}{\partial \theta^j} \bar{g}_i$$

جای اندیس i و j را عوض می کنیم:

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial \theta^i} = \frac{\partial \bar{g}_j}{\partial \theta^i} \bar{g}_k + \frac{\partial \bar{g}_k}{\partial \theta^i} \bar{g}_j$$

اکنون عبارت زیر را تشکیل می دهیم:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial \theta^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial \theta^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial \theta^k} \right) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \bar{g}_i}{\partial \theta^j} + \frac{\partial \bar{g}_j}{\partial \theta^i} \right) \bar{g}_k + \left(\frac{\partial \bar{g}_k}{\partial \theta^j} \bar{g}_i + \frac{\partial \bar{g}_k}{\partial \theta^i} \bar{g}_j \right) - \frac{\partial \bar{g}_i}{\partial \theta^k} \bar{g}_j - \frac{\partial \bar{g}_j}{\partial \theta^k} \bar{g}_i \right]$$

ولی از معادله (7) داریم $\bar{g}_i = \frac{\partial \bar{R}}{\partial \theta^i}$ ، بنابراین: $\frac{\partial \bar{g}_i}{\partial \theta^j} = \frac{\partial}{\partial \theta^j} \left(\frac{\partial \bar{R}}{\partial \theta^i} \right) = \frac{\partial \bar{g}_j}{\partial \theta^i}$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial \theta^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial \theta^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial \theta^k} \right) = \frac{1}{2} \left[2 \frac{\partial \bar{g}_i}{\partial \theta^j} \bar{g}_k + \left(\frac{\partial \bar{g}_k}{\partial \theta^j} \bar{g}_i - \frac{\partial \bar{g}_i}{\partial \theta^k} \bar{g}_j \right) + \left(\frac{\partial \bar{g}_k}{\partial \theta^i} \bar{g}_j - \frac{\partial \bar{g}_j}{\partial \theta^k} \bar{g}_i \right) \right]$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial \theta^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial \theta^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial \theta^k} \right) = \frac{\partial \bar{g}_i}{\partial \theta^j} \bar{g}_k$$

طرفین را در g^{ak} ضرب می کنیم:

$$\frac{1}{2} g^{ak} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial \theta^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial \theta^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial \theta^k} \right) = \left(\frac{\partial \bar{g}_i}{\partial \theta^j} \bar{g}_k \right) g^{ak} \xrightarrow{\text{یا}} \Gamma_{ij}^\alpha = \left(\frac{\partial \bar{g}_i}{\partial \theta^j} \bar{g}_k \right) g^{ak}$$

19/28

طرفین را در $\bar{g}_\alpha$ ضرب می کنیم:

$$\Gamma_{ij}^\alpha \bar{g}_\alpha = \left(\frac{\partial \bar{g}_i}{\partial \theta^j} \bar{g}_k \right) \bar{g}^{\alpha k} \bar{g}_\alpha = \left(\frac{\partial \bar{g}_i}{\partial \theta^j} \bar{g}_k \right) \bar{g}^k = \left(\frac{\partial \bar{g}_i}{\partial \theta^j} \bar{g}_1 \right) \bar{g}^1 + \left(\frac{\partial \bar{g}_i}{\partial \theta^j} \bar{g}_2 \right) \bar{g}^2 + \left(\frac{\partial \bar{g}_i}{\partial \theta^j} \bar{g}_3 \right) \bar{g}^3 (**)$$

می دانیم: $\vec{V} = v_s \bar{g}^s = v_1 \bar{g}^1 + v_2 \bar{g}^2 + v_3 \bar{g}^3$ ، بنابراین $\frac{\partial \bar{g}_i}{\partial \theta^j}$ را نیز می توان به عنوان یک ترکیب خطی از بردارهای پایه نوشت:

$$\frac{\partial \bar{g}_i}{\partial \theta^j} = \lambda_1 \bar{g}^1 + \lambda_2 \bar{g}^2 + \lambda_3 \bar{g}^3 (*)$$

