

2.3- تانسور متریک اقلیدسی (Euclidean Metric Tensor)

© M.H. Abolbashari, Ferdowsi University of Mashhad

اولین چیزی که راجع به هر سیستم مختصات باید بدانیم این است که طول را در آن چگونه اندازه می‌گیریم. این اطلاعات توسط **تانسور متریک** به دست می‌آید. یک فضای سه-بعدی اقلیدسی در نظر بگیرید که محدوده اندیس‌ها 1, 2, 3 باشند. فرض کنید:

$$\theta_i = \theta_i(x_1, x_2, x_3) \quad (1)$$

یک انتقال قابل قبول مختصات از یک سیستم کارتزین (in honor of Cartesius, i.e., Descartes) متعامد x_1, x_2, x_3 به یک سیستم مختصات عمومی $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ باشد.

فرض می‌شود **انتقال معکوس**

$$x_i = x_i(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \quad (2)$$

وجود داشته و نقطه (x_1, x_2, x_3) و $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ یک به یک بهم مربوط باشند.

یک **المان خط** که مؤلفه‌های آن دیفرانسیل‌های dx^1, dx^2, dx^3 می‌باشند در نظر بگیرید. از آنجا که مختصات x_1, x_2, x_3 **کارتزین متعامد** است، طول المان ds از قاعده فیثاغورث به دست می‌آید:

$$ds^2 = dx^i dx^i = \delta_{ij} dx^i dx^j \quad (3)$$

* کتاب را تصحیح نمایید.

از معادله (2) $x_i = x_i(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ بر اساس قاعده دیفرانسیل معمولی داریم:

$$dx^i = \frac{\partial x_i}{\partial \theta_1} d\theta^1 + \frac{\partial x_i}{\partial \theta_2} d\theta^2 + \frac{\partial x_i}{\partial \theta_3} d\theta^3 = \frac{\partial x_i}{\partial \theta_k} d\theta^k \quad (4)$$

از جایگذاری dx^i از (4) در (3) داریم:

چرا در جایگذاری بار دوم باید اندیس k به m تغییر یابد؟

$$ds^2 = \frac{\partial x_i}{\partial \theta_k} \frac{\partial x_i}{\partial \theta_m} d\theta^k d\theta^m$$

اگر توابع $g_{km}(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ را به شکل زیر تعریف کنیم:

$$g_{km}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \frac{\partial x_i}{\partial \theta_k} \frac{\partial x_i}{\partial \theta_m} \quad (5)$$

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

3/13

$$(6) \quad ds^2 = g_{km} d\theta^k d\theta^m$$

$$(7) \quad ds^2 = g_{11}(d\theta^1)^2 + g_{12}d\theta^1 d\theta^2 + g_{13}d\theta^1 d\theta^3 + g_{21}d\theta^1 d\theta^2 + g_{22}(d\theta^2)^2 + g_{23}d\theta^2 d\theta^3 + g_{31}d\theta^1 d\theta^3 + g_{32}d\theta^2 d\theta^3 + g_{33}(d\theta^3)^2$$

با توجه به تعریف (5) $g_{km}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \frac{\partial x_i}{\partial \theta_k} \frac{\partial x_i}{\partial \theta_m}$ داریم:

$$(8) \quad g_{km} = g_{mk} \quad \text{for each } k \text{ and } m$$

بنابراین توابع g_{km} نسبت به k و m متقارنند. توابع g_{km} را **تانسور متریک اقلیدسی** در سیستم مختصات $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ می‌نامند.

گردآوری و تنظیم: محمدحسین ابوالبشری

4/13

اکنون فرض کنید $\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2, \bar{\theta}_3$ یک سیستم مختصات عمومی دیگری باشد. اگر

$$\theta_i = \theta_i(\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2, \bar{\theta}_3) \quad (9)$$

انتقال از محورهای $\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2, \bar{\theta}_3$ به $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ باشد، داریم:

$$d\theta^k = \frac{\partial \theta_k}{\partial \bar{\theta}^l} d\bar{\theta}^l \quad (10)$$

بنابراین از معادله (6) $(ds^2 = g_{km} d\theta^k d\theta^m)$ داریم:

$$ds^2 = g_{km} \frac{\partial \theta_k}{\partial \bar{\theta}^l} \frac{\partial \theta_m}{\partial \bar{\theta}^n} d\bar{\theta}^l d\bar{\theta}^n \quad (11)$$

