

2. آنالیز تانسوری (Tensor Analysis)

© M.H. Abolbashari, Ferdowsi University of Mashhad

تانسورها و مکانیک محیط پیوسته

مکانیک محیط پیوسته در مورد **کمیات فیزیکی** بحث می‌کند که تعریف آن‌ها مستقل از محورهای مختصات خاصی است. با این همه، مشخص کردن اغلب این **کمیات** در سیستم‌های مختصات خاصی راحت‌تر است. از نظر ریاضی این کمیات با **تانسورها** بیان می‌شوند.

به عنوان یک ماهیت ریاضی، یک **تانسور** وجودی مستقل از محورهای مختصات دارد. ولی آن را می‌توان در یک سیستم مختصات خاصی با مجموعه‌ای از **کمیات** بیان کرد که به آن‌ها **مؤلفه‌های** آن تانسور می‌گویند. با مشخص شدن **مؤلفه‌های** یک **تانسور** در یک سیستم مختصات، آن **مؤلفه‌ها** در سیستم‌های مختصات دیگر نیز قابل محاسبه‌اند.

در واقع **تانسورها** را به وسیله قانون انتقال مؤلفه‌هایشان تعریف می‌کنیم! پس در تعریف **تانسور** می‌گوییم: **تانسورها** کمیاتی هستند که مؤلفه‌هایشان تحت یک نوع انتقال خاصی منتقل می‌شوند.

تانسورها و مکانیک محیط پیوسته (ادامه)

قوانین فیزیکی مکانیک محیط پیوسته با معادلات تانسوری بیان می‌شوند.

از آنجا که انتقال تانسورها خطی و هموزن

Definition. $T : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^n$ is a (homogeneous) linear transformation (h.l.t.) if

- (i) $T(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = T(\mathbf{v}) + T(\mathbf{w})$, for any $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ ("additivity"), and
- (ii) $T(r\mathbf{v}) = rT(\mathbf{v})$, for any vector $\mathbf{v}$ and scalar r ("homogeneity").

است، معادلات تانسوری:

اگر در یک سیستم مختصات معتبر باشند، در سیستم مختصات دیگر هم معتبرند.

ثبات اعتبار معادلات تانسوری در انتقال سیستم‌های مختصات، یکی از اساسی‌ترین دلایل مفید بودن استفاده از روش‌های تانسوری در مکانیک محیط پیوسته است.

3/18

فضای اقلیدسی (Euclidean space)

حدود ۳۰۰ سال قبل از میلاد، یک ریاضی‌دان یونانی به نام اقلید، ابتدا مطالعاتی در یک صفحه (یک صفحه ایده‌آل مسطح) و سپس در فضا در باره رابطه بین فاصله و زاویه انجام داد. یک نمونه از آن روابط این است که مجموع زوایای یک مثلث همیشه ۱۸۰ درجه است. امروزه این رابطه‌ها به عنوان هندسه اقلیدسی دو- و سه-بعدی شناخته می‌شوند.

به زبان ریاضی جدید، فاصله و زاویه به سادگی می‌تواند به فضاهای ۴-بعدی، ۵-بعدی و حتی بیشتر تعمیم داده شود. یک فضای n -بعدی با ایده فاصله و زاویه که از روابط اقلیدس تبعیت کند، یک فضای n -بعدی اقلیدسی نامیده می‌شود.

From Wikipedia, the free encyclopedia
(Redirected from Euclidean 3-space)

ادامه دارد 4/18

فضای اقلیدسی (ادامه)

یک خاصیت ضروری فضای اقلیدسی **مسطح** بودن آن است. در هندسه فضاهاى دیگری وجود دارند که اقلیدسی نیستند. به عنوان مثال، سطح یک کره مسطح نیست و مجموع زوایای یک مثلث روی سطح کره بیشتر از ۱۸۰ درجه است.

در حقیقت، **برای هر بعدی ضرورتاً یک فضای اقلیدسی وجود دارد**، در حالی که برای هر بعدی چندین فضای غیر اقلیدسی وجود دارد. این فضاهاى غیر اقلیدسی اغلب با تغییر شکل سیستماتیک فضای اقلیدسی ساخته می‌شوند.

From Wikipedia, the free encyclopedia
(Redirected from [Euclidean 3-space](#))

ادامه دارد 5/18

فضای اقلیدسی (ادامه)

- فضایی که در آن بتوان سیستم مختصاتی بنا کرد که طول یک قطاع خط از رابطه فیثاغورث به دست آید را فضای اقلیدسی گویند.

$$A \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \text{ ————— } B \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix}$$

$$\|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

6/18

مختصات کارتیزین و منحنی الخط

مختصات کارتیزین

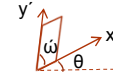
Oblique



Orthogonal



Rectangular



$$x = (x' \sin(\omega - \theta) + y' \sin(\omega - \omega - \theta)) / \sin \omega$$

$$y = (x' \sin \theta + y' \sin(\omega + \theta)) / \sin \omega$$

طول یک المان خط از قاعده فیثاغورث به دست می آید.

(Ref ۱, P 3)

اگر صفحات مختصات ثابت در همه نقاط تلاقی بر هم عمود باشند، مختصات را **منحنی الخط** متعامد می نامند.

(Ref 10, P 40)

مشهورترین مختصات منحنی الخط

- ۱- قطبی
- ۲- استوانه‌ای
- ۳- کروی

متعامد

غیر متعامد

7/18

2.1. نماد و قرارداد جمع

معادله یک صفحه در فضای سه-بعدی x^1, x^2, x^3 را در نظر بگیرید.

(1)

$$a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 = p$$

(2)

$$\sum_{i=1}^3 a_i x^i = p$$

superscript

subscript

(3)

$$a_i x^i = p \quad \text{or} \quad a_j x^j$$

قرارداد عبارت است از: تکرار هر اندیس (اعم از زیرنویس یا بالانویس) در هر جمله، یک جمع نسبت به آن اندیس روی محدوده خودش را نشان می‌دهد.

محدوده یک اندیس مانند i مجموعه‌ای از n عدد صحیح است از ۱ تا n .

اندیس دامی (Dummy): اندیسی که روی آن جمع بسته می‌شود را اندیس دامی می‌گویند.

اندیس آزاد (Free): اندیسی که روی آن جمع بسته نمی‌شود.

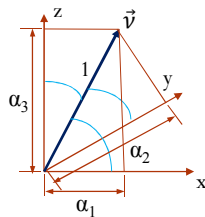
8/18

نمونه یک متغیر دامی در یک انتگرال که به دلخواه می توان آن را تغییر داد.

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(y) dy$$

مثال ۱

بردار یکه $\vec{v}$ را در یک فضای سه-بعدی اقلیدسی با مختصات متعامد کارتزین x, y, z در نظر بگیرید. اگر کسینوس دایرکتوری های α_i (آلفا) به شکل زیر تعریف شوند:



$$\alpha_1 = \cos(\vec{v}, x), \quad \alpha_2 = \cos(\vec{v}, y), \quad \alpha_3 = \cos(\vec{v}, z)$$

به عنوان مثال $(\vec{v}, x)$ نشان دهنده زاویه بین $\vec{v}$ و محور x است. این که مجذور طول بردار ۱ است با رابطه زیر بیان می شود:

$$(\alpha_1)^2 + (\alpha_2)^2 + (\alpha_3)^2 = 1$$

$$(4) \quad \alpha_i \alpha_i = 1$$

یا به شکل ساده:

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

9/18

مثال ۲ و تعریف کرانکر دلتا

یک المان خط (dx, dy, dz) در فضای سه-بعدی اقلیدسی با مختصات کارتزین x, y, z در نظر بگیرید. مربع طول این المان خط به شکل زیر خواهد بود.

$$(5) \quad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

اگر کمیات را به شکل زیر تعریف کنیم:

$$(6) \quad dx^1 = dx, \quad dx^2 = dy, \quad dx^3 = dz$$

و کرانکر دلتا (Kronecker delta) به شکل:

$$(7) \quad \begin{aligned} \delta_{11} &= \delta_{22} = \delta_{33} = 1, \\ \delta_{12} &= \delta_{21} = \delta_{13} = \delta_{31} = \delta_{23} = \delta_{32} = 0 \end{aligned}$$

آنگاه (5) را می توان به شکل زیر نوشت:

$$(8) \quad ds^2 = \delta_{ij} dx^i dx^j$$

یا بدون کرانکر دلتا:

$$ds^2 = dx^i dx^i = dx_i dx_i$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

10/18

$$(8) \quad ds^2 = \delta_{ij} dx^i dx^j$$

این معادله را می‌توان به شکل توسعه یافته (unabridged) نوشت:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \delta_{i1} dx^i dx^1 + \delta_{i2} dx^i dx^2 + \delta_{i3} dx^i dx^3 \\ &= \delta_{11} dx^1 dx^1 + \delta_{21} dx^2 dx^1 + \delta_{31} dx^3 dx^1 \\ &\quad + 0 + \delta_{22} dx^2 dx^2 + 0 \\ &\quad + 0 + 0 + \delta_{33} dx^3 dx^3 \end{aligned}$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

11/18

مثال 3

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{31}a_{22}a_{13}$$

$$(9) \quad |a_{ij}| = e_{rst} a_{r1} a_{s2} a_{t3}$$

که e_{rst} را پرموتیشن سیمبل (permutation symbol) می‌نامند و به شکل زیر تعریف می‌شود:

Permutation is an arrangement of objects in a definite order.

$$\begin{aligned} e_{111} &= e_{222} = e_{333} = e_{112} = e_{113} = e_{221} = e_{223} \\ &= e_{331} = e_{332} = 0, \\ e_{123} &= e_{231} = e_{312} = 1, \\ e_{213} &= e_{321} = e_{132} = -1 \end{aligned}$$

به عبارت دیگر وقتی مقدار هر دو اندیسی با هم یکسان باشد $e_{ijk} = 0$ و اگر اندیس‌ها به ترتیب 1, 2, 3 باشند $e_{ijk} = 1$ و اگر به شکل دیگری باشند $e_{ijk} = -1$.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

12/18

$$e_{ijk} = \begin{vmatrix} \delta_{1i} & \delta_{2i} & \delta_{3i} \\ \delta_{1j} & \delta_{2j} & \delta_{3j} \\ \delta_{1k} & \delta_{2k} & \delta_{3k} \end{vmatrix} \text{ or } \begin{vmatrix} \delta_{1i} & \delta_{1j} & \delta_{1k} \\ \delta_{2i} & \delta_{2j} & \delta_{2k} \\ \delta_{3i} & \delta_{3j} & \delta_{3k} \end{vmatrix}$$

ص ۱۱ مکانیک محیط‌های پیوسته: دکتر رحیمیان

$$\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3$$

$$\delta_{im} a_m = a_i$$

$$\delta_{im} T_{mj} = T_{ij}$$

$$\delta_{im} T_{im} = T_{ii} = T_{mm}$$

$$\delta_{im} \delta_{mj} = \delta_{ij}$$

$$\delta_{im} \delta_{mj} \delta_{jn} = \delta_{in}$$

با بسط می‌توان نشان داد که:

با توجه به روابط مقابل می‌توان نتیجه گرفت که اگر کرانکر دلتا روی چیزی اثر کند اندیس مشترک از بین می‌رود و اندیس غیرمشترک جایگزین آن می‌شود.

اگر اندیس مشترک عدد بود از بین نمی‌رود! به عنوان مثال: $\delta_{2j} S_{2i} \neq S_{ji}$

در واقع عدد اندیس نیست که دامی باشد.

13/18

رابطه مهم بین کرانکر دلتا و پرموتیشن سیمبل:

(11)

$$e_{ijk} e_{ist} = \delta_{js} \delta_{kt} - \delta_{jt} \delta_{ks}$$

مثال 4

اگر $f(x^1, x^2, \dots, x^n)$ تابعی از n متغیر $x^1, x^2, \dots, x^n$ باشد، دیفرانسیل آن به شکل زیر خواهد بود.

$$(12) \quad df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$$

مثال 5

ضرب نقطه‌ای دو بردار $\vec{X} = (x_1, x_2, x_3)$ و $\vec{Y} = (y_1, y_2, y_3)$ یک اسکالر است.

$$c = \vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

$$(13) \quad c = \delta_{ij} x_i y_j = x_i y_i$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

14/18

مثال 6

ضرب برداری دو بردار $\vec{x}$ و $\vec{y}$ بردار $\vec{z} = \vec{x} \times \vec{y}$ خواهد بود که مؤلفه‌های آن عبارت است از:

$$(14) \quad z_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2, \quad z_2 = x_3 y_1 - x_1 y_3, \quad z_3 = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

$$(15) \quad z_i = e_{ijk} x_j y_k \quad \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

$$\frac{1}{g_{ii}} \begin{cases} \frac{1}{g_{11}} + \frac{1}{g_{22}} + \frac{1}{g_{33}} \\ 1 \\ g_{11} + g_{22} + g_{33} \end{cases} \quad ? \quad \begin{aligned} &= \sum_{i=1}^3 \frac{1}{g_{ii}} \\ &= \frac{1}{\sum_{i=1}^3 g_{ii}} \end{aligned} \quad \text{مثال 7}$$

نتیجه: هر عبارتی را نمی‌توان به شکل اندیسی و با قرارداد جمع نشان داد.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

15/18

مثال 8

با استفاده از رابطه کرانکر دلتا و پرموتیشن سیمبل رابطه زیر را ثابت کنید.

$$e_{stp} e_{mtp} = 2\delta_{sm}$$

حل:

$$e_{stp} e_{mtp} = e_{pst} e_{pmt} = \delta_{sm} \delta_{tt} - \delta_{st} \delta_{tm} = 3\delta_{sm} - \delta_{sm} = 2\delta_{sm}$$

نکته ۱: ترتیب اندیس‌های پرموتیشن سیمبل می‌تواند به شکلی که مقدار عددی آن ۱ باقی بماند، تغییر یابد. یعنی اندیس آخر بیاید اول و یا اول برود آخر

$$e_{stp} = e_{pst} = e_{tps}$$

نکته ۲: در یک جمله هر اندیس می‌تواند یک بار تکرار شود که در آن صورت اندیس دامی است. به عنوان مثال در $a_n b_{nk} c_{kn}$ که n سه مرتبه ظاهر شده بی معنی و از نظر روابط اندیسی تعریف نشده است.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

16/18

تعداد معادلات و جملات در عبارات اندیسی

تعداد معادلات = (تعداد اندیس‌های آزاد) ۳

تعداد جملات = (تعداد اندیس‌های دامی) ۳

$$B_i = e_{ijk} A_j A_k$$

مثال:

$$\begin{aligned} \text{تعداد معادلات} = 3^{(1)} = 3 & \quad \left\{ \begin{aligned} B_1 &= e_{1jk} A_j A_k \\ B_2 &= e_{2jk} A_j A_k \\ B_3 &= e_{3jk} A_j A_k \end{aligned} \right. \\ \text{تعداد جملات} = 3^{(2)} = 9 & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_i &= e_{ij1} A_j A_1 + e_{ij2} A_j A_2 + e_{ij3} A_j A_3 \\ &= e_{i11} A_1 A_1 + e_{i21} A_2 A_1 + e_{i31} A_3 A_1 + \\ &\quad e_{i12} A_1 A_2 + e_{i22} A_2 A_2 + e_{i32} A_3 A_2 + \\ &\quad e_{i13} A_1 A_3 + e_{i23} A_2 A_3 + e_{i33} A_3 A_3 \end{aligned}$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

17/18

مسائل زیر را حل کرده و تا دو هفته دیگر تحویل فرمایید:

2) 1, 2

2.1. **Show that**, when i, j, k range over 1,2,3,

- (a) $\delta_{ij}\delta_{ij}=3$ (c) $e_{ijk}A_jA_k=0$
 (b) $e_{ijk}e_{jki}=6$ (d) $\delta_{ij}\delta_{jk}=\delta_{ik}$

2.2. **Verify** the following identity connecting three arbitrary vectors by means of the e- δ identity.

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$$

Note: The last equation is well known in vector analysis. After identifying the quantities involved as Cartesian tensors, this verification may be construed (interpret) as a proof of the e- δ identity.

18/18