طرفین را در $\bar{g}_1$ ضرب می کنیم:

$$\frac{\partial \bar{g}_i}{\partial \theta^j} \bar{g}_1 = \lambda_1 \bar{g}^1 \bar{g}_1 + \lambda_2 \bar{g}^2 \bar{g}_1 + \lambda_3 \bar{g}^3 \bar{g}_1 = \lambda_1$$

$$\frac{\partial \bar{g}_i}{\partial \theta^j} \bar{g}_2 = \lambda_2 \quad \frac{\partial \bar{g}_i}{\partial \theta^j} \bar{g}_3 = \lambda_3$$

و به همین ترتیب:

$$\frac{\partial \bar{g}_i}{\partial \theta^j} = \left(\frac{\partial \bar{g}_i}{\partial \theta^j} \bar{g}_1 \right) \bar{g}^1 + \left(\frac{\partial \bar{g}_i}{\partial \theta^j} \bar{g}_2 \right) \bar{g}^2 + \left(\frac{\partial \bar{g}_i}{\partial \theta^j} \bar{g}_3 \right) \bar{g}^3$$

اگر در معادله (*) جایگزین کنیم:

اگر طرف راست را در معادله (**) جایگزین کنیم، اثبات کامل می شود:

$$(4) \quad \Gamma_{ij}^\alpha \bar{g}_\alpha = \frac{\partial \bar{g}_i}{\partial \theta^j}$$

2.16- مؤلفه‌های فیزیکی یک بردار (Physical Components of a Vector)

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

بردارهای مبنای $\vec{g}_r$ و $\vec{g}^r$ در حالت کلی بردارهای **یکه** نیستند. در حقیقت طول آنها عبارت است از: (معادله 8 را ببینید.)

$$(8) \quad \begin{cases} \vec{g}_r \cdot \vec{g}_s = g_{rs} \\ \vec{g}^r \cdot \vec{g}^s = g^{rs} \end{cases} \quad |\vec{g}_r| = \sqrt{g_{rr}}, \quad |\vec{g}^r| = \sqrt{g^{rr}}, \quad r \text{ not summed.}$$

(روی r جمع بسته نمی‌شود)

اگر معادله (2.14:12) را به شکل زیر بنویسیم:

$$(1) \quad \vec{V} = \sum_{r=1}^3 v^r \sqrt{g_{rr}} \frac{\vec{g}_r}{\sqrt{g_{rr}}} = \sum_{r=1}^3 v_r \sqrt{g^{rr}} \frac{\vec{g}^r}{\sqrt{g^{rr}}}$$

آنگاه از آنجا که $\vec{g}_r/\sqrt{g_{rr}}$ و $\vec{g}^r/\sqrt{g^{rr}}$ بردارهای **یکه** اند، تمام مؤلفه‌های $v^r \sqrt{g_{rr}}$ و $v_r \sqrt{g^{rr}}$ (روی r جمع بسته نمی‌شود) از نظر فیزیکی دیمانسیون یکسانی دارند. می‌توان دید که $v^r \sqrt{g_{rr}}$ مؤلفه‌های $\vec{V}$ اند که در امتداد بردارهای **یکه** $\vec{g}_r/\sqrt{g_{rr}}$ می‌باشند که به خط مختصات مماسند؛ و $v_r \sqrt{g^{rr}}$ مؤلفه‌های $\vec{V}$ اند که در امتداد بردارهای **یکه** $\vec{g}^r/\sqrt{g^{rr}}$ می‌باشند که به صفحه مختصات عمودند. مؤلفه‌های

(روی r جمع بسته نمی‌شود) $v^r \sqrt{g_{rr}}, v_r \sqrt{g^{rr}}$ را **مؤلفه‌های فیزیکی بردار $\vec{V}$** می‌نامند.