اگر عبارت زیر را تعریف کنیم:

$$\bar{g}_{ln}(\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2, \bar{\theta}_3) = g_{km}(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \frac{\partial \theta_k}{\partial \bar{\theta}^l} \frac{\partial \theta_m}{\partial \bar{\theta}^n} \quad (12)$$

آنگاه معادله (11) را می‌توان به شکل زیر نوشت که مانند معادله (3) یا (6) است.

$$ds^2 = \delta_{ij} dx^i dx^j \quad ds^2 = \bar{g}_{ln} d\bar{\theta}^l d\bar{\theta}^n \quad (13)$$

بر این اساس، $\bar{g}_{ln}$ را مؤلفه‌های **تانسور متریک اقلیدسی** در سیستم مختصات $\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2, \bar{\theta}_3$ می‌گویند.

5/13

مثال (Problem 2.3): طول پاره خط در مختصات قطبی را بیابید.

الف - روش معمول

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

$$dx^i = \frac{\partial x_i}{\partial \theta^k} d\theta^k$$

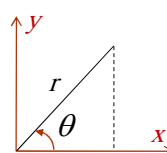
$$dx = \frac{\partial x}{\partial r} dr + \frac{\partial x}{\partial \theta} d\theta$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial r} dr + \frac{\partial y}{\partial \theta} d\theta$$

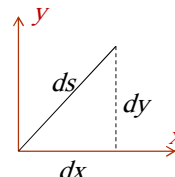
$$ds^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial r} dr + \frac{\partial x}{\partial \theta} d\theta \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r} dr + \frac{\partial y}{\partial \theta} d\theta \right)^2$$

$$= (\cos \theta dr - r \sin \theta d\theta)^2 + (\sin \theta dr + r \cos \theta d\theta)^2$$

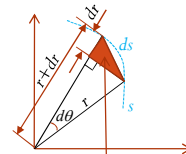
$$= dr^2 + r^2 (d\theta)^2 = dr^2 + (rd\theta)^2$$



Polar



RCC



6/13

ادامه

ب- روش اندیسی

$$g_{km} = \frac{\partial x_i}{\partial \theta_k} \frac{\partial x_i}{\partial \theta_m}, \quad \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

$$g_{11} = \frac{\partial x_1}{\partial \theta_1} \frac{\partial x_1}{\partial \theta_1} + \frac{\partial x_2}{\partial \theta_1} \frac{\partial x_2}{\partial \theta_1} = \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial y}{\partial r} = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$g_{12} = g_{21} = \frac{\partial x_1}{\partial \theta_1} \frac{\partial x_1}{\partial \theta_2} + \frac{\partial x_2}{\partial \theta_1} \frac{\partial x_2}{\partial \theta_2} = \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial y}{\partial \theta} = \cos \theta (-r \sin \theta) + r \sin \theta \cos \theta = 0$$

$$g_{22} = \frac{\partial x_1}{\partial \theta_2} \frac{\partial x_1}{\partial \theta_2} + \frac{\partial x_2}{\partial \theta_2} \frac{\partial x_2}{\partial \theta_2} = \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial y}{\partial \theta} \frac{\partial y}{\partial \theta} = r^2 \sin^2 \theta + r^2 \cos^2 \theta = r^2$$

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

$$ds^2 = g_{kl} d\theta^k d\theta^l = g_{11}(d\theta^1)^2 + g_{12}d\theta^1 d\theta^2 + g_{21}d\theta^2 d\theta^1 + g_{22}(d\theta^2)^2$$

$$= g_{11}(d\theta^1)^2 + g_{22}(d\theta^2)^2 = (dr)^2 + r^2(d\theta)^2$$

2) 5,6

مسائل زیر را حل کرده و تا دو هفته دیگر تحویل فرمایید:

2) 1,2

تمرین‌های قبلی: 7/13

2.4-اسکالرهای، بردارهای کنتراورینت (پادورد)
(Contravariant)، بردارهای کوارینت (ورد) (Covariant)

تانسورها کمیتی هستند که ممکن است چندین اندیس داشته باشند و یا هیچ اندیسی نداشته باشند و بر اساس تعداد اندیس‌هایش (که تعداد آن‌ها را صرفنظر از اینکه بالا یا پایین باشند، **رنگ (Rank) (یا مرتبه) تانسور** می‌گویند) به **رنگ** صفر، یک، دو و تقسیم می‌شوند.

نوع (Type) تانسورها:

نوع تانسور برای تفکیک تعداد اندیس‌های بالا و پایین آن به کار می‌رود. به عنوان مثال R_{klm}^{ij} می‌تواند یک تانسور مرتبه (رنگ) ۵ باشد و نوع آن دو مرتبه **کنتراورینت (contravariant)** (دارای دو اندیس بالا (superscript)) و ۳ مرتبه **کوارینت (covariant)** (دارای سه اندیس پایین (subscript)) باشد **اگر طبق قوانین خاصی انتقال یابد** که آن قوانین در ادامه خواهد آمد.

معادلات تانسوری:

یک معادله را تانسوری می‌گویند اگر همه جملات (Terms) آن **تانسوری از یک نوع و رنگ باشند** و در آن قوانین اندیسی رعایت شده باشد یعنی اندیس‌های آزاد در همه جملات وجود داشته باشند و اگر اندیس بالا یا پایین هستند در همه جملات به همان شکل باشند و اندیس‌های دامی در هر جمله بیش از دو بار ظاهر نشده باشند (که تعریف اندیس دامی است).
به عنوان مثال:

$$\bar{t}_{\beta_1 \dots \beta_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_p} = \underbrace{l_{m_1 \dots m_q}^{k_1 \dots k_p}}_{p \text{ terms}} \frac{\partial \bar{\theta}^{\alpha_1}}{\partial \theta^{k_1}} \dots \frac{\partial \bar{\theta}^{\alpha_p}}{\partial \theta^{k_p}} \cdot \underbrace{\frac{\partial \theta^{m_1}}{\partial \bar{\theta}^{\beta_1}} \dots \frac{\partial \theta^{m_q}}{\partial \bar{\theta}^{\beta_q}}}_{q \text{ terms}}$$

یک **معادله تانسوری** است زیرا در آن جملات طرف راست و چپ هر دو تانسورهایی از یک نوع و رنگ هستند و قوانین اندیسی در آن رعایت شده است. یعنی جملات **تانسورهایی از نوع مخلوط و رنگ $r=p+q$ هستند** که اندیس‌های آزاد $\alpha_1 \dots \alpha_p$ در دو طرف اندیس بالا و اندیس‌های آزاد $\beta_1 \dots \beta_q$ در دو طرف پایین و اندیس‌های دامی $k_1 \dots k_p$ و $m_1 \dots m_q$ در جمله طرف چپ هر کدام دو بار ظاهر شده‌اند.

$$\Gamma_{\alpha\beta}^i = \frac{1}{2} g^{i\sigma} \left(\frac{\partial g_{\sigma\beta}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial g_{\alpha\sigma}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\sigma} \right)$$

از نظر اندیسی صحیح است ولی معادله تانسوری نیست! زیرا $\Gamma_{\alpha\beta}^i$ یک تانسور نیست و بر اساس قوانین تانسوری انتقال نمی‌یابد!

یک سیستم را اسکالر (تانسور مرتبه صفر) می‌گویند اگر تنها یک مؤلفه ϕ بر حسب θ^i و یک مؤلفه $\bar{\phi}$ بر حسب $\bar{\theta}^i$ داشته و در نقاط مربوط از نظر عددی ϕ و $\bar{\phi}$ برابر باشند.

$$\phi(\theta^1, \theta^2, \theta^3) = \bar{\phi}(\bar{\theta}^1, \bar{\theta}^2, \bar{\theta}^3) \quad (1)$$

یک سیستم را یک میدان بردار کنتراورینت (contravariant) یا میدان تانسوری کنتراورینت از رنک (rank) یک می‌گویند اگر سه مؤلفه ζ^i بر حسب θ^i و سه مؤلفه $\bar{\zeta}^i$ بر حسب $\bar{\theta}^i$ داشته باشد و مؤلفه‌های آن‌ها با قاعده زیر به هم مربوط شوند:

$$\bar{\zeta}^i(\bar{\theta}^1, \bar{\theta}^2, \bar{\theta}^3) = \zeta^k(\theta^1, \theta^2, \theta^3) \frac{\partial \bar{\theta}^i}{\partial \theta^k} \quad (2)$$

یک بردار کنتراورینت با یک اندیس بالا (superscript) مشخص می‌شود که به آن اندیس کنتراورینت می‌گویند.

یک دیفرانسیل مانند $d\theta^i$ یک نمونه از بردار کنتراورینت است:

$$d\bar{\theta}^i = \frac{\partial \bar{\theta}^i}{\partial \theta^k} d\theta^k \quad (3)$$

$$d\theta = \frac{\partial \theta}{\partial x} dx + \frac{\partial \theta}{\partial y} dy + \frac{\partial \theta}{\partial z} dz$$

به عنوان مثال:

بنابراین، یک بردار کنتراورینت است اگر مانند یک دیفرانسیل انتقال یابد.

11/13

یک سیستم را میدان بردار کوارینت (covariant) یا یک میدان تانسوری کوارینت از رنک (rank) یک می‌نامند اگر سه مؤلفه η_i در سیستم θ^i و سه مؤلفه $\bar{\eta}_i$ در سیستم $\bar{\theta}^i$ داشته باشد و مؤلفه‌های آن‌ها در این دو سیستم با قاعده زیر به هم مربوط شوند:

$$\bar{\eta}_i(\bar{\theta}^1, \bar{\theta}^2, \bar{\theta}^3) = \eta_k(\theta^1, \theta^2, \theta^3) \frac{\partial \theta^k}{\partial \bar{\theta}^i} \quad (4)$$

یک بردار کوارینت با یک اندیس پایین مشخص می‌شود که آن را اندیس کوارینت می‌گویند. گرادیان یک پتانسیل (potential) اسکالر ϕ مانند (4) انتقال می‌یابد.

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{\theta}^i} \text{ or } \frac{\partial \phi}{\partial \bar{\theta}^i} = \frac{\partial \phi}{\partial \theta^k} \frac{\partial \theta^k}{\partial \bar{\theta}^i} \quad (5)$$

بنابراین، یک بردار را کوارینت گویند اگر مانند گرادیان یک پتانسیل اسکالر انتقال یابد. به عنوان مثال داریم:

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial T}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \theta}$$

ولی برای دیفرانسیل داشتیم:

$$dT = \frac{\partial T}{\partial x} dx + \frac{\partial T}{\partial y} dy + \frac{\partial T}{\partial z} dz$$

12/13

U1

Scalar potential describes the situation where the difference in the potential energies of an object in two different positions depends only on the positions, not upon the path taken by the object in traveling from one position to the other. It is a scalar field in three-space: a directionless value (scalar) that depends only on its location. A familiar example is potential energy due to gravity. (https://en.wikipedia.org/wiki/Scalar_potential) (Aug. 2017)

User: A/ • A/ 7 • 1 V :

آیا هر پارامتر که یک اندیس داشته باشد تانسور مرتبه یک و یا بردار است؟ و محل قرار گرفتن اندیس در آن مهم است؟

خیر. تانسورها با قوانین انتقالشان مشخص می‌شوند.

متغیرهای θ^i و $\bar{\theta}^i$ در حالت کلی مانند بردار کنتراورینت انتقال نمی‌یابند (به معادله (2.3:9) $\theta_i = \theta_i(\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2, \bar{\theta}_3)$ توجه نمایید). بنابراین، هرچند دیفرانسیل $d\theta^i$ یک بردار کنتراورینت است، **مجموعه متغیرهای θ^i مانند یک بردار انتقال نمی‌یابند** و محل قرار گرفتن اندیس θ^i بدون اهمیت است و می‌تواند پایین هم نوشته شود. در حقیقت آن‌ها نام مختصات هستند مانند θ, r یا Z .
 $\theta_1 = x, \theta_2 = y, \theta_3 = z$
 $\bar{\theta}_1 = r, \bar{\theta}_2 = \theta, \bar{\theta}_3 = z$
 تمامی روابط زیر یکسان و صحیح‌اند.

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial \bar{\theta}_2} = \frac{\partial \theta^1}{\partial \bar{\theta}_2} = \frac{\partial \theta^1}{\partial \bar{\theta}^2} = \frac{\partial \theta_1}{\partial \bar{\theta}^2} = \frac{\partial x}{\partial \theta}$$

$$d\bar{\theta}^i = \frac{\partial \bar{\theta}^i}{\partial \theta^k} d\theta^k = \frac{\partial \bar{\theta}_i}{\partial \theta^k} d\theta^k = \frac{\partial \bar{\theta}_i}{\partial \theta_k} d\theta^k$$