22/28

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

آن‌ها بر اساس قانون انتقال تانسورها انتقال نمی‌یابند و مؤلفه‌های تانسوری نیستند. یادآور می‌شود که در حالت کلی $v^r \sqrt{g_{rr}} \neq v_r \sqrt{g^{rr}}$ (روی r جمع بسته نمی‌شود) بجز مختصات متعامد. (زیرا در مختصات متعامد $\vec{g}^r$ و $\vec{g}_r$ در یک امتدادند و مؤلفه‌های بردار $v_r \sqrt{g^{rr}}$ که در امتداد $\vec{g}^r$ بودند با مؤلفه‌های بردار $v^r \sqrt{g_{rr}}$ که در امتداد $\vec{g}_r$ بودند در یک راستا خواهند بود و با هم برابرند.)

باید به خاطر داشته باشیم که مؤلفه‌های تانسوری کمیات فیزیکی که در یک مختصات منحنی‌الخط خاص بیان می‌شوند ممکن است دیمانسیون فیزیکی یکسانی نداشته باشند.

به عنوان مثال، در مختصات کروی در فضای اقلیدسی، موقعیت یک نقطه با یک طول و دو زاویه بیان می‌شود (r, φ, θ) .

در یک فضای چهار بعدی، یک نقطه را با سه طول و یک زمان (x, y, z, t) مشخص می‌کنند.

این مشکل (که همزمان تسهیلات بسیاری نیز فراهم می‌کند!) از آنجا بوجود آمد که می‌خواستیم در انتخاب مختصات منحنی‌الخط آزاد باشیم.

به این دلیل، بین مؤلفه‌های تانسوری و «مؤلفه‌های فیزیکی» که دیمانسیون فیزیکی یکسانی دارند، باید تفاوت قائل شد.

23/28

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

Deriving Cylindrical Unit Vectors

در مختصات استوانه‌ای (r, θ, z) ، یک بردار مانند $\vec{V}$ را می‌توان بر حسب بردارهای مبنا $(\vec{g}_r, \vec{g}_\theta, \vec{g}_z)$ و مؤلفه‌های تانسوری u^r, u^θ, u^z و یا بردارهای یکه $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ و مؤلفه‌های فیزیکی v_r, v_θ, v_z نوشت:

$$\vec{V} = \vec{g}_r u^r + \vec{g}_\theta u^\theta + \vec{g}_z u^z = \vec{e}_r v_r + \vec{e}_\theta v_\theta + \vec{e}_z v_z = \vec{e}_r v^r + \vec{e}_\theta v^\theta + \vec{e}_z v^z, \quad \vec{g}_r = \frac{\partial \vec{x}}{\partial r} \vec{e}_r$$

مؤلفه فیزیکی را می‌توان به شکل کوارینت یا کنترارینت نوشت.

$$\vec{V} = \left(\frac{\partial x}{\partial r} \vec{e}_1 + \frac{\partial y}{\partial r} \vec{e}_2 + \frac{\partial z}{\partial r} \vec{e}_3 \right) u^r + \left(\frac{\partial x}{\partial \theta} \vec{e}_1 + \frac{\partial y}{\partial \theta} \vec{e}_2 + \frac{\partial z}{\partial \theta} \vec{e}_3 \right) u^\theta + \left(\frac{\partial x}{\partial z} \vec{e}_1 + \frac{\partial y}{\partial z} \vec{e}_2 + \frac{\partial z}{\partial z} \vec{e}_3 \right) u^z$$

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad z = z$$

$$\vec{V} = (\cos \theta \vec{e}_1 + \sin \theta \vec{e}_2) u^r + (-r \sin \theta \vec{e}_1 + r \cos \theta \vec{e}_2) u^\theta + (\vec{e}_3) u^z$$

تبدیل مؤلفه‌های تانسوری به فیزیکی:

$$v^r = \sqrt{g_{rr}} u^r, \text{ r not summed}$$

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{V} = (\cos \theta \vec{e}_1 + \sin \theta \vec{e}_2) v^r + (-\sin \theta \vec{e}_1 + \cos \theta \vec{e}_2) v^\theta + (\vec{e}_3) v^z$$

$$\vec{e}_r = \vec{e}_1 \cos \theta + \vec{e}_2 \sin \theta \quad \vec{e}_\theta = -\vec{e}_1 \sin \theta + \vec{e}_2 \cos \theta \quad \vec{e}_z = \vec{e}_3$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

24/28

Deriving Spherical Unit Vectors

در مختصات کروی (r, ϕ, θ) ، یک بردار مانند $\vec{V}$ را می‌توان بر حسب بردارهای مبنا $(\vec{g}_r, \vec{g}_\phi, \vec{g}_\theta)$ و مؤلفه‌های تانسوری u^r, u^ϕ, u^θ و یا بردارهای یکه $(\vec{e}_r, \vec{e}_\phi, \vec{e}_\theta)$ نوشت:

$$\vec{V} = \vec{g}_r u^r + \vec{g}_\phi u^\phi + \vec{g}_\theta u^\theta = \vec{e}_r v^r + \vec{e}_\phi v^\phi + \vec{e}_\theta v^\theta = \vec{e}_r v^r + \vec{e}_\phi v^\phi + \vec{e}_\theta v^\theta, \quad \vec{g}_r = \frac{\partial x^s}{\partial \theta^r} \vec{e}_s$$

مؤلفه فیزیکی را می‌توان به شکل کوارینت یا کنترارینت نوشت.

$$\vec{V} = \left(\frac{\partial x}{\partial r} \vec{e}_1 + \frac{\partial y}{\partial r} \vec{e}_2 + \frac{\partial z}{\partial r} \vec{e}_3 \right) u^r + \left(\frac{\partial x}{\partial \phi} \vec{e}_1 + \frac{\partial y}{\partial \phi} \vec{e}_2 + \frac{\partial z}{\partial \phi} \vec{e}_3 \right) u^\phi + \left(\frac{\partial x}{\partial \theta} \vec{e}_1 + \frac{\partial y}{\partial \theta} \vec{e}_2 + \frac{\partial z}{\partial \theta} \vec{e}_3 \right) u^\theta$$

$$x_1 = x = r \sin \phi \cos \theta \quad x_2 = y = r \sin \phi \sin \theta \quad x_3 = z = r \cos \phi$$

$$\vec{V} = (\sin \phi \cos \theta \vec{e}_1 + \sin \phi \sin \theta \vec{e}_2 + \cos \phi \vec{e}_3) u^r +$$

$$(r \cos \phi \cos \theta \vec{e}_1 + r \cos \phi \sin \theta \vec{e}_2 - r \sin \phi \vec{e}_3) u^\phi + (-r \sin \phi \sin \theta \vec{e}_1 + r \sin \phi \cos \theta \vec{e}_2) u^\theta$$

$$v^r = \sqrt{g_{rr}} u^r, \text{ r not summed}$$

تبدیل مؤلفه‌های تانسوری به فیزیکی:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \phi \end{pmatrix}$$

$$v^r = u^r, v^\phi = r u^\phi, v^\theta = r \sin \phi u^\theta$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

25/28

Deriving Spherical Unit Vectors(con'd)

$$\vec{V} = (\sin \phi \cos \theta \vec{e}_1 + \sin \phi \sin \theta \vec{e}_2 + \cos \phi \vec{e}_3) v^r +$$

$$(\cos \phi \cos \theta \vec{e}_1 + \cos \phi \sin \theta \vec{e}_2 - \sin \phi \vec{e}_3) v^\phi + (-\sin \theta \vec{e}_1 + \cos \theta \vec{e}_2) v^\theta$$

$$\vec{e}_r = (\vec{e}_1 \cos \theta + \vec{e}_2 \sin \theta) \sin \phi + \vec{e}_3 \cos \phi$$

$$\vec{e}_\phi = (\vec{e}_1 \cos \theta + \vec{e}_2 \sin \theta) \cos \phi - \vec{e}_3 \sin \phi$$

$$\vec{e}_\theta = -\vec{e}_1 \sin \theta + \vec{e}_2 \cos \theta$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

26/28

مسائل زیر را حل کرده و تا دو هفته دیگر تحویل فرمایید:

2) 12-23, 25-32

2) 1,2,5,6,10, and A1-A12

تمرین‌های قبلی: