بسمه تعالی

ریاضی مهندسی

سری فوریه: از ریاضیات ۱ در مورد سری تیلور اطلاع داریم. این سری برای تقریب یک تابع توسط چندجمله‌ای‌ها مورد استفاده قرار می‌گرفت. شرط اصلی برای نوشتن سری تیلور یک تابع وجود مشتقات مرتبه n‌ام برای تابع مورد نظر بود. حال فرض کنیم می‌خواهیم یک تابع - مثلاً تکه‌ای ناپیوسته (و مشتق‌ناپذیر) است را تقریب بزنیم. دیگر سری تیلور یا مک‌لورن این مسئله مشکل است و باید از تقریب‌گرهای دیگر برای این کار استفاده کنیم. یکی از مهمترین تقریب‌گرها سری فوریه است.

برای ورود به سری فوریه نیاز به مقدماتی از توابع داریم که در ذیل به آن‌ها می‌پردازیم.

تابع زوج: فرض کنید تابع $y=f(x)$ در بازه $(-l,l)$ تعریف شده باشد که در آن l یک عدد حقیقی مثبت و ثابت است. گوییم f تابعی زوج است هرگاه به ازای هر $x\in(-l,l)$ داشته باشیم:

$$f(-x)=f(x)$$

و f را تابعی فرد گوییم هرگاه به ازای هر $x\in(-l,l)$ داشته باشیم: $f(-x)=-f(x)$.

توابع زوج نسبت به محور yها و تابع فرد نسبت به خط $y=-x$ (مبدأ مختصات) متقارن هستند.

مثلاً تابع $y=x^2$ تابع زوج و $y=x^3$ تابعی فرد است زیرا:

$$f(x)=x^2 \Longrightarrow f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x).$$

$$f(x)=x^3 \Longrightarrow f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x).$$

انتگرال یک تابع فرد در یک بازه متقارن برابر صفر است. یعنی اگر f در بازه $(-l,l)$ انتگرال‌پذیر باشد آنگاه

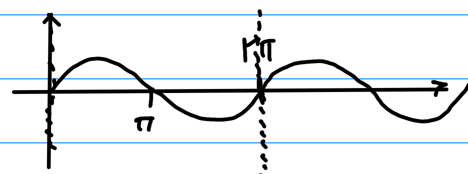
$$\int_{-l}^{l} f(x)\,dx = 0$$

همچنین اگر $y=f(x)$ تابعی زوج باشد آنگاه انتگرال این تابع روی بازه $(-l,l)$ دو برابر انتگرال این تابع روی بازه $(0,l)$ است. یعنی:

$$\int_{-l}^{l} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{l} f(x)\,dx$$

تابع متناوب: تابع $y=f(x)$ را تناوبی یا متناوب گوییم هرگاه عدد صحیح مثبت T وجود داشته باشد به طوری که $f(x+T)=f(x)$. به کوچکترین عدد صحیح T که در خاصیت قبل صدق کند دوره تناوب تابع گوییم. مثلاً تابع $y=\sin x$ تابعی متناوب با دوره تناوب $T=2\pi$ است زیرا:

$$\sin(x+2\pi)=\sin x$$



نمادگذاری: فرض کنید تابع $f(x)$ در همسایگی نقطه c تعریف شده باشد. برای نشان دادن مقدار راست و یا چپ تابع از نمادهای زیر استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = f(c^+)$$

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = f(c^-)$$

اگر حدود $f(c^+)$ و $f(c^-)$ وجود داشته و مخالف هم باشند آنگاه تابع f در $x=c$ ناپیوسته است. مثلاً تابع $f(x)=|x|$ در $x=0$ پیوسته است زیرا:

$$\lim_{x\to 0^+} |x| = \lim_{x\to 0^+} x = 0 \quad , \quad \lim_{x\to 0^-} |x| = \lim_{x\to 0^-} -x = 0$$

و $f(0)=0$ در نتیجه این تابع در $x=0$ پیوسته است.

اما تابع $f(x)=\frac{x}{|x|}$ در $x=0$ پیوسته نیست، زیرا،

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{|x|}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1 \neq \lim_{x\to 0^-}\frac{x}{|x|}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{-x}=-1$$

لذا این تابع در $x=0$ ناپیوسته است.

درحالتی که تابع $y=f(x)$ در $x=c$ ناپیوسته باشد گوییم این تابع ناپیوستگی از نوع جهش دارد و $f(c^+)-f(c^-)$ را جهش تابع در $x=c$ گوییم.

تابع f را در بازه $[a,b]$ پیوسته قطعه‌ای نامیم هرگاه حداکثر تعداد متناهی نقاط ناپیوستگی در بازه $[a,b]$ داشته باشد.

حاصلضرب داخلی دو تابع f و g در بازه $[a,b]$ را به صورت $\int_a^b f(x)g(x)dx$ تعریف می‌کنیم.

گوییم توابع f و g متعامد هستند هرگاه حاصلضرب داخلی آن‌ها صفر باشد یعنی روی بازه $[a,b]$ داشته باشیم $\int_a^b f(x)g(x)\,dx=0$

مثلاً دنباله توابع $\{1,\sin nx,\cos nx\}_{n=1}^{\infty}$ در بازه $[-\pi,\pi]$ متعامد هستند.

زیرا

$$\sin nx\cos mx=\frac{1}{2}\left[\cos(n-m)x+\cos(n+m)x\right]$$

پس،

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos mx\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\left(\cos(n-m)x+\cos(n+m)x\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n-m}\sin(n-m)x+\frac{1}{n+m}\sin(n+m)x\right]_{-\pi}^{\pi}=0$$

پس دنباله توابع فوق روی بازه $[-\pi,\pi]$ متعامد است.

سری تیلور یک تابع، بسط یک تابع به صورت سری توانی است. اگر تابع f در همسایگی نقطه a تعریف شده باشد و مشتقات آن از مرتبه n ام موجود باشد آنگاه می‌نویسیم:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots$$

که در آن $a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$.

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

یعنی تابع $y=f(x)$ را توسط چند جمله‌ای‌های برحسب $(x-a)^n$ حول نقطه a تقریب می‌زنیم.

حال می‌خواهیم تابع $y=f(x)$ را توسط سری فوریه مثلثاتی تقریب بزنیم.

هدف تقریب زدن تابع $y=f(x)$ توسط ترکیب خطی از مجموعه‌ای متعامد مثلثاتی است.

این مجموعه متعامد مثلثاتی همان مجموعه $\{1, \cos nx, \sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ است.

سری فوریه مثلثاتی: در حالتی که مجموعه متعامد، مجموعه متعامد مثلثاتی $\{1, \cos nx, \sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ باشد همگرایی سری فوریه را می‌توان تضمین کرد. فرض کنید $f(x)$ تابعی قطعه‌ای پیوسته در بازه $[-\pi, \pi]$ باشد. سری فوریه $f(x)$ نسبت به مجموعه متعامد بالا را سری فوریه مثلثاتی $f(x)$ می‌نامیم و آن را به صورت زیر تقریب می‌کنیم:

$$\boxed{f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)}$$

که در آن ضرایب به صورت زیر هستند:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\,dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\,dx, \quad n = 1, 2, \ldots$$

توجه داریم که $f(x)$ در بازه $[-\pi,\pi]$ تعریف شده است، اما سری فوریه یک تابع تناوبی با دوره تناوب 2π است. بنابراین می‌توانیم توسیع تناوبی $f(x)$ را در نظر بگیریم.

از سری فوریه فوق می‌توان تساوی تحت عنوان تساوی پارسوال بدست آورد.

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x))^2\,dx = 2a_0^2+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$$ (تساوی پارسوال)

حال می‌خواهیم قضیه اساسی در مورد همگرایی سری فوریه مثلثاتی را بیان کنیم.

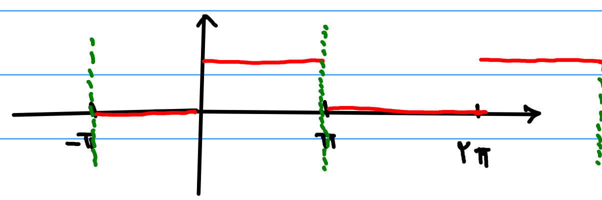
قضیه: فرض کنید f یک تابع تناوبی با دوره تناوب 2π باشد. اگر مشتقات چپ و راست f در x وجود داشته باشد آنگاه سری فوریه مثلثاتی f در x به مقدار $\frac{1}{2}[f(x^+)+f(x^-)]$ همگراست.

مثال ۱ سری فوریه تابع $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi<x<0\\ 1, & 0\le x<\pi\end{cases}$ ، $f(x+2\pi)=f(x)$.

را بیابید و همگرایی آن را مشخص کنید. (۱) نشان دهید $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}=\frac{\pi}{4}$

(۲) با استفاده از تساوی پارسوال نشان دهید $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$ (۳) مقدار سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ را بیابید.

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}0\,dx+\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}dx$$



$$\boxed{a_0=\frac{1}{2}}\qquad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi n}\sin nx\Big]_0^{\pi}=0$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx=\frac{-1}{n\pi}\cos nx\Big]_0^{\pi}$$

$$=\frac{-1}{n\pi}(\cos n\pi-1)=\frac{1-\cos n\pi}{n\pi}\qquad \boxed{\cos n\pi=(-1)^n}$$

$$\begin{cases} n=1 & \cos\pi=-1\\ n=2 & \cos 2\pi=1\\ n=3 & \cos 3\pi=-1\\ n=4 & \cos 4\pi=1\end{cases}$$

$$\boxed{b_n=\frac{1-(-1)^n}{n\pi}}$$

پس سری فوریه برابر است با:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n\pi} \sin nx}$$

برای $1-(-1)^n$ داریم: $1-(-1)^n = \begin{cases} 2 & n \text{ فرد} \nearrow 2n-1 \\ 0 & n \text{ زوج} \searrow 2n \end{cases}$ پس سری فوریه فوق به صورت زیر نیز نوشته می‌شود:

$$n \to 2n-1 \qquad f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overset{b_n}{2}}{(2n-1)\pi} \sin(2n-1)x$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$$

برای همگرایی آن از قضیه اساسی همگرایی سری فوریه داریم:

$$\frac{1}{2}\left[f(x^+) + f(x^-)\right] = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0 \;\checkmark \\ \frac{1}{2} & x = 0 \\ 1 & 0 < x < \pi \;\checkmark \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0 \\ \frac{1}{2} & x = 0 \\ 1 & 0 < x < \pi \end{cases}$$

برای قسمت (1) با جایگذاری $x = \frac{\pi}{2}$ داریم:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)\frac{\pi}{2}}{2n-1}$$

با $\sin(2n-1)\frac{\pi}{2} = (-1)^{n+1}$ پس

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} \Longrightarrow \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{2n-1} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{\pi}} = \frac{\pi}{4}}$$

(2) از تساوی پارسوال داریم:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx = 2a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} dx = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{(2n-1)\pi}\right)^2 \Rightarrow 1 = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)^2 \pi^2}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{4}{\pi^2}} = \frac{\pi^2}{8}$$

جزئی (۹۳) داریم :

$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{(2n-1)^2} + \frac{1}{(2n)^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2}$$

(2)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2}$$

$$\frac{3}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8} \Longrightarrow \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\frac{\pi^2}{8}}{\frac{3}{4}} = \frac{4\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{6}}$$

سری فوریه

ریاضی مهندسی

مثال ۱ الف) سری فوریه تابع $f(x)=x$ $\quad -\pi<x<\pi$ را بیابید.

ب) مقدار سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}$ را محاسبه کنید.

پ) مقدار سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ را محاسبه کنید.

حل: ضرایب سری فوریه به صورت زیر است:

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx\ ,\quad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx\ ,\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx$$

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\,dx=\frac{1}{2\pi}\frac{x^2}{2}\Big]_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{4\pi}(\pi^2-\pi^2)=0$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\cos nx\,dx=\begin{cases}u=x \Rightarrow du=dx\\ dv=\cos nx\,dx \Rightarrow v=\frac{1}{n}\sin nx\end{cases}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left(\frac{x}{n}\sin nx-\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{n}\sin nx\,dx\right)$$

$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{x}{n}\sin nx+\frac{1}{n^2}\cos nx\right]_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{\pi}\frac{1}{n^2}(\cos n\pi-\cos n\pi)=0$$

نکته: اگر $f(x)$ تابعی فرد باشد همواره $a_n=0$.

اگر $f(x)$ « زوج « « $b_n=0$.

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin nx\,dx$$

$$\begin{cases}u=x \Rightarrow du=dx\\ dv=\sin nx\,dx \Rightarrow v=-\frac{1}{n}\cos nx\end{cases}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{x}{n}\cos nx+\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{x}{n}\cos nx + \cancel{\frac{1}{n^2}\sin nx}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{-1}{n\pi}\left(x\cos nx\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= -\frac{+1}{n\pi}\left(\pi\cos n\pi + \pi\cos n\pi\right) = \frac{-2\pi}{n\pi}\cos n\pi = -\frac{2}{n}(-1)^n$$

سری فوریه تابع $f(x)=x$ برابر است با:

$$\underline{f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2}{n}(-1)^n \sin nx}$$

برای سری فوق در $x=\frac{\pi}{2}$ داریم:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2}{n}(-1)^n \sin\frac{n\pi}{2}$$

$$\sin\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0 & n \text{ زوج} \\ (-1)^{k+1} & n \text{ فرد} \end{cases}$$

$n=2k-1 \quad , \quad k=1,2,\ldots$

$$\frac{\pi}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} -\frac{2}{2k-1}(-1)^{2k-1}(-1)^{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} -\frac{2}{2k-1}(-1)^{3k} \qquad k=1,2,\ldots$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2} = 2\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{(-1)^{3k}}{2k-1} = 2\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{(-1)^{k}}{2k-1}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{4} = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k-1} \Rightarrow \boxed{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k-1} = -\frac{\pi}{4}}$$

با استفاده از تساوی پارسوال داریم:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\,dx = 2a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx = +\frac{1}{\pi}\frac{x^3}{3}\Big]_{-\pi}^{\pi} = +\frac{1}{\pi}\left(\frac{2\pi^3}{3}\right) = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$\text{طرف راست} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2} \Rightarrow \frac{2\pi^2}{3} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2} \Rightarrow \boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

مثال: سری فوریه تابع (الف) $f(x)=x^2$ برای $-\pi<x<\pi$ و $f(x+2\pi)=f(x)$ را بیابید.

ب) مقدار سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ را محاسبه کنید.

ج) مقدار سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ را محاسبه کنید.

حل: چون $f(x)=x^2$ تابعی زوج است پس $b_n=0$ لذا.

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\,dx=\frac{1}{2\pi}\frac{x^3}{3}\Big]_{-\pi}^{\pi}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi^3}{3}+\frac{\pi^3}{3}\right)=\frac{\pi^2}{3}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\cos nx\,dx \quad \begin{cases} u=x^2 \Rightarrow du=2x\,dx \\ dv=\cos nx\,dx \Rightarrow v=\frac{1}{n}\sin nx \end{cases}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left(\frac{x^2}{n}\sin nx-\frac{2}{n}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin nx\,dx\right),\quad J=\begin{cases} u=x \Rightarrow du=dx \\ dv=\sin nx\,dx \\ v=-\frac{1}{n}\cos nx \end{cases}$$

$$J=-\frac{x}{n}\cos nx+\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx=-\frac{x}{n}\cos nx+\frac{1}{n^2}\sin nx$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left(\frac{x^2}{n}\cancelto{0}{\sin nx}+\frac{2x}{n^2}\cos nx-\frac{2}{n^3}\cancelto{0}{\sin nx}\right)_{-\pi}^{\pi}$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{2\pi}{n^2}\cos n\pi+\frac{2\pi}{n^2}\cos n\pi\right)=\frac{4}{n^2}\cos n\pi=\frac{4}{n^2}(-1)^n$$

پس سری فوریه برابر است با:

$$f(x)=x^2=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}(-1)^n\cos nx$$

در $x=0$ سری فوق داریم:

$$f(0)=0=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}(-1)^n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=-\frac{\pi^2}{3\times 4}=-\frac{\pi^2}{12}$$

از تساوی پارسوال داریم:

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = 2a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^4\,dx = 2\left(\frac{\pi^2}{3}\right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{n^4}$$

$$\frac{1}{\pi}\,\frac{x^5}{5}\Big]_{-\pi}^{\pi} = \frac{2}{9}\pi^4 + 16\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$$

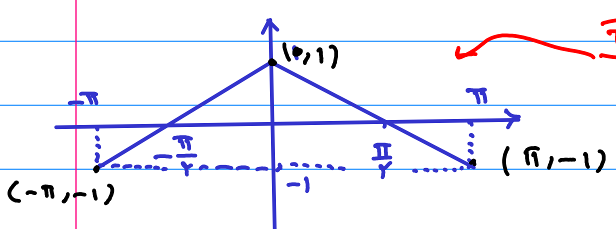
$$\frac{2\pi^5}{\pi\,5} = \frac{2}{9}\pi^4 + 16\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$$

$$\frac{2}{5}\pi^4 - \frac{2}{9}\pi^4 = 16\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} \Longrightarrow \frac{8\pi^4}{45} = 16\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{8\pi^4}{45\times 16} = \frac{\pi^4}{90}$$

مثال ۳ سری فوریه تابع با نمودار زیر را بیابید.

$\frac{2}{\pi}|x|+1$



حل: ابتدا ضابطه تابع را بدست می‌آوریم:

دو معادله خط می‌نویسیم. برای خط طرف راست: $(0,1)$ و $(\pi,-1)$ لذا

$$m = \frac{1-(-1)}{0-\pi} = \frac{-2}{\pi} \qquad y-1 = \frac{-2}{\pi}x \Longrightarrow \boxed{y = \frac{-2}{\pi}x+1}$$

برای خط چپ معادله بصورت: $y = \frac{2}{\pi}x+1$ است لذا:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{2}{\pi}x+1 & 0<x<\pi \\ \frac{2}{\pi}x+1 & -\pi<x<0 \end{cases}$$

چون تابع زوج است لذا $b_n=0$ می‌باشد.

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}\left(\frac{2}{\pi}x+1\right)dx + \int_{0}^{\pi}\left(-\frac{2}{\pi}x+1\right)dx\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\left(\frac{x^2}{\pi}+x\right)_{-\pi}^{0} + \left(-\frac{x^2}{\pi}+x\right)_{0}^{\pi}\right] = \frac{1}{2\pi}\left(\underbrace{-\pi+\pi} + \underbrace{(-\pi+\pi)}\right) = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\Big[\underbrace{\int_{-\pi}^{0}\left(\frac{2}{\pi}x+1\right)\cos nx\,dx}_{I_1}$$

$$+\underbrace{\int_{0}^{\pi}\left(-\frac{2}{\pi}x+1\right)\cos nx\,dx}_{I_2}\Big]$$

$$I_1 = \begin{cases} u = \frac{2}{\pi}x+1 \Rightarrow du = \frac{2}{\pi}dx \\ dv = \cos nx\,dx \Rightarrow v = \frac{1}{n}\sin nx \end{cases}$$

$$I_1 = \frac{1}{n}\left(\frac{2}{\pi}x+1\right)\cancelto{0}{\sin nx} - \frac{2}{\pi n}\int_{-\pi}^{0}\sin nx\,dx$$

$$= +\frac{2}{n^2\pi}\cos nx\Big]_{-\pi}^{0} = \frac{2}{n^2\pi}\left(1-\cos n\pi\right) = \boxed{\frac{2(1-(-1)^n)}{n^2\pi}}$$

$$I_2 = \int_{0}^{\pi}\left(-\frac{2}{\pi}x+1\right)\cos nx\,dx = \begin{cases} u = -\frac{2}{\pi}x+1 \Rightarrow du = -\frac{2}{\pi}dx \\ dv = \cos nx\,dx \Rightarrow v = +\frac{1}{n}\sin nx \end{cases}$$

$$I_2 = \frac{1}{n}\left(-\frac{2}{\pi}x+1\right)\sin nx + \frac{2}{n\pi}\int \sin nx\,dx$$

$$= \left(\frac{1}{n}\left(-\frac{2}{\pi}x+1\right)\cancelto{0}{\sin nx} - \frac{2}{n^2\pi}\cos nx\right]_{0}^{\pi}$$

$$= -\frac{2}{n^2\pi}\left(\cos n\pi - 1\right) = \frac{2}{n^2\pi}\left(1-(-1)^n\right)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left(\frac{4}{n^2\pi}\left(1-(-1)^n\right)\right) = \frac{4}{n^2\pi^2}\left(1-(-1)^n\right)$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2\pi^2}\left(1-(-1)^n\right)\cos nx$$

سری فوریه برابر است با:

بسمه تعالی

ریاضی مهندسی

مشتق و انتگرال از سری فوریه: همان طور که صحبت شد سری فوریه نوعی سری توانی با جملات مثلثاتی است. لذا می‌توان از سری فوریه جمله به جمله مشتق و یا انتگرال گرفت. پس برخی از سری‌های فوریه را با استفاده از این نکته به راحتی می‌توان پیدا نمود.

قضیه: فرض کنید $f(x)$ یک تابع قطعه‌ای پیوسته در فاصله $[-\pi,\pi]$ باشد. در این صورت:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad ①$$

می‌توان از سری فوق انتگرال گرفت:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b a_0\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\,dx$$

و همچنین می‌توان از سری فوریه ① مشتق گرفت:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-n a_n \sin nx + n b_n \cos nx)$$

مثال: سری فوریه توابع x^2 و x را در جلسات قبل روی بازه $[-\pi,\pi]$ محاسبه کردیم. درستی گزاره فوق را برای این دو تابع بررسی کنید.

حل: دیدیم:

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}(-1)^n \cos nx$$

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2}{n}(-1)^n \sin nx$$

حال از سری فوریه x^2 مشتق می‌گیریم:

$$2x = 0 + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{4}{n^2}(-1)^n n \sin nx$$

$$2x = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{4}{n}(-1)^n \sin nx$$

$$\stackrel{\div 2}{\Longrightarrow} \quad x = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2}{n}(-1)^n \sin nx$$

واکنون ازسری فوریه تابع x انتگرال می‌گیریم، داریم،

$$\int_{-\pi}^{x} t\,dt = \int_{-\pi}^{x} \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{-\frac{2}{n}(-1)^n \sin nt}\; dt$$

$$\frac{t^2}{2}\Big]_{-\pi}^{x} = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2}{n}(-1)^n \int_{-\pi}^{x} \sin nt\,dt$$

$$\Longrightarrow \frac{x^2}{2} - \frac{\pi^2}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2}{n}(-1)^n \left(-\frac{\cos nt}{n}\right]_{-\pi}^{x}$$

$$\Longrightarrow \frac{x^2}{2} = \frac{\pi^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2}{n}(-1)^n \left(\frac{-\cos nx}{n} + \frac{\cos n\pi}{n}\right)$$

$$\Longrightarrow \frac{x^2}{2} = \frac{\pi^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2}{n^2}(-1)^n \left(-\cos nx + (-1)^n\right)$$

$$\Longrightarrow \frac{x^2}{2} = \frac{\pi^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n^2}\cos nx - \frac{2(-1)^{2n}}{n^2}$$

$$\Longrightarrow \frac{x^2}{2} = \frac{\pi^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n^2}\cos nx - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$$

$$= \frac{\pi^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n^2}\cos nx - 2\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}}_{\frac{\pi^2}{6}}$$

$$\Longrightarrow \frac{x^2}{2} = \frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n^2}\cos nx$$

$$\stackrel{\times 2}{\Longrightarrow} x^2 = \pi^2 - \frac{2\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}(-1)^n \cos nx$$

$$\therefore \quad x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2}\cos nx$$

سری فوریه روی بازه‌های دلخواه: هدف یافتن سری فوریه روی بازه دلخواه $[a,b]$ است. در حالت سری $a=-\pi$, $b=b$

بود سری فوریه و ضرایب آن را بررسی کردیم. فرض کنید می‌خواهیم بازه $[-\pi,\pi]$ را به بازه $[a,b]$ تغییر دهیم.

برای این منظور داریم: $[-\pi,\pi] \Longrightarrow -\pi \leq x \leq \pi$

با تغییر $\underline{t=\alpha x+\beta}$ به $-\pi \leq t \leq \pi$ و $a \leq x \leq b$ خواهیم داشت:

برای این منظور در $x=a$ باید داشته باشیم $t=-\pi$ و در $x=b$ باید داشته باشیم $t=\pi$.

$$\begin{cases} -\pi = \alpha a+\beta \\ \pi = \alpha b+\beta \quad (2) \end{cases}$$

$$-2\pi = \alpha(a-b) \Longrightarrow \boxed{\alpha = \frac{2\pi}{b-a}} \quad (*)$$

$$(2),(*) \Longrightarrow \beta = \pi - \frac{2\pi b}{b-a} = \frac{\pi b-\pi a-2\pi b}{b-a} = \frac{-\pi(a+b)}{b-a}$$

$$\therefore \boxed{\beta = \frac{-\pi(a+b)}{b-a}}$$

یعنی می‌توان با تغییر $t=\dfrac{2\pi x}{b-a}-\dfrac{\pi(a+b)}{b-a}$ می‌توان هر x را به t ببریم. در این صورت $a \leq x \leq b$, $-\pi \leq t \leq \pi$

و در حالت خاص $[-l,l]$ یعنی $a=-l$, $b=l$ داریم:

$$t = \frac{2\pi x}{2l} - \frac{\pi(0)}{2l} \Longrightarrow t = \frac{\pi x}{l}$$

یعنی سری فوریه برای بازه $[-l,l]$ به صورت زیر خواهد بود:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{l}x + b_n \sin\frac{n\pi}{l}x \qquad n=1,2,\ldots$$

$$a_0 = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx , \quad a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx , \quad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx$$

$\boxed{l=3}$

مثال: سری فوریه تابع $f(x)=\begin{cases}-1 & -3\leqslant x<0\\ 1 & 0<x<3\end{cases}$ را روی بازه $[-3,3]$ بیابید.

حل:

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi}{3}x+b_n\sin\frac{n\pi}{3}x$$

$$a_0=\frac{1}{6}\int_{-3}^{3}f(x)dx=\frac{1}{6}\int_{-3}^{0}-dx+\frac{1}{6}\int_{0}^{3}dx=\frac{1}{6}(-3+3)=0$$

$$a_n=\frac{1}{3}\int_{-3}^{3}f(x)\cos\frac{n\pi}{3}x\,dx=\frac{1}{3}\int_{-3}^{0}-\cos\frac{n\pi}{3}x\,dx+\frac{1}{3}\int_{0}^{3}\cos\frac{n\pi}{3}x\,dx$$

$$=\frac{-1}{3}\,\frac{3}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{3}x\Big]_{-3}^{0}+\frac{1}{3}\,\frac{3}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{3}x\Big]_{0}^{3}=0$$

$$b_n=\frac{1}{3}\int_{-3}^{3}f(x)\sin\frac{n\pi}{3}x\,dx=\frac{1}{3}\int_{-3}^{0}-\sin\frac{n\pi}{3}x\,dx+\frac{1}{3}\int_{0}^{3}\sin\frac{n\pi}{3}x\,dx$$

$$=+\frac{1}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{3}x\Big]_{-3}^{0}-\frac{1}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{3}x\Big]_{0}^{3}$$

$$=\frac{1}{n\pi}\left(1-(-1)^n-\left((-1)^n-1\right)\right)=\frac{2-2(-1)^n}{n\pi}=\frac{2}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right)$$

پس:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right)\sin\frac{n\pi}{3}x$$

مثال: سری فوریه تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & -1<x<0\\ -x & 0<x<1\end{cases}$ را بیابید.

$$a_0=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{0}\frac{1}{2}dx+\frac{1}{2}\int_{0}^{1}-x\,dx$$

$$=\frac{1}{4}x\Big]_{-1}^{0}-\left(\frac{x^2}{4}\right]_{0}^{1}=+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0$$

$$a_n=\int_{-1}^{1}f(x)\cos n\pi x\,dx=\int_{-1}^{0}\frac{1}{2}\cos n\pi x\,dx+\int_{0}^{1}-x\cos n\pi x\,dx$$

$u=x \Rightarrow du=dx$, $dv=\cos n\pi x$, $v=\frac{1}{n\pi}\sin n\pi x$

$$=\frac{1}{2n\pi}\sin n\pi x\Big]_{-1}^{0}-\frac{x}{n\pi}\sin n\pi x+\frac{1}{n\pi}\int\sin n\pi x\,dx$$

$$=-\frac{x}{n\pi}\sin n\pi x-\frac{1}{n^2\pi^2}\cos n\pi x\Big]_{0}^{1}=-\frac{1}{n^2\pi^2}\left((-1)^n-1\right)$$

$$b_n = \int_{-1}^{1} f(x)\sin n\pi x\,dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{2}\sin n\pi x\,dx - \int_{0}^{1} x\sin n\pi x\,dx$$

$$= \frac{-1}{2n\pi}\cos n\pi x\Big]_{-1}^{0} + \frac{x}{n\pi}\cos n\pi x - \frac{1}{n\pi}\cancel{\int_{0}^{1}\cos n\pi x\,dx}$$

$u = x \Rightarrow du = dx$

$dv = \sin n\pi x\,dx$

$v = \frac{-1}{n\pi}\cos n\pi x$

$$= -\frac{1}{2n\pi}(1-\cos n\pi) + \left(\frac{x}{n\pi}\cos n\pi x\right]_{0}^{1}$$

$$= -\frac{1}{2n\pi}(1-(-1)^n) + \frac{1}{n\pi}(-1)^n = \frac{1}{2n\pi}\left((-1)^n - 1 + 2(-1)^n\right)$$

$$\Rightarrow b_n = \frac{1}{2n\pi}\left(3(-1)^n - 1\right)$$

پس سری فوریه برابر است با ؛

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{1}{n^2\pi^2}\left((-1)^n-1\right)\cos n\pi x + \frac{1}{2n\pi}\left(3(-1)^n-1\right)\sin n\pi x\right]$$

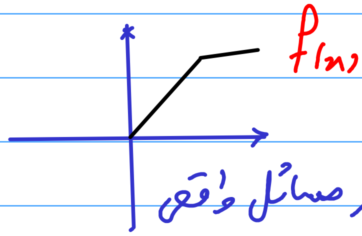
سمیه ثقفی

ریاضی مهندسی

بسط فوریه سینوسی و کسینوسی (بسط نیم دامنه‌ای)

دیدیم که سری فوریه برای توابع متناوب نوشته می‌شود و اگر تابعی متناوب نبود نمی‌توانستیم سری فوریه بنویسیم.

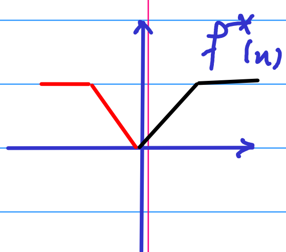
مثلاً تابع زیر را با محورهای رسم شده در نظر بگیرید



در حالت کلی این تابع سری فوریه ندارد! زیرا متناوب نیست! اما در مسائل واقعی

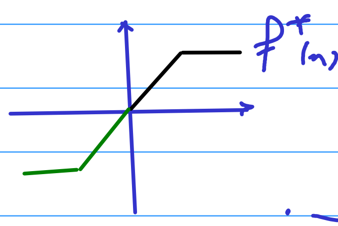
گاهی‌ها با این نوع توابع سروکار داریم و باید برای آن‌ها سری فوریه بنویسیم. برای این منظور تابع $f(x)$ را با توجه به

نیازمان به یک تابع زوج یا یک تابع فرد توسیع (گسترش) می‌دهیم. یعنی برای تابع زوج داریم،



(۱)

به طور مشابه می‌توان تابع فوق را به یک تابع فرد نیز گسترش دهیم.



اکنون در دو حالت گسترش داده می‌توان سری فوریه برای تابع نوشت.

فرض کنید تابع $f(x)$ روی بازه $0<x<l$ تعریف شده باشد. اگر این تابع را به یک تابع زوج (حالت شکل ۱)

گسترش دهیم آنگاه می‌توانیم سری فوریه کسینوسی برای این تابع بنویسیم:

$$f^*(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{l} x \; \cancel{+ b_n \cdots} \qquad f^*(x) \;\; -l<x<l \;\; \text{زوج}$$

که

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_0^l f(x)\,dx, \qquad a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x \, dx$$

در حالت خاص $l=\pi$ یعنی تابع $f(x)$ در بازه $0<x<\pi$ می‌توان نوشت:

$$f^*(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \, dx, \qquad a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx, \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx \, dx$$

به طور مشابه اگر توسیع تابع $f(x)$ را به یک تابع فرد داشته باشیم یعنی $-l<x<l$ $\quad f^*(x)$ فرد :

در این صورت سری فوریه سینوسی آن برابر است با :

$$f^*(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{l}x \quad ; \quad b_n=\frac{2}{l}\int_0^{\pi} f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx$$

در حالت خاص $l=\pi$ داریم :

$$f^*(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \quad ; \quad b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

تساوی پارسوال برای بسط های نیم دامنه نیز برقرار است که به صورت زیر معادله می شود :

برای حالت سری فوریه کسینوسی ; $\quad \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(f(x))^2dx = 2a_0^2+\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$

برای حالت سری فوریه سینوسی ; $\quad \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(f(x))^2dx = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$

در این حالت نیز قضیه همگرایی سری فوریه برقرار است. یعنی در بررسی نقاط ناپیوستگی از $\frac{1}{2}\left(f(x^+)+f(x^-)\right)$ استفاده می کنیم.

مثال : سری فوریه سینوسی و کسینوسی تابع $f(x)=x$ را در بازه $0<x<\pi$ بیابید.

حل : برای سری فوریه سینوسی تابع $f(x)=x$ در بازه $0<x<\pi$ را به تابع $f(x)=\begin{cases} x & 0<x<\pi \\ x & -\pi<x<0 \end{cases}$ فرد توسیع می دهیم.

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx \Rightarrow \begin{cases} u=x \Longrightarrow du=dx \\ dv=\sin nx\,dx \Longrightarrow v=-\frac{1}{n}\cos nx \end{cases}$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{x}{n}\cos nx+\frac{1}{n}\cancel{\int_0^{\pi}\cos nx\,dx}\right)=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{x}{n}\cos nx\right]_0^{\pi}=\frac{-2}{n\pi}\left(\pi(-1)^n\right)$$

$$=-\frac{2}{n}(-1)^n$$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{2}{n}(-1)^n\sin nx \qquad 0<x<\pi$$ سپس سری فوریه سینوسی برابر است با:

سری فوریه کسینوسی به صورت زیر است:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\,dx=\frac{1}{\pi}\,\frac{x^2}{2}\Big]_0^{\pi}=\frac{\pi}{2}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\,dx \Longrightarrow \begin{cases} u=x \Longrightarrow du=dx \\ dv=\cos nx \Longrightarrow v=+\frac{1}{n}\sin nx \end{cases}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\left(\frac{x}{n}\cancel{\sin nx}^{\,0}-\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx\right)=\frac{2}{n^2\pi}\cos nx\Big]_0^{\pi}=\frac{2}{n^2\pi}\left((-1)^n-1\right)$$

پس سری فوریه کسینوسی این تابع به صورت زیر است:

$$f(x)=\underline{\underline{x}}=\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2\pi}\left((-1)^n-1\right)\cos nx \quad (*)$$

مثال: با انتگرال گیری از سری فوریه کسینوسی تابع $f(x)=x$ در بازه $0<x<\pi$، سری فوریه سینوسی تابع $f(x)=x^2-\pi x$ را بدست آورید.

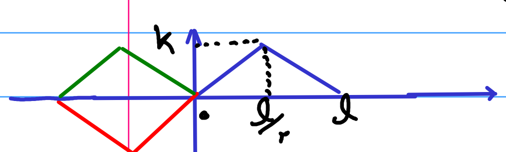
حل: طبق مثال قبل رابطه $(*)$ را داریم:

$$\int_0^{x}t\,dt=\int_0^{x}\frac{\pi}{2}\,dt+\int_0^{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2\pi}\left((-1)^n-1\right)\cos nt\,dt$$

$$\frac{x^2}{2}=\frac{\pi}{2}x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2\pi}\left((-1)^n-1\right)\left(\frac{1}{n}\sin nt\right]_0^{x}$$

$$\xrightarrow{\times 2}\quad x^2=\pi x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2\pi}\left((-1)^n-1\right)\frac{1}{n}\sin nx$$

$$\Longrightarrow\quad x^2-\pi x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^3\pi}\left((-1)^n-1\right)\sin nx\ ; \qquad 0<x<\pi$$



تمرین: سری فوریه سینوسی و کسینوسی تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{2k}{l}x & 0<x<\frac{l}{2}\\ \frac{2k}{l}(l-x) & \frac{l}{2}<x<l\end{cases}$ را بنویسید.

انتگرال فوریه: در بخش قبل (سری فوریه) دیدیم که یک تابع مانند $f(x)$ که متناوب بود را توسط یک سری

با جملات مثلثاتی $\sin$ و $\cos$ تقریب زدیم. اکنون هدف تقریب همان تابع $f(x)$

توسط یک انتگرال (که تقریب پیوسته است) خواهد بود. توجه داریم که این تقریب نیز توسط توابع مثلثاتی

$\sin$ و $\cos$ است.

فرض کنید تابع $f(x)$ یک تابع پیوسته قطعه‌ای روی $\mathbb{R}$ باشد و همچنین این تابع روی این بازه مطلقاً انتگرال‌پذیر باشد.

(تابع $f(x)$ را روی $\mathbb{R}$ مطلقاً انتگرال‌پذیر گوییم هرگاه $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx$ موجود باشد)

انتگرال فوریه تابع $y=f(x)$ به صورت زیر است:

$$f(x)=\int_0^{\infty}(A_\alpha \cos\alpha x+B_\alpha \sin\alpha x)\,d\alpha$$

که در آن: A_α و B_α را ضرایب انتگرال فوریه می‌نامند.

$$A_\alpha=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos\alpha x\,\underline{\underline{dx}}\quad,\quad B_\alpha=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\sin\alpha x\,\underline{\underline{dx}}$$

قضیه همگرایی انتگرال فوریه: فرض کنید $f(x)$ روی $\mathbb{R}$ تکه‌ای پیوسته و تکه‌ای هموار باشد. همچنین فرض کنید این تابع روی $\mathbb{R}$

مطلقاً انتگرال‌پذیر باشد. در این صورت:
$$\frac{1}{2}(f(x^+)+f(x^-))=\int_0^{\infty}(A_\alpha\cos\alpha x+B_\alpha\sin\alpha x)\,d\alpha$$

یکی از کاربردهای انتگرال فوریه محاسبه انتگرال‌های ناسره است.

مثال: انتگرال فوریه تابع $f(x)=\begin{cases}1 & |x|<1\\ 0 & \underline{\underline{|x|\geq 1}}\end{cases}$ را بیابید و مقدار انتگرال $\underline{\int_0^{\infty}\frac{\sin\alpha}{\alpha}\,\underline{\underline{d\alpha}}}$ را محاسبه کنید.

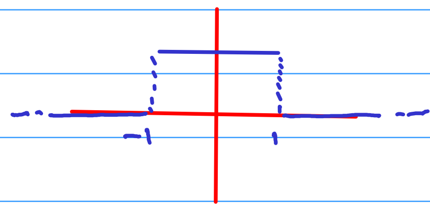
$$f(x)=\begin{cases}0 & x>1\\ 1 & -1<x<1\\ 0 & x<-1\end{cases}\qquad\begin{cases}x=1\longrightarrow f=\frac{1}{2}(f(1^+)+f(1^-))=\frac{1}{2}\\ x=-1\longrightarrow f=\frac{1}{2}(f(-1^+)+f(-1^-))=\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$A_\alpha = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\alpha x\, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \cos\alpha x\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{\alpha}\sin\alpha x\Big]_{-1}^{1} = \frac{1}{\pi\alpha}\left(\sin\alpha - (\sin(-\alpha))\right) = \frac{2}{\pi\alpha}\sin\alpha$$

$$B_\alpha = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\alpha x\, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sin\alpha x\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\,\frac{-1}{\alpha}\cos\alpha x\Big]_{-1}^{1} = \frac{-1}{\alpha\pi}(\cos\alpha - \cos\alpha) = 0$$



نمودار تابع $f(x)$ به صورت زیر است:

چون تابع زوج است ولذا $B_\alpha = 0$

و اگر تابع فرد باشد $A_\alpha = 0$.

پس انتگرال فوریه تابع $f(x)$ به صورت زیر است:

$$f(x) = \int_0^{\infty} \frac{2}{\pi\alpha}\sin\alpha\cos\alpha x\, d\alpha = A \qquad (*)$$

برای همگرایی انتگرال فوریه داریم:

$$A = \begin{cases} 1 & |x| < 1 \\ \frac{1}{2} & x = 1, -1 \quad , |x| = 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$

$|x|^+ \to 1 \Rightarrow f = 0$

$|x|^- \to 1 \Rightarrow f = 1$

$$\checkmark\ \frac{1}{2}\left(f(|x|^+) + f(|x|^-)\right) = \frac{1}{2}(1+0) = \frac{1}{2}$$

در انتگرال فوریه به جای $x = 0$ قرار دهیم:

$$f(0) = 1 = \int_0^{\infty}\frac{2}{\pi\alpha}\sin\alpha\, d\alpha \Rightarrow 1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin\alpha}{\alpha}\, d\alpha$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_0^{\infty}\frac{\sin\alpha}{\alpha}\, d\alpha = \frac{\pi}{2}}$$

بسمه تعالی

ریاضی مهندسی

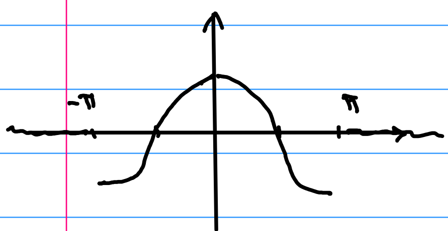
یادآوری : انتگرال فوریه

$$f(x)=\int_0^{\infty}(A_\alpha \cos\alpha x + B_\alpha \sin\alpha x)\,d\alpha$$

$$A_\alpha=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\alpha x\,dx$$

$$B_\alpha=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\alpha x\,dx$$

مثال : انتگرال فوریه تابع $f(x)=\begin{cases}\cos x & |x|<\pi\\ 0 & |x|\geq\pi\end{cases}$ را بیابید.



حل : تابع $f(x)$ زوج است پس $B_\alpha=0$. می‌نویسیم:

$$A_\alpha=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\alpha x\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos x\cos\alpha x\,dx$$

$$\cos a\cos b=\frac{1}{2}\left[\cos(a+b)+\cos(a-b)\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\left(\cos(1+\alpha)x+\cos(1-\alpha)x\right)dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\cos(1+\alpha)x+\cos(1-\alpha)x\right]dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{1+\alpha}\sin(\alpha+1)x+\frac{1}{1-\alpha}\sin(1-\alpha)x\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{2}{1+\alpha}\sin(\alpha+1)\pi+\frac{2}{1-\alpha}\sin(1-\alpha)\pi\right)$$

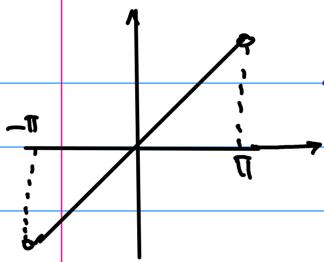
$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{1+\alpha}\sin(\alpha+1)\pi+\frac{1}{1-\alpha}\sin(1-\alpha)\pi\right)$$

$$\Rightarrow f(x)=\int_0^{\infty}A_\alpha\cos\alpha x\,d\alpha=\int_0^{\infty}\qquad\cos\alpha x\,d\alpha$$

$$=\begin{cases}\cos x & |x|<\pi\\ 0 & |x|>\pi\\ -\frac{1}{2} & |x|=\pi\end{cases}$$

$$\frac{1}{2}(\cos\pi+0)$$

مثال: انتگرال فوریه تابع $f(x)=\begin{cases} x, & |x|<\pi \\ 0, & |x|>\pi \end{cases}$ را بصورت وجود بیابید.



حل: تابع فوق تابعی فرد است، پس $A_\alpha = 0$، درنتیجه:

$$B_\alpha = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\alpha x\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin\alpha x\,dx$$

$$\begin{cases} u = x \Rightarrow du = dx \\ \sin\alpha x\,dx = dv \Rightarrow v = -\frac{1}{\alpha}\cos\alpha x \end{cases}$$

$$B_\alpha = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{x}{\alpha}\cos\alpha x + \overbrace{\frac{1}{\alpha}\int \cos\alpha x\,dx}^{0}\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{x}{\alpha}\cos\alpha x\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{-1}{\alpha\pi}\left(\pi\cos\alpha\pi + \pi\cos\pi\alpha\right)$$

$$= \frac{-2\pi}{\alpha\pi}\cos\alpha\pi$$

$$\Rightarrow f(x) = \int_0^\infty B_\alpha \sin\alpha x\,d\alpha$$

$$= \int_0^\infty -\frac{2}{\alpha}\cos\alpha\pi\sin\alpha x\,d\alpha = \begin{cases} x & |x|<\pi \\ 0 & |x|>\pi \\ \frac{\pi}{2} & |x|=\pi \end{cases}$$

انتگرال فوریه سینوسی و کسینوسی:

فرض کنید $f(x)$ تابعی تکه‌ای پیوسته روی بازه $(0,\infty)$ و همچنین روی این بازه مطلقاً انتگرال پذیر باشد.

می‌خواهیم برای این تابع بسط انتگرال فوریه بنویسیم. لذا سعی می‌کنیم این تابع را روی بازه $(-\infty,\infty)$ طوری توسیع دهیم که تابع حاصل زوج و یا فرد باشد.

درحالت اول فرض کنید تابع $f(x)$ را روی بازه $(0,\infty)$ بر روی بازه $(-\infty,\infty)$ به یک تابع زوج

توسیع دهیم. در این صورت داریم:

$$\text{زوج}\quad f^*(x)=\begin{cases} f(x) & 0<x<\infty \\ f(-x) & -\infty<x<0 \end{cases}$$

در این صورت با توجه به اینکه تابع زوج داریم:

$$\checkmark\ f^*(x)=\int_0^\infty A\alpha \cos\alpha x\, d\alpha \quad ; \quad A\alpha=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)\cos\alpha x\, dx$$

چون f^* تابعی زوج است لذا

$$A\alpha=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\cos\alpha x\, dx$$

<u>حالت دوم</u>: اگر تابع $f(x)$ روی بازه $(0,\infty)$ را یک تابع فرد توسیع دهیم خواهیم داشت:

$$f^*(x)=\begin{cases} f(x) & 0<x<\infty \\ -f(-x) & -\infty<x<0 \end{cases}$$

در این صورت انتگرال فوریه تابع f^* روی بازه $(-\infty,\infty)$ برابر است با:

$$f^*(x)=\int_0^\infty B\alpha \sin\alpha x\, d\alpha \quad , \quad B\alpha=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\sin\alpha x\, dx$$

که آن را بسط سینوسی انتگرال فوریه می‌نامیم.

مثال: انتگرال فوریه سینوسی و کسینوسی تابع $f(x)=\begin{cases} 1 & 0<x<1 \\ 0 & 1<x<\infty \end{cases}$ را بیابید.

حل: برای انتگرال فوریه سینوسی داریم:

$$B\alpha=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\sin\alpha x\, dx=\frac{2}{\pi}\int_0^1 \sin\alpha x\, dx=-\frac{2}{\alpha\pi}\cos\alpha x\Big]_0^1$$

$$=-\frac{2}{\alpha\pi}(\cos\alpha-1)$$

$$f(x)=\int_0^\infty -\frac{2}{\alpha\pi}(\cos\alpha-1)\sin\alpha x\, d\alpha$$

و برای انتگرال فوریه کسینوسی داریم:

$$A\alpha=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\cos\alpha x\, dx=\frac{2}{\pi}\int_0^1 \cos\alpha x\, dx=\frac{2}{\alpha\pi}\sin\alpha x\Big]_0^1$$

$$=\frac{2}{\alpha\pi}\sin\alpha$$

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{2}{\pi\alpha} \sin\alpha \cos\alpha x \, d\alpha$$ و

مثال، با استفاده از انتگرال فوریه کسینوسی تابع e^{-ax} که در آن $a>0$ نشان دهید:

$$e^{-ax} = \frac{2a}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos\alpha x}{\alpha^2 + a^2} \, d\alpha \, , \quad x \geq 0$$

$$A_\alpha = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(x) \cos\alpha x \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-ax} \cos\alpha x \, dx$$

$$\begin{cases} u = e^{-ax} \Longrightarrow du = -a e^{-ax} dx \\ \cos\alpha x \, dx = dv \Rightarrow v = \frac{1}{\alpha} \sin\alpha x \end{cases}$$

$$A_\alpha = \frac{2}{\pi} \left(\frac{e^{-ax}}{\alpha} \sin\alpha x + \frac{a}{\alpha} \underbrace{\int_0 e^{-ax} \sin\alpha x \, dx}_{} \right)$$

$$\begin{cases} u = e^{-ax} \Longrightarrow du = -a e^{-ax} dx \\ dv = \sin\alpha x \, dx \Rightarrow v = -\frac{1}{\alpha} \cos\alpha x \end{cases}$$

$$A_\alpha = \left(\frac{2}{\pi} \frac{e^{-ax}}{\alpha} \sin\alpha x \right]_0^\infty + \left(\frac{a}{\alpha} \frac{2}{\pi} \frac{-e^{-ax}}{\alpha} \cos\alpha x \right]_0^\infty - \frac{a}{\alpha} \frac{a}{\alpha} \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-ax} \cos\alpha x \, dx$$

$$A_\alpha = (0 - 0) + \frac{-2a}{\pi\alpha^2} (0 - 1) - \frac{a^2}{\alpha^2} A_\alpha$$

$$A_\alpha \left(1 + \frac{a^2}{\alpha^2} \right) = + \frac{2a}{\pi\alpha^2} \Longrightarrow A_\alpha = \frac{+2a}{\pi\alpha^2} \times \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + a^2}$$

$$A_\alpha = \frac{2a}{\pi(\alpha^2 + a^2)}$$

پس:

$$f(x) = e^{-ax} = \int_0^\infty \frac{2a}{\pi(\alpha^2 + a^2)} \cos\alpha x \, d\alpha$$

$$= \frac{2a}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos\alpha x}{\alpha^2 + a^2} \, d\alpha$$

تبدیل فوریه: دیدیم که اگر تابع f روی $\mathbb{R}$ مطلقاً انتگرال‌پذیر باشد آنگاه انتگرال فوریه f موجود است

به صورت زیر نوشته می‌شود: $\longrightarrow$

$$f(x)=\int_0^\infty (A_\alpha \cos \alpha x + B_\alpha \sin \alpha x)\,d\alpha$$

$$=\int_0^\infty \left[\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos \alpha t\,dt \cos \alpha x + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin \alpha t\,dt \sin \alpha x\right] d\alpha$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos \alpha t \cos \alpha x\,dt + \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin \alpha t \sin \alpha x\,dt\right] d\alpha$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\underbrace{(\cos \alpha t \cos \alpha x + \sin \alpha t \sin \alpha x)}_{\cos(\alpha t-\alpha x)}\,dt\right] d\alpha$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos \alpha(t-x)\,dt}_{\text{زوج}}\,d\alpha \qquad \int_{-a}^{a} f\,dx = 2\int_0^a f\,dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos \alpha(t-x)\,dt\,d\alpha$$

و $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{f(t)\sin \alpha(t-x)\,dt\,d\alpha}_{\text{نسبت به } \alpha \text{ فرد}}=0$ چون نسبت به α فرد است و روی بازه متقارن است.

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos \alpha(t-x)\,dt\,d\alpha - \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin \alpha(t-x)\,dt\,d\alpha$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left(\cos \alpha(t-x) - i\sin \alpha(t-x)\right)dt\,d\alpha$$

با استفاده از فرمول اویلر: $e^{i\theta}=\cos\theta + i\sin\theta$, $e^{-i\theta}=\cos\theta - i\sin\theta$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-i\alpha(t-x)}\,dt\,d\alpha$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-i\alpha t}\,e^{i\alpha x}\right]dt\,d\alpha$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Bigg[\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\alpha t}\, dt}_{F(\alpha)} \Bigg] e^{i\alpha x}\, d\alpha$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)\, e^{i\alpha x}\, d\alpha$$

$F(\alpha)$ را تبدیل فوریه تابع f گوییم و آن را با نماد $F(f)$ نمایش می‌دهیم. در حقیقت

$$\boxed{F(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\alpha t}\, dt}$$

بسمه تعالی

ریاضی مهندسی

تبدیل فوریه: $f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha) e^{-i\alpha x}\, d\alpha \ , \ F(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\alpha t}\, dt$

$$\boxed{F(f(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\alpha t}\, dt}$$

که $F(\alpha)$ را تبدیل فوریه تابع f می‌نامیم.

تبدیل فوریه خاصیت خطی دارد. یعنی

$$F(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha F(f) + \beta F(g)$$

تبدیل فوریه معکوس را داریم

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha) e^{-i\alpha x}\, d\alpha$$

$$F(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\alpha t}\, dt$$

اما می‌توان صورت تابع $f(x)$ را به صورت زیر بدست آورد؛

$$F^{-1}(F(\alpha)) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha) e^{-i\alpha x}\, d\alpha \ , \quad f(x) = F^{-1}(F(\alpha))$$

تبدیل فوریه معکوس نیز خاصیت خطی دارد. یعنی

$$F^{-1}(\alpha F + \beta G) = \alpha F^{-1}(F) + \beta F^{-1}(G) = \alpha f + \beta g$$

مثال: فرض کنید $a \in \mathbb{R} > 0$. تبدیل فوریه تابع روبرو را بیابید

$$f(x) = \begin{cases} e^{-ax} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$$F(f(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\alpha t}\, dt = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} 0 \cdot e^{-i\alpha t}\, dt}_{0} + \int_{0}^{\infty} e^{-at} e^{-i\alpha t}\, dt$$

$$= \int_{0}^{\infty} e^{-t(a+i\alpha)}\, dt = \frac{-1}{a+i\alpha} e^{-(a+i\alpha)t}\Big]_{0}^{\infty}$$

$$= 0 - \frac{-1}{a+i\alpha} = \frac{1}{a+i\alpha}$$

تابع پله‌ای واحد (هویساید): این تابع را با $u(x)$ یا $u_a(x)$ یا $H(x-a)$ نمایش می‌دهیم و تعریف می‌کنیم:

$$u(x)=\begin{cases}1 & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

با تعریف فوق برای مثال قبل می‌توانیم بنویسیم:

$$\boxed{f(x)=\begin{cases}e^{-ax} & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}=u(x)e^{-ax}}$$

$$F(f)=\frac{1}{a+i\alpha}\quad\therefore\quad F(u(x)e^{-ax})=\frac{1}{a+i\alpha}.$$

مثال: فرض کنید a عدد حقیقی مثبت باشد. تبدیل فوریه تابع $f(x)=e^{-a|x|}$ را بیابید.

$$F(f)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\alpha t}\,dt\qquad e^{-a|x|}=\begin{cases}e^{-ax} & x\geq 0\\ e^{ax} & x<0\end{cases}$$

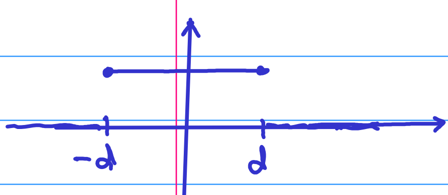
$$=\int_{-\infty}^{0}e^{at}e^{-i\alpha t}\,dt+\int_{0}^{\infty}e^{-at}e^{-i\alpha t}\,dt$$

$$=\int_{-\infty}^{0}e^{-(i\alpha-a)t}\,dt+\int_{0}^{\infty}e^{-(a+i\alpha)t}\,dt$$

$$=-\frac{1}{i\alpha-a}e^{-(i\alpha-a)t}\Big]_{-\infty}^{0}+\frac{-1}{a+i\alpha}e^{-(a+i\alpha)t}\Big]_{0}^{\infty}$$

$$=\frac{-1}{i\alpha-a}+\frac{1}{a+i\alpha}=\frac{-a-i\alpha+i\alpha-a}{(i\alpha)^2-a^2}$$

$$=\frac{-2a}{-\alpha^2-a^2}=\frac{2a}{a^2+\alpha^2}\quad\therefore\quad\boxed{F(e^{-a|x|})=\frac{2a}{a^2+\alpha^2}}$$



$$P_d(x)=\begin{cases}1, & |x|\leq d\\ 0, & |x|>d\end{cases}$$

مثال: تبدیل فوریه تابع روبرو را بیابید

$$F(P_d(t))=\int_{-\infty}^{\infty}P_d(t)e^{-i\alpha t}\,dt=\int_{-d}^{d}e^{-i\alpha t}\,dt=\frac{-1}{i\alpha}e^{-i\alpha t}\Big]_{-d}^{d}$$

$$=-\frac{1}{i\alpha}\left(e^{-i\alpha d}-e^{+i\alpha d}\right)\qquad e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$$

$$=-\frac{1}{i\alpha}\left(\cancel{\cos\alpha d}-i\sin\alpha d-\cancel{\cos\alpha d}-i\sin\alpha d\right)=\frac{2}{\alpha}\sin(\alpha d)$$

خواص تبدیل فوریه:

۱- مشتق زمان: اگر تابع f مشتق پذیر باشد و $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ آنگاه:

$$F(f'(x)) = i\alpha F(f(x)) = i\alpha F(\alpha)$$

مثال: تبدیل فوریه تابع

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\infty < x < -1 \\ 1+x & -1 \leq x \leq 0 \\ 1-x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & 1 \leq x < \infty \end{cases}$$

را با استفاده از خاصیت مشتق بیابید.

حل: ابتدا $f'(x)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & -\infty < x < -1 \\ 1 & -1 < x < 0 \\ -1 & 0 < x < 1 \\ 0 & 1 < x < \infty \end{cases}$$

$$F(f') = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t) e^{-i\alpha t} dt = \int_{-1}^{0} e^{-i\alpha t} dt + \int_{0}^{1} -e^{-i\alpha t} dt$$

$$= -\frac{1}{i\alpha} e^{-i\alpha t}\Big]_{-1}^{0} + \frac{1}{i\alpha} e^{-i\alpha t}\Big]_{0}^{1}$$

$$= -\frac{1}{i\alpha}(1 - e^{i\alpha}) + \frac{1}{i\alpha}(e^{-i\alpha} - 1)$$

$$= \frac{-1}{i\alpha}(-e^{i\alpha} - e^{-i\alpha} + 2) = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha} - 2}{i\alpha}$$

$$F(f') = i\alpha F(f) \implies F(f) = \frac{F(f')}{i\alpha}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} &= \cos\theta \\ \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} &= \sin\theta \end{aligned}}$$

$$\implies F(f) = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha} - 2}{(i\alpha)^2} = \frac{2 - (e^{i\alpha} + e^{-i\alpha})}{\alpha^2}$$

$$\therefore F(f(x)) = \frac{2(1 - \cos\alpha)}{\alpha^2}$$

۲- انتگرال: اگر $F(f(x)) = F(\alpha)$, $F(0) = 0$ آنگاه:

$$F\left(\int_{-\infty}^{x} f(t) dt\right) = \frac{1}{i\alpha} F(\alpha)$$

مثال: فرض کنید T عدد حقیقی مثبت باشد. تبدیل فوریه تابع روبرو را بیابید.

$$f(x)=\begin{cases} \frac{A}{T} & -T\leqslant x<0 \\ -\frac{A}{T} & 0<x<T \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

با استفاده از تبدیل فوریه تابع روبرو را نیز حساب کنید

$$g(x)=\begin{cases} \frac{A}{T}x+A & -T<x<0 \\ -\frac{A}{T}x+A & 0<x<T \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$

حل:
$$F(f(x))=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\alpha t}dt=\int_{-T}^{0}\frac{A}{T}e^{-i\alpha t}dt+\int_{0}^{T}-\frac{A}{T}e^{-i\alpha t}dt$$

$$=\frac{A}{T}\,\frac{-1}{i\alpha}\,e^{-i\alpha t}\Big]_{-T}^{0}-\frac{A}{T}\,\frac{-1}{i\alpha}\,e^{-i\alpha t}\Big]_{0}^{T}$$

$$=-\frac{A}{i\alpha T}(1-e^{i\alpha T})+\frac{A}{i\alpha T}(e^{-i\alpha T}-1)$$

$$=\frac{A}{i\alpha T}(-2+e^{i\alpha T}+e^{-i\alpha T})=\frac{A}{i\alpha T}(-2+2\cos\alpha T)$$

$$=\frac{-2A}{i\alpha T}(1-\cos\alpha T)$$

چون تابع g انتگرال تابع f است پس
$$F(g)=\frac{1}{i\alpha}F(f)$$

$$F(g(x))=\left(\frac{1}{i\alpha}\right)\left(-\frac{2A}{i\alpha T}\right)(1-\cos\alpha T)$$

$$=\frac{2A}{\alpha^2T}(1-\cos\alpha T)$$

۳- تقارن: اگر $F(f(x))=F(\alpha)$ آنگاه $F(F(x))=2\pi f(-\alpha)$

مثال: فرض کنید $a\in R>0$. تبدیل فوریه تابع $\frac{1}{a^2+x^2}$ را بیابید.

حل: دیدیم که
$$F(\underbrace{e^{-a|x|}}_{f})=\frac{2a}{a^2+\alpha^2}=F(\alpha)$$

حال
$$\frac{1}{2a}F\left(\frac{2a}{a^2+x^2}\right)=\frac{2\pi}{2a}f(-\alpha)=\frac{2\pi}{2a}e^{-a|-\alpha|}=\frac{2\pi}{2a}e^{-a|\alpha|}$$

$$\therefore\ \boxed{F\left(\frac{1}{a^2+x^2}\right)=\frac{\pi}{a}e^{-a|\alpha|}}$$

مثال: تبدیل فوریه تابع $\frac{x}{(x^2+1)^2}$ را بیابید.

$$\left(\frac{1}{1+x^2}\right)' = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

$$F(f') = i\alpha F(f) \Longrightarrow \frac{1}{-2} F\left(\frac{-2x}{(x^2+1)^2}\right) = i\alpha F\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$$

می‌دانیم $F(\underbrace{e^{-a|x|}}) = \frac{2a}{a^2+\alpha^2}$

$$\frac{1}{2} F\left(\frac{2}{1+x^2}\right) = \frac{2\pi}{2} f(-\alpha)$$

پس:

$$= \frac{2\pi}{2} e^{-|-\alpha|} = \frac{2\pi}{2} e^{-|\alpha|} = \pi e^{-|\alpha|}$$

$$\Longrightarrow -\frac{1}{2} F\left(\frac{-2x}{(x^2+1)^2}\right) = i\alpha F\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = i\alpha\pi e^{-|\alpha|}$$

$$\Longrightarrow F\left(\frac{x}{(x^2+1)^2}\right) = -\frac{1}{2} i\alpha\pi e^{-|\alpha|} = \frac{-i\alpha\pi}{2} e^{-|\alpha|}$$

بسمه تعالی

ریاضی مهندسی

یادآوری

تبدیل فوریه

$$F(f(x)) = F(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\alpha t}\, dt$$

$$f(x) = \begin{cases} e^{-ax} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \Longrightarrow F(f) = \frac{1}{a + i\alpha}$$

$$f(x) = e^{-a|x|} \longrightarrow F(f) = \frac{2a}{a^2 + \alpha^2} \qquad (\times)$$

$$P_d(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq d \\ 0 & |x| > d \end{cases} \Longrightarrow F(f) = \frac{2}{\alpha} \sin(\alpha d)$$

خواص تبدیل فوریه:

$$F(f^{(n)}) = (i\alpha)^n F(f)$$

۱- مشتق زمان: اگر f مشتق پذیر و $\lim_{|x| \to \infty} f(x) = 0$ آنگاه $F(f') = i\alpha F(f) = i\alpha F(\alpha)$

۲- انتگرال: اگر $F(f(x)) = F(\alpha)$ ، $F(0) = 0$ آنگاه $F\left(\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt\right) = \frac{1}{i\alpha} F(\alpha)$

۳- تقارن: اگر $F(f(x)) = F(\alpha)$ آنگاه $F(F(x)) = 2\pi f(-\alpha)$

$$(\times) \longrightarrow F\left(\frac{1}{a^2 + x^2}\right) = \frac{\pi}{a} e^{-a|\alpha|}$$

مثال: تبدیل فوریه تابع $\boxed{\dfrac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}}$ را بیابید.

$$\frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+4} = \frac{(Ax+B)(x^2+4) + (Cx+D)(x^2+1)}{(x^2+1)(x^2+4)}$$

$$= \frac{(A+C)x^3 + (B+D)x^2 + (4A+C)x + 4B+D}{(x^2+1)(x^2+4)}$$

$A + C = 0 \Longrightarrow \boxed{A = -C}$

$B + D = 0 \Longrightarrow \boxed{B = -D}$

$4B + D = 1 \Longrightarrow 3B = 1 \Longrightarrow \boxed{B = \frac{1}{3}}$ $\boxed{D = -\frac{1}{3}}$ $4A + C = 0 \Longrightarrow \boxed{C = 0}$ $\boxed{A = 0}$

$$F\left(\frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}\right) = F\left(\frac{\frac{1}{3}}{x^2+1} + \frac{-\frac{1}{3}}{x^2+4}\right)$$

$$= \frac{1}{3} F\left(\frac{1}{x^2+1}\right) - \frac{1}{3} F\left(\frac{1}{x^2+4}\right)$$

$$= \frac{1}{3} \frac{\pi}{1} e^{-|\alpha|} - \frac{1}{3} \frac{\pi}{2} e^{-2|\alpha|}$$

$$= \frac{\pi}{3} e^{-|\alpha|} - \frac{\pi}{6} e^{-2|\alpha|}$$

۴- انتقال زمان اگر a عددی ثابت باشد آنگاه

$$F(f(x-a)) = e^{-ia\alpha} F(f(x))$$

مثال: تبدیل فوریه تابع $\dfrac{1}{x^2+2x+2}$ را بیابید.

$$\frac{1}{x^2+2x+2} = \frac{1}{x^2+2x+1+1} = \frac{1}{(x+1)^2+1}$$

$$F\left(\frac{1}{(x+1)^2+1}\right) \overset{a=-1}{=} e^{-i\alpha} F\left(\frac{1}{x^2+1}\right) = e^{-i\alpha} \frac{\pi}{1} e^{|\alpha|} = \pi e^{-i\alpha+|\alpha|}$$

مثال: تبدیل فوریه معکوس تابع $\dfrac{e^{-2i\alpha}}{3+i\alpha}$ را بیابید.

$$F^{-1}\left(\frac{e^{-2i\alpha}}{3+i\alpha}\right) = F^{-1}\left(\frac{1}{3+i\alpha}\right)\Bigg|_{x \to x-2}$$

$$= \begin{cases} e^{-3x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}\Bigg|_{x \to x-2}$$

$$= \begin{cases} e^{-3(x-2)} & x-2 \geq 0 \\ 0 & x-2 < 0 \end{cases} = \begin{cases} e^{-3(x-2)} & x \geq 2 \\ 0 & x < 2 \end{cases}$$

د - انتقال فرکانس: فرض کنید a عددی ثابت باشد. اگر $F(f(x))=F(\alpha)$ آنگاه

$$F^{-1}(F(\alpha-a))=e^{iax}f(x) \Leftarrow F(e^{iax}f(x)) = F(\alpha-a)$$

مثال: فرض کنید $F(f(x))=F(\alpha)$. نشان دهید: $F(\cos ax\, f(x))=\frac{1}{2}F(\alpha-a)+\frac{1}{2}F(\alpha+a)$

حل:
$$\sin ax=\frac{e^{iax}-e^{-iax}}{2i}, \quad \cos ax=\frac{e^{iax}+e^{-iax}}{2}$$

$$F(\cos ax\, f(x))=F\left(\frac{e^{iax}+e^{-iax}}{2}f(x)\right)$$

$$=\frac{1}{2}F(e^{iax}f(x))+\frac{1}{2}F(e^{-iax}f(x))$$

$$=\frac{1}{2}F(\alpha-a)+\frac{1}{2}F(\alpha+a).$$

مثال: فرض کنید a و b اعداد حقیقی مثبت هستند. تبدیل فوریه تابع $e^{-a|x|}\sin bx$ را بیابید.

حل:
$$\sin bx=\frac{e^{ibx}-e^{-ibx}}{2i}$$

$$F(e^{-a|x|}\sin bx)=F\left(e^{-a|x|}\frac{e^{ibx}-e^{-ibx}}{2i}\right)$$

$$=\frac{1}{2i}F(e^{ibx}e^{-a|x|})-\frac{1}{2i}F(e^{-ibx}e^{-a|x|})$$

$$=\frac{1}{2i}F(e^{-a|x|})\Big|_{\alpha\to\alpha-b}-\frac{1}{2i}F(e^{-a|x|})\Big|_{\alpha\to\alpha+b}$$

$$F(e^{-a|x|})=\frac{2a}{a^2+\alpha^2}$$

$$\therefore =\frac{1}{2i}\,\frac{2a}{a^2+(\alpha-b)^2}-\frac{1}{2i}\,\frac{2a}{a^2+(\alpha+b)^2}$$

مثال: تبدیل فوریه معکوس تابع $\frac{1}{\alpha^2+\alpha+1}$ $\Delta<0$ را بیابید.

$$\frac{1}{\alpha^2+\alpha+1} = \frac{1}{\alpha^2+\alpha+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = \frac{1}{(\alpha+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$$

$$F^{-1}\left(\frac{1}{(\alpha+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\right) = e^{-i\frac{1}{2}x}\, F^{-1}\left(\frac{1}{\alpha^2+\frac{3}{4}}\right)$$

$$= \frac{e^{-\frac{ix}{2}}}{\sqrt{3}}\, F^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{\alpha^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}\right) \qquad F(e^{-a|x|}) = \frac{2a}{a^2+\alpha^2}$$

$$a=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{e^{-\frac{ix}{2}}}{\sqrt{3}}\, e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}|x|}$$

۶- مشتق فرکانس: اگر $F(f(x)) = F(\alpha)$ آنگاه $F(xf(x)) = i\frac{d}{d\alpha}F(\alpha)$

به صورت مشابه: $\longrightarrow F(x^n f(x)) = i^n \frac{d^n}{d\alpha^n} F(\alpha)$

مثال: فرض کنید a و b اعداد حقیقی باشند و $a<0$. اگر $k\geq 0$ عدد صحیح باشد آنگاه تبدیل فوریه تابع روبرو را بیابید

$$u(x) = \begin{cases} 1 & x\geq 0 \\ 0 & x<0 \end{cases} \qquad g(x) = x^k \underbrace{e^{(a+ib)x}\, u(x)}_{f}$$

$$F(f(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\alpha t}\, dt = \int_0^{\infty} e^{(a+ib)t}\, e^{-i\alpha t}\, dt$$

$$= \int_0^{\infty} e^{(a+i(b-\alpha))t}\, dt = \frac{1}{a+i(b-\alpha)}\, e^{a+i(b-\alpha)t}\Big]_0^{\infty}$$

$$= \frac{-1}{a+i(b-\alpha)}, \qquad F(g(x)) = i^k \frac{d^k}{d\alpha^k} F(f)$$

$$\Longrightarrow F(g(x)) = i^k \frac{d^k}{d\alpha^k}\left(\frac{-1}{a+i(b-\alpha)}\right)$$

انتگرال تلفیقی (پیچش یا کانولوشن)

برای توابع f و g کانولوشن آن‌ها را با نماد $f*g$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f*g=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,g(z-t)\,dt$$

مثلاً اگر $f(x)=x$ و $g(x)=x$ حاصل $f*g$ را بیابید.

$$x*x=\int_{-\infty}^{\infty} t(z-t)\,dt=\int_{-\infty}^{\infty} tz\,dt-\int_{-\infty}^{\infty} t^2\,dt$$

$$=\frac{t^2}{2}z-\frac{t^3}{3}\Big]_{-\infty}^{\infty}$$

می‌توان نشان داد $f*g=g*f$ و $f*0=0*f=0$

برای تبدیل فوریه $F(f.g)\neq F(f).F(g)$ اما این خاصیت برای کانولوشن برقرار است.

۷- کانولوشن زمان: $F(f*g)=F(f).F(g)$

۸- کانولوشن فرکانس: اگر $F(f(x))=F(\alpha)$ و $F(g(x))=G(\alpha)$ آنگاه داریم:

$$F(f(x).g(x))=\frac{1}{2\pi}F(\alpha)*G(\alpha)$$

بسمه تعالی

ریاضی مهندسی

$$f*g=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,g(z-t)\,dt$$

$$=\int_{0}^{x} f(t)\,g(z-x)\,dt = f*g$$

خاصیت ۷: همگردش زمان

$$F(f*g)=F(f).F(g)$$

$$F^{-1}(F(f).F(g))=f*g=F^{-1}(F(f))*F^{-1}(F(g))$$

خاصیت ۸: همگردش فرکانس

$$:F(g)=G(\alpha),\ F(f)=F(\alpha)$$

$$F(fg)=\frac{1}{2\pi}F(\alpha)*G(\alpha)$$

مثال: تبدیل فوریه معکوس تابع

$$F(\alpha)=\frac{1}{6+5i\alpha-\alpha^2}$$

حل:

$$-\alpha^2=i^2\alpha^2 \qquad \boxed{i^2=-1}$$

$$F(\alpha)=\frac{1}{6+5i\alpha+i^2\alpha^2}=\frac{1}{(2+i\alpha)(3+i\alpha)}$$

$$=\frac{1}{2+i\alpha}\cdot\frac{1}{3+i\alpha} \qquad \boxed{F(e^{-ax}u(x))=\frac{1}{a+i\alpha}}$$

$$\Longrightarrow \left[e^{-2x}u(x)\right]*\left[e^{-3x}u(x)\right]$$

$$u(x)=\begin{cases}1 & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

برای $x\geq 0$ داریم:

$$e^{-2x}u(x)*e^{-3x}u(x)=e^{-2x}*e^{-3x}$$

$$\Longrightarrow \underbrace{e^{-2x}}_{f}*\underbrace{e^{-3x}}_{g}=\int_0^x f(t)\,g(z-t)\,dt$$

$$=\int_0^x e^{-2t}e^{-3(z-t)}\,dt$$

$$=\int_0^x e^{-2t}e^{-3z}e^{3t}\,dt$$

$$=e^{-3z}\int_0^x e^{t}\,dt=e^{-3z}(e^{x}-1)=e^{-3x}(e^{x}-1)$$

$$=e^{-2x}-e^{-3x} \qquad x\geq 0$$

$$\frac{1}{(2+i\alpha)(3+i\alpha)} = \frac{A}{2+i\alpha} + \frac{B}{3+i\alpha} = \frac{3A + i\alpha A + 2B + iB\alpha}{(2+i\alpha)(3+i\alpha)}$$

$$= \frac{3A+2B+\alpha i(A+B)}{(2+i\alpha)(3+i\alpha)} \qquad \begin{cases} A+B=0 \Rightarrow \boxed{A=-B} \\ 3A+2B=1 \quad \boxed{B=-1},\ \boxed{A=1} \end{cases}$$

$$F^{-1}\left(\frac{1}{(2+i\alpha)(3+i\alpha)}\right) = F^{-1}\left(\frac{1}{2+i\alpha}\right) - F^{-1}\left(\frac{1}{3+i\alpha}\right)$$

$$= e^{-2x}u(x) - e^{-3x}u(x)$$

$$= (e^{-2x} - e^{-3x})u(x)$$

مثال: تمرین ۸ قسمت (ح) تبدیل فوریه توابع زیر را بیابید.

(ح) $\dfrac{x e^{-iax}}{(x^2+1)(x^2+4)} \leftarrow F(e^{-iax}f(x)) = F(f)\big|_{\alpha \to \alpha+a}$

$$F\left(\frac{x}{(x^2+1)(x^2+4)}\right)\Big|_{\alpha \to \alpha+a}$$

$$\frac{x}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+4}$$

$$\frac{Ax^3+Bx^2+4Ax+4B+Cx^3+Cx+Dx^2+D}{(x^2+1)(x^2+4)} \qquad \begin{cases} A+C=0 \Rightarrow \boxed{A=-C} \\ B+D=0 \quad \boxed{B=-D} \Rightarrow \\ 4B+D=0 \\ 4A+C=1 \Rightarrow A=\frac{1}{3},\ C=-\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$F\left(\frac{\frac{1}{3}x}{x^2+1}\right) - F\left(\frac{\frac{1}{3}x}{x^2+4}\right) = \boxed{\frac{1}{3}F\left(\frac{x}{x^2+1}\right)} - \boxed{\frac{1}{3}F\left(\frac{x}{x^2+4}\right)} \quad (*)$$

$$\boxed{F\left(\frac{x}{x^2+a^2}\right) = -\frac{i\pi\alpha}{|\alpha|}e^{-a|\alpha|}}$$

$$\boxed{F\left(\frac{1}{x^2+a^2}\right) = \frac{\pi}{a}e^{-a|\alpha|}} \Rightarrow F(xf(x)) = i\frac{d}{d\alpha}(F(\alpha))$$

$$\Longrightarrow F\left(\frac{x}{x^2+a^2}\right) = i\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{\pi}{a} e^{-a|\alpha|}\right)$$

$$= i\frac{\pi}{a}\left(-a\frac{\alpha}{|\alpha|} e^{-a|\alpha|}\right) \qquad (|\alpha|)' = \frac{\alpha}{|\alpha|}$$

$$= -\frac{i\pi\alpha}{|\alpha|} e^{-a|\alpha|} \qquad F\left(\frac{x}{x^2+a^2}\right) = -\frac{i\pi\alpha}{|\alpha|} e^{-a|\alpha|}$$

$$\circledast = \frac{-1}{3}\frac{i\pi\alpha}{|\alpha|} e^{-|\alpha|} + \frac{1}{3}\frac{i\pi\alpha}{|\alpha|} e^{-2|\alpha|}$$

$$\therefore F\left(\frac{x e^{-iax}}{(x^2+1)(x^2+4)}\right) = \frac{i\pi(\alpha+a)}{3|\alpha+a|}\left(e^{-2|\alpha+a|} - e^{-|\alpha+a|}\right)$$

(ج) $$\frac{x e^{-aix}}{(x^2+4)^2(x^2+9)} = e^{-axi}\cdot\frac{x}{(x^2+4)^2(x^2+9)}$$

$$\overset{\circledast}{=} F\left(\frac{x}{(x^2+4)^2(x^2+9)}\right)\Bigg|_{\alpha\to\alpha+a}$$

$$\frac{x}{(x^2+4)^2(x^2+9)} = \frac{Ax+B}{x^2+4} + \frac{Cx+D}{(x^2+4)^2} + \frac{Ex+F}{x^2+9}$$

$$\frac{(Ax+B)(x^2+4)(x^2+9) + (Cx+D)(x^2+9) + (Ex+F)(x^2+4)^2}{(x^2+4)^2(x^2+9)}$$

$$= \frac{(Ax+B)(x^4+13x^2+36) + Cx^3+9Cx+Dx^2+9D + (Ex+F)(x^4+8x^2+16)}{(x^2+4)^2(x^2+9)}$$

$$= Ax^5+13Ax^3+36Ax+Bx^4+13Bx^2+36B+Cx^3+9Cx+Dx^2+9D+ \begin{matrix}Ex^5+8Ex^3+16Ex\\ +Fx^4+8Fx^2\\ +16F\end{matrix}$$

$$= \begin{cases} A+E=0 \Longrightarrow \boxed{A=-E}\ ① & 13B+D+8F=0\ ② \\ B+F=0 \Longrightarrow \boxed{B=-F} & 36A+9C+16E=1\ ③ \\ ①\ 13A+C+8E=0 & 36B+9D+16F=0\ ④ \end{cases}$$

$$① \to \quad ۱۳A + C - ۸E = ۰ \Rightarrow ۵E + C = ۰ \Rightarrow \boxed{۵E = -C} \; ④$$

$$② \to \quad ۱۳B + D - ۸B = ۰ \Rightarrow ۵B + D = ۰ \Rightarrow \boxed{۵B = -D}$$

$$③ \to \quad ۳۶A + ۹C - ۱۶E = ۱ \Rightarrow \boxed{۲۰A + ۹C = ۱} \; ⑧ \qquad ⓪,④ \to \boxed{C = ۵A} \; ⑦$$

$$④ \to \quad ۳۶B - ۴۵B - ۱۶B = ۰ \Rightarrow \boxed{B = ۰} \Rightarrow \boxed{D = ۰} \qquad \boxed{F = ۰}$$

$$⑦,⑧ \to \quad ۲۰A + ۴۵A = ۱ \Rightarrow \boxed{A = \frac{۱}{۶۵}} \quad \boxed{C = \frac{۱}{۱۳}} \quad \boxed{E = \frac{-۱}{۶۵}}$$

$$F\left(\frac{x}{(x^۲+۴)^۲(x^۲+۹)}\right) = F\left(\frac{\frac{۱}{۶۵}x}{x^۲+۴}\right) + F\left(\frac{\frac{۱}{۱۳}x}{(x^۲+۴)^۲}\right) - F\left(\frac{\frac{۱}{۶۵}x}{x^۲+۹}\right)$$

$$= \frac{۱}{۶۵} F\left(\frac{x}{x^۲+۴}\right) + \frac{۱}{۱۳} F\left(\frac{x}{(x^۲+۴)^۲}\right) - \frac{۱}{۶۵} F\left(\frac{x}{x^۲+۹}\right)$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$-\frac{i\pi\alpha}{|\alpha|} e^{-۲|\alpha|} \qquad\qquad \frac{-i\pi\alpha}{|\alpha|} e^{-۳|\alpha|}$$

$$F\left(\frac{x}{(x^۲+۴)^۲}\right)$$

$$F\Big(\underbrace{\frac{۱}{x^۲+a^۲}}_{f}\Big) = \frac{\pi}{a} e^{-a|\alpha|}$$

$$f' = \frac{-۲x}{(x^۲+a^۲)^۲} = -۲\frac{x}{(x^۲+a^۲)^۲}$$

$$F\left(\frac{x}{(x^۲+a^۲)^۲}\right) = \frac{-۱}{۲} i\alpha F(f) = -\frac{۱}{۲} i\alpha \frac{\pi}{a} e^{-a|\alpha|} = \frac{-\pi i\alpha}{۲a} e^{-a|\alpha|}$$

$$F(\ast) = \frac{-1}{\text{۴۵}}\,\frac{i\text{۹}\alpha}{|\alpha|}\,e^{-\text{۲}|\alpha|} - \frac{\pi i\alpha}{\text{۲}a}\,e^{-a|\alpha|} + \frac{1}{\text{۴۵}}\,\frac{\pi i\alpha}{|\alpha|}\,e^{-\text{۳}|\alpha|}$$

$$F(\text{جول}) = \Big|_{\alpha \longrightarrow \alpha + a}$$

به نام خدا

جلسه اول دروس مجازی

دستور ساروس برای محاسبه دترمینان ماتریس،

ماتریس ۳×۳ زیر را در نظر بگیرید،

$$A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

در این صورت دترمینان آن برابر است با:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{array}\right|$$

$$\det(A)=aei+bfg+cdh-(ceg+afh+bdi)$$

برای مثال دترمینان ماتریس زیر را حساب می کنیم

$$\begin{array}{ccccc} 4 & 6 & 0 & 10 & 0 \quad 24 \end{array}$$

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} -2 & -3 & 5 & -2 & -3 \\ 4 & 1 & -1 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right|$$

$$\det(A)=(4+6+0)-(10+0+24)=-24$$

ماتریس های معین (نیمه معین) مثبت (منفی)

ابتدا دترمینان های اصلی یک ماتریس را تعریف می کنیم. برای ماتریس ۳×۳ زیر

$$A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$ دترمینان های اصلی را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$|A_1|=a \quad , \quad |A_2|=\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \quad , \quad |A_3|=\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

توجه داریم که دترمینان ماتریس A و A^T برابر است.

مثلاً برای مثال قبل به ماتریس $A = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 5 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ دترمینان های اصلی به صورت زیر است ؛

$$|A_1| = -2 \quad , \quad |A_2| = \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -2+12=10$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} -2 & -3 & 5 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -24$$

اکنون ماتریس متقارن A را معین مثبت گوییم هرگاه تمامی دترمینان های اصلی ماتریس A مثبت باشند و آن را معین منفی گوییم هرگاه دترمینان های اصلی یکی در میان مثبت و منفی باشد. یعنی در حالت اخیر علامت دترمینان های اصلی متناوب و اولین آن ها منفی است.

اگر علامت دترمینان های اصلی ماتریس یکی از دو حالت فوق نباشد ماتریس را نامعین گوییم

مثلاً ماتریس مثال قبل معین منفی است زیرا :

$$|A_1| = -2 < 0 \quad , \quad |A_2| = 10 > 0 \quad , \quad |A_3| = -24 < 0 .$$

اعمال سطری - مقدماتی :

اعمال سطری - مقدماتی اعمالی هستند که به کمک آن ها می توان ماتریس اصلی را به یک ماتریس دیگر تبدیل کرد که ساختار ماتریس حاصل بسیار شبیه ماتریس اصلی است. ماتریس حاصل شده جدید را ماتریس هم ارز ماتریس اولیه می نامیم. اعمال سطری - مقدماتی به صورت زیر تعریف می شوند.

۱- جابه جایی دو سطر

۲- سطری را در عدد دلخواه ناصفر ضرب کنیم.

۳- k برابر سطری را با k برابر سطری دیگر جمع کنیم.

مشابه اعمال سطری فوق می توان اعمال ستونی را تعریف کرد.

هدف از اعمال سطری - مقدماتی تبدیل ماتریس اصلی به یک ماتریس بالا یا پایین مثلثی است. البته ممکن است تحت شرایطی نیاز است که ماتریس اصلی به یک ماتریس قطری تبدیل شود.

مثال: می‌خواهیم ماتریس زیر را به یک ماتریس بالا مثلثی تبدیل کنیم.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

هدف داریم ابتدا باید درایه ۱- صفر شود

سپس درایه ۲ صفر شود

$$\xrightarrow{R_1+R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

سطر اول را با سطر دوم جمع می‌کنیم و در سطر دوم می‌نویسیم این کار را با R_1+R_2 نمایش می‌دهیم.

$$\xrightarrow{-2R_1+R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

سطر اول را در (۲-) ضرب می‌کنیم و با سطر سوم جمع می‌کنیم و در سطر سوم می‌نویسیم این کار را با $-2R_1+R_2$ نمایش می‌دهیم.

اکنون به یک ماتریس بالا مثلثی رسیده‌ایم. اکنون می‌خواهیم ماتریس زیر را با اعمال سطری - مقدماتی ساده کنیم.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2R_1+R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-R_1+R_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

رتبه ماتریس (Rank)

برای ماتریس $m \times n$ دلخواه A رتبه را با نماد $Rank(A)$ نمایش می‌دهیم و تعریف می‌کنیم

تعداد سطرهای ناصفر پس از اعمال سطری - مقدماتی ماتریس.

تعریف فوق یعنی آنقدر ماتریس را توسط اعمال سطری - مقدماتی ساده می‌کنیم که دیگر ساده‌تر نشود در این صورت تعداد سطرهای ناصفر ماتریس را رتبه ماتریس می‌گوییم.

مثلاً در مثال قبل دیدیم که اعمال سطری به صورت زیر حاصل شد:

$$A = \begin{bmatrix} +1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

پس رتبه ماتریس ۳ است چون تعداد سطرهای ناصفر برابر با ۳ است پس $Rank(A) = 3$

و رتبه ماتریس

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

برابر با ۳ شد. چون در مثال قبل دیدیم، تعداد سطرهای ناصفر برابر با ۳ شد پس $Rank(B) = 3$

ویژگی‌های رتبه ماتریس:

۱- اگر A ماتریسی $m \times n$ باشد آنگاه $Rank(A) \leq \min\{m, n\}$

۲- $Rank(I_n) = n$

۳- اگر دترمینان ماتریس ناصفر باشد آنگاه $Rank(A) = n$ (A، $n \times n$ است).

بسمه تعالی

جلسه دوم دروس مجازی

معکوس ماتریس

ماتریس مربعی $n\times n$ ، A را در نظر بگیرید . ماتریس $n\times n$ ، B را معکوس ماتریس A گوییم هرگاه داشته باشیم :

$$A\times B=I_n=B\times A$$

در این صورت B را با نماد A^{-1} نمایش می‌دهیم . همچنین A نیز معکوس B هست .

برای وجود ماتریس معکوس حکم زیر را داریم .

ماتریس مربعی A معکوس دارد اگر و فقط اگر $\det(A)\neq 0$.

ماتریس معکوس پذیر را گاهی نا منفرد نیز گوییم و ماتریس معکوس ناپذیر را منفرد گوییم .

روش های یافتن معکوس ماتریس

فرض کنید ماتریس A ، $n\times n$ و $\det(A)\neq 0$. پس ماتریس A معکوس پذیر است . برای یافتن معکوس ماتریس روش های ۱) حذفی گاوس ۲) با استفاده از ماتریس الحاقی

۱) روش گاوس : در این روش ماتریس افزوده را تشکیل می دهیم . یعنی ماتریس اصلی را نوشته و ماتریس همانی هم بعد آن را سمت راست آن می نویسیم . سپس با استفاده اعمال سطری - مقدماتی ماتریس اصلی را به ماتریس همانی تبدیل می‌کنیم . همان اعمال را روی ماتریس همانی سمت راست انجام می دهیم . ماتریس حاصل سمت راست همان ماتریس معکوس است .

مثال: معکوس ماتریس زیر را بیابید.

$$A=\begin{bmatrix}1&3&3\\1&4&3\\1&3&4\end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&3&3&1&0&0\\1&4&3&0&1&0\\1&3&4&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{-R_1+R_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&3&3&1&0&0\\0&1&0&-1&1&0\\1&3&4&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-R_1+R_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&3&3&1&0&0\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&+1&-1&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{-3R_3+R_1}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&3&0&4&0&-3\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&1&-1&0&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-3R_2+R_1}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&7&-3&-3\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&1&-1&0&1\end{array}\right]\Rightarrow A^{-1}=\begin{bmatrix}7&-3&-3\\-1&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}$$

ماتریس همانی I_3

مثال: معکوس ماتریس زیر را بیابید.

$$B=\begin{bmatrix}1&0&2\\2&1&0\\3&2&1\end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&1&0&0\\2&1&0&0&1&0\\3&2&1&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{-2R_1+R_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&1&0&0\\0&1&-4&-2&1&0\\3&2&1&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-3R_1+R_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&1&0&0\\0&1&-4&-2&1&0\\0&2&-5&-3&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{-2R_2+R_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&1&0&0\\0&1&-4&-2&1&0\\0&0&3&1&-2&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{3}R_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&1&0&0\\0&1&-4&-2&1&0\\0&0&1&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{array}\right]\xrightarrow{4R_3+R_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&1&0&0\\0&1&0&-\frac{2}{3}&-\frac{5}{3}&\frac{4}{3}\\0&0&1&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-2R_3+R_1}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{1}{3}&+\frac{4}{3}&-\frac{2}{3}\\0&1&0&-\frac{2}{3}&-\frac{5}{3}&\frac{4}{3}\\0&0&1&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{array}\right]\Rightarrow A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&+\frac{4}{3}&-\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}&-\frac{5}{3}&\frac{4}{3}\\\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

ماتریس همانی I_3

ماتریس الحاقی

ماتریس $A_{n\times n}$ را در نظر بگیرید، ترانهاده آن را $A^T=(a_{ji})$ را تشکیل دهید. اگر در A^T به جای هر عنصر a_{ji} همسازه آن را قرار دهیم، ماتریس جدیدی بدست می‌آید که آن را ماتریس الحاقی می‌نامیم و با نماد $\text{adj}(A)$ نمایش می‌دهیم. لذا داریم:

$$\text{adj}(A)=\left[(-1)^{j+i}|A_{ji}|\right]$$

مثال: ماتریس الحاقی $A=\begin{bmatrix}1&0&2\\2&1&0\\3&2&1\end{bmatrix}$ را بیابید.

$$A^T=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&2\\2&0&1\end{bmatrix} \Rightarrow \text{adj}(A)=\begin{bmatrix}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1&2\\0&1\end{vmatrix} & (-1)^{1+2}\begin{vmatrix}0&2\\2&1\end{vmatrix} & (-1)^{1+3}\begin{vmatrix}0&1\\2&0\end{vmatrix}\\ (-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2&3\\0&1\end{vmatrix} & (-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1&3\\2&1\end{vmatrix} & (-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1&2\\2&0\end{vmatrix}\\ (-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2&3\\1&2\end{vmatrix} & (-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1&3\\0&2\end{vmatrix} & (-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1&2\\0&1\end{vmatrix}\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{adj}(A)=\begin{bmatrix}1&4&-2\\-2&-5&4\\1&-2&1\end{bmatrix}$$

۲) یافتن معکوس ماتریس با استفاده از ماتریس الحاقی آن

برای یافتن معکوس ماتریس با استفاده از ماتریس الحاقی آن از فرمول زیر استفاده می‌کنیم.

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\,\text{adj}(A)$$

مثال: معکوس ماتریس $A=\begin{bmatrix}1&0&2\\2&1&0\\3&2&1\end{bmatrix}$ را بیابید.

از مثال قبل دیدیم که:

$$adj(A)=\begin{bmatrix}1&4&-2\\-2&-5&4\\1&-2&1\end{bmatrix}$$

و با بسط دادن روی سطر اول دترمینان را می‌یابیم.

$$\det(A)=3 \quad \Rightarrow \quad A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\,adj(A)=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&4&-2\\-2&-5&4\\1&-2&1\end{bmatrix}$$

$$\therefore\ A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&\frac{4}{3}&-\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}&-\frac{5}{3}&\frac{4}{3}\\\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

مثال: معکوس ماتریس $B=\begin{bmatrix}1&3&3\\1&4&3\\1&3&4\end{bmatrix}$ را بیابید.

$$B^{T}=\begin{bmatrix}1&1&1\\3&4&3\\3&3&4\end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad adj(B)=\begin{bmatrix}7&-3&-3\\-1&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}$$

$$\det(B)=1$$

با بسط دادن روی ستون اول دترمینان را می‌یابیم.

$$B^{-1}=\frac{1}{\det(B)}\,adj(B)=\begin{bmatrix}7&-3&-3\\-1&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}$$

بسمه تعالی

جلسه سوم دروس مجازی

دستگاه معادلات خطی:

دستگاه m معادله و n مجهولی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1$$

$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m$$

در این دستگاه a_{mn} ضرایب مجهول، x ها مجهول و b_m ها اعداد ثابت اند.

فرم ماتریسی دستگاه فوق را می توان به صورت $AX=B$ نوشت

که در آن

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

اگر $B=0$ باشد آنگاه دستگاه فوق را همگن و در غیر این صورت آن را ناهمگن گویند.

اگر دستگاهی دارای جواب باشد آن را سازگار می گویند، در صورتی که برای دستگاه جواب وجود نداشته باشد آن را ناسازگار گویند. هر دستگاه سازگار یا تنها یک دسته و یا بی نهایت دسته جواب دارد.

حل دستگاه معادلات خطی: در این بخش برای حل این نوع دستگاه ها سه روش معکوس ماتریس، حذفی گوس و کرامر را بیان می کنیم.

روش ماتریس معکوس: در دستگاه معادلات خطی $AX=B$ اگر A معکوس پذیر باشد (یا $\det(A)\neq 0$ باشد) آنگاه جواب معادلات خطی وجود دارد و برابر است با:

$$X = A^{-1}B$$

مثال: دستگاه معادلات خطی زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2-x_3=4 \\ x_1+3x_2+2x_3=7 \\ 2x_1-x_2+x_3=5 \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ +1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{X}=\underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}}_{B} \qquad X=A^{-1}B$$

پس باید A^{-1} را پیدا کنیم که برابر است با:

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{5}{28} & -\frac{1}{28} & \frac{7}{28} \\ \frac{3}{28} & \frac{5}{28} & -\frac{7}{28} \\ -\frac{7}{28} & \frac{7}{28} & \frac{7}{28} \end{bmatrix} \quad \text{که} \quad adj(A)=\begin{bmatrix} 5 & -1 & 7 \\ 3 & 5 & -7 \\ -7 & 7 & 7 \end{bmatrix}, \quad \det(A)=28$$

لذا جواب دستگاه معادلات برابر است با:

$$A^{-1}\times B=\begin{bmatrix} \frac{5}{28} & -\frac{1}{28} & \frac{7}{28} \\ \frac{3}{28} & \frac{5}{28} & -\frac{7}{28} \\ -\frac{7}{28} & \frac{7}{28} & \frac{7}{28} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{12}{7} \\ \frac{17}{7} \\ 2 \end{bmatrix}$$

در نتیجه، $x_1=\frac{12}{7}$ ، $x_2=\frac{17}{7}$ ، $x_3=2$ است.

روش گوس: در این روش ماتریس افزوده را تشکیل می‌دهیم. ماتریس افزوده شامل ماتریس A و بردار B است. در این صورت با اعمال سطری ماتریس افزوده را به یک ماتریس بالا مثلثی تبدیل می‌کنیم و سپس دستگاه را دوباره می‌نویسیم و جواب دستگاه حاصل خواهد شد.

مثال، دستگاه مثال قبل را به روش گوس حل کنید.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{3}R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ 1 & 3 & 2 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 5 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[-2R_1+R_3]{-R_1+R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & \frac{7}{3} & \frac{7}{3} & \frac{17}{3} \\ 0 & -\frac{7}{3} & \frac{5}{3} & \frac{7}{3} \end{array}\right] \xrightarrow{R_2+R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & \frac{7}{3} & \frac{7}{3} & \frac{17}{3} \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{array}\right]$$

اکنون دستگاه را دوباره می‌نویسیم:

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{7}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{17}{3} \\ 8 \end{bmatrix}$$

دستگاه را از آخر به اول حل می‌کنیم:

$$x_1 + \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 = \frac{4}{3} \Rightarrow x_1 = \frac{4}{3} - \frac{2}{7} + \frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{\frac{12}{7} = x_1}$$

$$\frac{7}{3}x_2 + \frac{7}{3}x_3 = \frac{17}{3} \Rightarrow \frac{7}{3}x_2 = \frac{17}{3} - \frac{14}{3} = \frac{3}{3} = 1 \Rightarrow \boxed{x_2 = \frac{3}{7}}$$

$$4x_3 = 8 \Rightarrow \boxed{x_3 = 2}$$

مثال: دستگاه زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ 2x + 5y - z = -4 \\ 3x - 2y - z = 5 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & -1 & -4 \\ 3 & -2 & -1 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow[-3R_1+R_3]{-2R_1+R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -10 \\ 0 & -8 & -4 & -4 \end{array}\right] \xrightarrow{8R_2+R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -10 \\ 0 & 0 & -28 & -84 \end{array}\right]$$

اکنون دستگاه را از آخر به اول می‌نویسیم:

$$-28 \quad = -84 \Rightarrow \boxed{z = 3}$$

$$y - 3z = -10 \xRightarrow{z=3} \boxed{y = -1}$$

$$x + 2y + z = 3 \xRightarrow[z=3]{y=-1} \boxed{x = 2}$$

مثال: دستگاه
$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+3y+kz=3 \\ x+ky+3z=2 \end{cases}$$

الف) بازای چه مقدار k، جواب منحصربه‌فرد دارد؟

ب) بازای چه مقدار k، جواب ندارد؟

ج) بازای چه مقدار k، بی‌شمار جواب دارد؟

حل: ماتریس افزوده را تشکیل می‌دهیم:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & k & 3 \\ 1 & k & 3 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[-R_1+R_3]{-2R_1+R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & k+2 & 1 \\ 0 & k-1 & 4 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-(k-1)R_2+R_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & k+2 & 1 \\ 0 & 0 & -(k+2)(k-1)+4 & 2-k \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & k+2 & 1 \\ 0 & 0 & -(k+3)(k-2) & 2-k \end{array}\right]$$

اکنون دستگاه را تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ y+(k+2)z=1 \\ -(k+3)(k-2)z=2-k \end{cases}$$

الف) دستگاه جواب منحصربه‌فرد دارد هرگاه ضریب z در معادله سوم، مخالف صفر باشد یعنی اگر $k\neq 2$ و $k\neq -3$، دستگاه جواب منحصربه‌فرد دارد.

ب) در حالت $k=-3$ معادله سوم به صورت $0z=5$ در می‌آید در این صورت دستگاه جواب ندارد.

ج) بازای $k=2$ معادله سوم به صورت $0z=0$ در می‌آید که در این حالت دستگاه به صورت زیر حاصل می‌شود که بی‌شمار جواب دارد.

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ y+4z=1 \end{cases}$$

Scanned with CamScanner

بسمه تعالی

جلسه چهارم دروس مجازی

نکته: اگر در یک دستگاه n معادله و n مجهول، دترمینان ضرایب دستگاه مخالف صفر باشد آنگاه دستگاه جواب منحصر به فرد دارد.

تمرین: به ازای کدام مقدار k، دستگاه زیر جواب منحصر به فرد دارد؟

$$\begin{cases} kx+y+z=1 \\ x+ky+z=1 \\ x+y+kz=1 \end{cases}$$

دستگاه های معادلات خطی همگن

فرم کلی این نوع دستگاه های معادلات به صورت زیر است:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{2}\ x_2+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0 \end{cases}$$

و فرم ماتریسی آن به صورت $AX=0$ خواهد بود.

برای دستگاه خطی کلی سه امکان وجود دارد: بدون جواب، یک جواب و یا بی نهایت جواب. وضع در دستگاه معادلات خطی همگن کمی ساده تر است. فقط دو امکان وجود دارد، جواب صفر تنها جواب است یا علاوه بر جواب صفر، بی نهایت جواب داریم. پس جواب صفر یعنی $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$ همواره جواب است.

مثال: دستگاه همگن زیر را حل کنید

$$\begin{cases} 2x_1+4x_2+6x_3=0 \\ 4x_1+5x_2+6x_3=0 \\ 3x_1+x_2-2x_3=0 \end{cases}$$

از روش حذفی گوس داریم:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{2}R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[-3R_1+R_3]{-4R_1+R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & -5 & -11 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{1}{3}R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & -11 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{5R_2+R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

اکنون دستگاه را از آخر به اول می‌نویسیم:

$$-x_3=0 \Rightarrow \boxed{x_3=0}$$

$$x_2+2x_3=0 \xRightarrow{x_3=0} \boxed{x_2=0} \quad , \quad x_1+2x_2+3x_3=0 \xRightarrow[x_3=0]{x_2=0} \boxed{x_1=0}$$

پس جواب $x_3=x_1=x_2=0$ است.

مثال: دستگاه همگن زیر را حل کنید

$$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=0 \\ 3x_1-3x_2+2x_3=0 \\ -x_1-11x_2+6x_3=0 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & 2 & 0 \\ -1 & -11 & 6 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[R_1+R_3]{-3R_1+R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -9 & 5 & 0 \\ 0 & -9 & 5 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{-R_2+R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -9 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

اکنون دستگاه را می‌نویسیم:

$$\begin{cases} -9x_2+5x_3=0 \\ x_1+2x_2-x_3=0 \end{cases}$$

چون تعداد مجهولات از تعداد معادلات بیشتر است لذا بی‌نهایت جواب داریم.

جواب به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$-9x_2+5x_3=0 \Rightarrow \boxed{x_2=\frac{5}{9}x_3}$$

$$x_1+2x_2-x_3=0 \Rightarrow \boxed{x_1=-\frac{1}{9}x_3}$$

پس جواب به صورت $\left(-\frac{1}{9}x_3, \frac{5}{9}x_3, x_3\right)$ خواهد بود. چون x_3 می‌تواند مقادیر بی‌نهایت اختیار شود لذا بی‌نهایت جواب داریم.

پس می‌توان نتیجه زیر را گرفت.

اگر در دستگاه معادلات خطی همگن پس از ساده‌سازی (اعمال سطری) تعداد مجهولات بیشتر از تعداد معادلات باشد دستگاه بی‌نهایت جواب دارد.

استقلال خطی:

آیا بین بردارهای $v_1=(1,2)^T$ و $v_2=(2,4)^T$ رابطه خاصی وجود دارد؟ البته می‌بینیم که $v_2=2v_1$.

همچنین چه چیز خاصی در مورد بردارهای $v_1=(1,2,3)^T$، $v_2=(-4,1,1)^T$ و $v_3=(-5,8,19)^T$ وجود دارد؟ پاسخ این سؤال از سؤال اول مشکل‌تر است اما مشخص می‌شود که $v_3=3v_1+2v_2$.

بنابراین روابط گوییم این بردارها وابسته خطی است. در حالت کلی تعریف زیر را داریم:

تعریف: n بردار v_1، v_2، ... و v_n را در نظر بگیرید. گوییم این بردارها وابسته خطی‌اند اگر n اسکالر c_1، c_2، ... و c_n که همه صفر نیستند وجود داشته باشد به طوری که

$$c_1v_1+c_2v_2+\dots+c_nv_n=0$$

اگر بردارها وابسته خطی نباشند آن‌ها را مستقل خطی می‌نامند. به بیان دیگر v_1، v_2، ... و v_n مستقل خطی‌اند اگر معادله $c_1v_1+c_2v_2+\dots+c_nv_n=0$ فقط به ازای $c_1=c_2=\dots=c_n=0$ برقرار باشد.

مثال: بردارهای $v_1=(2,-1,0,3)^T$ و $v_2=(-6,3,0,-9)^T$ وابسته خطی‌اند. زیرا $v_2=-3v_1$.

مثال: معین کنید بردارهای $(1,-2,3)^T$، $(2,-2,0)^T$ و $(0,1,7)^T$ وابسته خطی یا مستقل خطی‌اند.

$$c_1(1,-2,3)^T+c_2(2,-2,0)^T+c_3(0,1,7)^T=0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}c_1\\-2c_1\\3c_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2c_2\\-2c_2\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\c_3\\7c_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}c_1+2c_2=0\\-2c_1-2c_2+c_3=0\\3c_1+7c_3=0\end{cases}$$

دستگاه را به روش حذفی-گوس حل می‌کنیم:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 7 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[-3R_1+R_3]{2R_1+R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 7 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{3R_2+R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \end{array}\right]$$

اکنون دستگاه را از آخر به اول می‌نویسیم:

$$10c_3 = 0 \Rightarrow \boxed{c_3 = 0}$$

$$2c_2 + c_3 = 0 \Rightarrow \boxed{c_2 = 0}$$

$$c_1 + 2c_2 = 0 \Rightarrow \boxed{c_1 = 0}$$

چون $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ پس بردارها مستقل خطی‌اند.

مثال: بردارهای $(1,-3,0)^T$ ، $(3,0,4)^T$ و $(11,-6,12)^T$ مستقل خطی یا وابسته خطی‌اند؟

حل: دستگاه $c_1(1,-3,0)^T + c_2(3,0,4)^T + c_3(11,-6,12)^T = 0$ را تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{cases} c_1 + 3c_2 + 11c_3 = 0 \\ -3c_1 - 6c_3 = 0 \\ 4c_2 + 12c_3 = 0 \end{cases}$$

یا

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 11 & 0 \\ -3 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 4 & 12 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{3R_1+R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 11 & 0 \\ 0 & 9 & 27 & 0 \\ 0 & 4 & 12 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{9}R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 11 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 12 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{-4R_2+R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 11 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

با توجه به توضیحات قبل واضح است دستگاه بی‌نهایت جواب دارد، یعنی اگر دستگاه را بنویسیم داریم:

$$\begin{cases} c_1 + 3c_2 + 11c_3 = 0 \\ c_2 + 3c_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{c_2 = -3c_3}$$

$$\Rightarrow c_1 + 3(-3c_3) + 11c_3 = 0 \Rightarrow c_1 + 2c_3 = 0 \Rightarrow \boxed{c_1 = -2c_3}$$

پس جواب به صورت $(-2c_3, -3c_3, c_3)$ خواهد بود که مثلاً برای $c_3 = 1$ داریم:

$(-2, -3, 1)$ که صفر نیست پس بردارهای مذکور وابسته خطی‌اند.

بسمه تعالی

جلسه پنجم دروس جبرانی

مقادیر ویژه و بردارهای ویژه

فرض کنید A یک ماتریس $n\times n$ با درایه‌های حقیقی باشد. عدد λ را در صورتی یک مقدار ویژه ماتریس A نامیم که بردار ناصفری چون v موجود باشد به طوری که $Av=\lambda v$.

بردار $v\neq 0$ را یک بردار ویژه ماتریس A متناظر با مقدار ویژه λ می‌نامیم.

مثال: فرض کنید $A=\begin{bmatrix}10&-18\\6&-11\end{bmatrix}$. می‌توان نوشت: $A\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10&-18\\6&-11\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$

و این یعنی $\lambda_1=1$ یک مقدار ویژه ماتریس A متناظر با بردار ویژه $v_1=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$ است. به همین ترتیب $A\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10&-18\\6&-11\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6\\-4\end{bmatrix}=-2\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$. یعنی $\lambda_2=-2$ یک مقدار ویژه ماتریس A متناظر با بردار ویژه $v_2=\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$ می‌باشد. پس مقادیر ویژه برابر با $\lambda_1=1$, $\lambda_2=-2$ است و این ۲ مقدار ویژه فقط موجود هستند.

در ادامه به نحوه محاسبه مقادیر و بردار ویژه ماتریس‌ها می‌پردازیم.

فرض کنید A یک ماتریس $n\times n$ باشد. λ یک مقدار ویژه A است اگر و فقط اگر $\det(A-\lambda I)=0$.

یعنی باید دستگاه همگن فوق را بسازیم و از دترمینان $A-\lambda I$ مقادیر ویژه را پیدا کنیم. در حقیقت یک چندجمله‌ای حاصل می‌شود که این چندجمله‌ای را چندجمله‌ای مشخصه ماتریس A می‌نامیم و ریشه‌های این چندجمله‌ای همان مقادیر ویژه ماتریس A است. برای یافتن مقادیر و بردارهای ویژه به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$\det(A-\lambda I)=0$

۱- $\det(A-\lambda I)$ را حساب می‌کنیم. ۲- ریشه‌های λ_1، λ_2، ... و λ_m را از معادله را حساب می‌کنیم. ۳- به ازای هر مقدار ویژه λ_i دستگاه همگن $(A-\lambda_i I)v=0$ را حل می‌کنیم.

مثال: فرض کنید $A=\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$. مقادیر و بردارهای ویژه را بیابید.

$$A-\lambda I=\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 3 & 3-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 3 & 3-\lambda \end{vmatrix}=(4-\lambda)(3-\lambda)-6$$

$$=\lambda^2-7\lambda+12-6=\lambda^2-7\lambda+6=(\lambda-1)(\lambda-6)=0$$

پس مقادیر ویژه برابر با $\lambda_1=1$ و $\lambda_2=6$ است.

برای پیدا کردن بردار ویژه متناظر با $\lambda_1=1$ داریم:

$$(A-\lambda_1 I)v=0 \xrightarrow{\lambda_1=1} (A-I)v=0$$

$$\Rightarrow\left(\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)v=0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{v}=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x_1+2x_2=0 \\ 3x_1+2x_2=0 \end{cases} \Rightarrow x_1=-\frac{2x_2}{3}$$

پس $v=(x_1,x_2)^T$ که $v=\left(-\frac{2x_2}{3},x_2\right)$ مثلاً با قرار دادن $x_2=3$ داریم:

$v=(-2,3)$ یک بردار ویژه متناظر مقدار ویژه $\lambda_1=1$ است. برای مقدار ویژه $\lambda_2=6$ داریم:

$$(A-6I)v=0 \Rightarrow \left(\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}\right)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=0$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x_1+2x_2=0 \\ 3x_1-3x_2=0 \end{cases} \Rightarrow x_1=x_2$$

پس $v=(x_1,x_2)^T$ که $v=(x_1,x_1)$ با قرار دادن $x_1=1$ داریم $v=(1,1)$

بردار ویژه متناظر با $\lambda_2=6$ خواهد بود.

مثال: مقادیر و بردارهای ویژه ماتریس $A=\begin{bmatrix}1&-1&4\\3&2&-1\\2&1&-1\end{bmatrix}$ را بیابید.

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}1-\lambda&-1&4\\3&2-\lambda&-1\\2&1&-1-\lambda\end{vmatrix}=$$

دترمینان را روی ستون اول بسط می‌دهیم:

$$=(1-\lambda)\begin{vmatrix}2-\lambda&-1\\1&-1-\lambda\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}-1&4\\1&-1-\lambda\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}-1&4\\2-\lambda&-1\end{vmatrix}$$

$$=(1-\lambda)\left[(2-\lambda)(-1-\lambda)+1\right]-3(1+\lambda-4)+2(1-8+4\lambda)$$

$$=(1-\lambda)(\lambda^2-\lambda-1)+9-3\lambda+8\lambda-14=-(\lambda^3-2\lambda^2-5\lambda+6)$$

$$=-(\lambda-1)(\lambda+2)(\lambda-3)=0$$

پس مقادیر ویژه $\lambda_1=1$ ، $\lambda_2=-2$ ، $\lambda_3=3$ است. برای یافتن بردار ویژه متناظر با $\lambda_1=1$ داریم:

$$(A-I)v=\begin{bmatrix}0&-1&4\\3&1&-1\\2&1&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}0&-1&4&0\\3&1&-1&0\\2&1&-2&0\end{array}\right]\xrightarrow[R_1+R_3]{R_1+R_2}\left[\begin{array}{ccc|c}0&-1&4&0\\3&0&3&0\\2&0&2&0\end{array}\right]\xrightarrow{-\frac{2}{3}R_2+R_3}\left[\begin{array}{ccc|c}0&-1&4&0\\3&0&3&0\\0&0&0&0\end{array}\right]$$

$$\begin{cases}-x_2+4x_3=0 \Rightarrow x_2=4x_3\\ 3x_1+3x_3=0 \Rightarrow x_1=-x_3\end{cases}$$

در نتیجه $x_1=-x_3,\ x_2=4x_3$

بنابراین $v=(-x_3,4x_3,x_3)^T$ بردار ویژه است.

برای $x_3=1$ داریم: $v=(-1,4,1)^T$ بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه $\lambda_1=1$ است.

به ازای $\lambda_2=-2$ داریم:

$$(A+2I)v=\begin{bmatrix}3&-1&4\\3&4&-1\\2&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}3&-1&4&0\\3&4&-1&0\\2&1&1&0\end{array}\right]\xrightarrow[-\frac{2}{3}R_1+R_3]{-R_1+R_2}\left[\begin{array}{ccc|c}3&-1&4&0\\0&5&-5&0\\0&\frac{5}{3}&-\frac{5}{3}&0\end{array}\right]\xrightarrow{3R_3}\left[\begin{array}{ccc|c}3&-1&4&0\\0&5&-5&0\\0&5&-5&0\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-R_2+R_3}\left[\begin{array}{ccc|c}3&-1&4&0\\0&5&-5&0\\0&0&0&0\end{array}\right]$$

پس دستگاه به صورت روبرو خواهد بود:

$$5x_2 - 5x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = x_3$$

$$3x_1 - x_2 + 4x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_3$$

پس $V = (-x_3, x_3, x_3)^T$ بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه $\lambda_2 = -2$ است.

به ازای $\lambda_3 = 3$ داریم:

$$(A-3I)V = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1+R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{-R_1+R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} 5x_1 - 5x_3 = 0 \Rightarrow \boxed{x_1 = x_3} \\ -2x_1 - x_2 + 4x_3 = 0 \Rightarrow \boxed{x_2 = 2x_1} \end{cases}$$

پس $V = (x_1, 2x_1, x_1)^T$ بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه $\lambda_3 = 3$ است.

و به ازای $x_1 = 1$ داریم: $V = (1, 2, 1)$.

بسمه تعالی

تمرینات تحویلی فصل اول (ماتریس)

سوال ۱ همه جواب های دستگاه های داده شده زیر را درصورت وجود بیابید.

۱) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4 \\ -3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 8 \end{cases}$

۲) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ -x_1 + 4x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

۳) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 4x_4 = 7 \\ -2x_1 + 4x_2 + x_3 - 2x_4 = 1 \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = -1 \end{cases}$

سوال ۲ ضرب های ماتریسی زیر را انجام دهید.

۱) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 6 & 4 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ -7 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 6 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 7 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

سوال ۳ ماتریس های زیر را سطری-پلکانی (اعمال سطری-پلکانی) کنید و Rank (رتبه) آن ها را بیابید.

۱) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix} 2 & 8 & -2 \\ 1 & 0 & -6 \end{bmatrix}$

سوال ۴ معکوس ماتریس های زیر را به روش ۱) دترمینان و ۲) گوس بیابید.

۱) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & -3 \\ 2 & 5 & -3 \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

سوال ۵ کدام دسته از بردارهای زیر مستقل خطی و کدام دسته وابسته خطی اند؟

۱) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix}$

سوال ۶ بردارهای $\begin{bmatrix} 3 \\ \alpha \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ بازای چه مقداری از α وابسته خطی اند؟

سوال ۷ برای ماتریس های زیر مقادیر ویژه و بردارهای ویژه را بیابید.

۱) $\begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix} -12 & 7 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$

بسمه تعالی

ریاضی مهندسی

نرم بردار و نرم ماتریس :

تعریف: تابع $\|.\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ نرم نامیده می‌شود هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

1) $\|x\| \geq 0 \quad \forall x$, $\|x\| = 0 \iff x = 0$

2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$, همگن اسکالرات

3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ نامساوی مثلثی

نرم اقلیدسی : نرم اقلیدسی یا طول بردار x به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

که x_iها مولفه‌های بردار x هستند $(x = (x_1, x_2, \dots, x_n))$ این نرم را نرم ۲ می‌نامیم.

نرم ۱ یا L_1-نرم برای بردار x عبارت است از:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

نرم ∞ یا L_∞ نرم چنین تعریف می‌شود:

$$\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$$

مثلاً برای بردار $x = (1, -2, 2)^T = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ داریم:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{3} |x_i| = |x_1| + |x_2| + |x_3| = |1| + |-2| + |2| = 5$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} x_i^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + (2)^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$\|x\|_\infty = \max_i |x_i| = \max\{|x_1|,|x_2|,|x_3|\}$$

$$= \max\{|1|,|-2|,|2|\} = \boxed{2}$$

نرم ماتریس: فرض کنید M فضای برداری همه ماتریس های $n\times n$ باشد. تابع $\|.\|: M \to \mathbb{R}$ را نرم ماتریسی می نامند هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

1) $\|A\| \geq 0 \quad \forall A \quad , \quad \|A\| = 0 \Longleftrightarrow A = 0$ ← ماتریس صفر

2) $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$, تعمیم اسکالرها

3) $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$

4) $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$

نرم های مشهور ماتریس:

$$\|A\|_1 = \max_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$ نرم ماکزیمم ستون ها

2) $$\|A\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 = \sqrt{\rho(A^TA)}$$

$$\|A\|_\infty = \max_{\|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$ نرم ماکزیمم سطرها

مورد (۲) $\rho(A^TA)$ شعاع طیفی ماتریس است.

در ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 5 \\ 6 & 5 & -1 \end{bmatrix}$ حاصل $\|A\|_1$ و $\|A\|_\infty$ را بیابید.

$$\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| = \max_{1\le j\le 3} \sum_{i=1}^{3} |a_{ij}|$$

$$= \max\Big\{ \overbrace{\{|a_{11}|+|a_{21}|+|a_{31}|\}}^{j=1},\ \overbrace{\{|a_{12}|+|a_{22}|+|a_{32}|\}}^{j=2},\ \{|a_{13}|+|a_{23}|+|a_{33}|\} \Big\}$$

$$= \max\{8,\ 9,\ 9\} = \boxed{9}$$

$$\|A\|_\infty = \max\{4,\ 8,\ 12\} = \boxed{12}$$

برازش منحنی

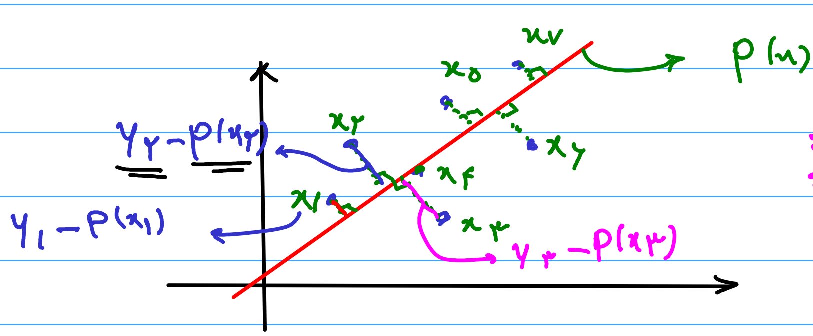
فرض کنید (x_1,y_1)، (x_2,y_2)، ...، (x_n,y_n) یک مجموعه از مشاهدات (داده) باشند. همچنین

فرض کنید یک چندجمله‌ای درجه m $(m \le n)$ $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_m x^m$

بهترین برازش برای مجموعه داده‌های فوق باشد. برای یافتن ضرایب a_0، a_1، ...، a_m از مینیمم کردن

مجموع توان‌های دوم مانده‌ها (خطا حاصل از مقدار دقیق و تقریب) استفاده می‌کنیم:

$$E = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_m x^m)\right)^2 \longrightarrow \min$$



$$\sum_{i=1}^{7} (y_i - p(x_i))^2 \longrightarrow \min$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_0} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial a_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial E}{\partial a_m} = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_0} = -2\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - (a_0 + a_1 x_i + \cdots + a_m x_i^m)\right) = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_1} = -2\sum_{i=1}^{n} x_i\left(y_i - (a_0 + a_1 x_i + \cdots + a_m x_i^m)\right) = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_2} = -2\sum_{i=1}^{n} x_i^2\left(y_i - (a_0 + a_1 x_i + \cdots + a_m x_i^m)\right) = 0$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_m} = -2\sum_{i=1}^{n} x_i^m\left(y_i - (a_0 + a_1 x_i + \cdots + a_m x_i^m)\right) = 0$$

دستگاه فوق را ساده می‌کنیم داریم:

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = a_0\sum_{i=1}^{n} 1 + a_1\sum_{i=1}^{n} x_i + a_2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \cdots + a_m\sum_{i=1}^{n} x_i^m$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i x_i = a_0\sum_{i=1}^{n} x_i + a_1\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \cdots + a_m\sum_{i=1}^{n} x_i^{m+1}$$

$$\vdots$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^m y_i = a_0\sum_{i=1}^{n} x_i^m + a_1\sum_{i=1}^{n} x_i^{m+1} + \cdots + a_m\sum_{i=1}^{n} x_i^{2m}$$

فرم ماتریسی دستگاه فوق بصورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} \sum 1 & \sum x_i & \cdots & \sum x_i^m \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \cdots & \sum x_i^{m+1} \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \cdots & \sum x_i^{m+2} \\ \vdots & & & \\ \sum x_i^m & \sum x_i^{m+1} & \cdots & \sum x_i^{2m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^m y_i \end{bmatrix}$$

مثال: برای جدول زیر برازش چند جمله‌ای خطی و درجه دوم را بیابید. $y = ax + b$ و $y = ax^2 + bx + c$

x_i	۰	۲	۵	۷	۹	۱۳	۲۴
y_i	۰	۶	۷٫۹	۸٫۵	۱۲	۲۱٫۵	۳۵

$n = 7$

برای برازش خطی $y=ax+b$ داریم:

$$\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^{7} 1 & \sum_{i=1}^{7} x_i \\ \sum_{i=1}^{7} x_i & \sum_{i=1}^{7} x_i^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sum y_i\\ \sum x_iy_i\end{bmatrix}$$

پس:

	x_i	y_i	x_iy_i	x_i^2
	۰	۰	۰	۰
	۲	۶	۱۲	۴
	۵	۷٫۹	۳۹٫۵	۲۵
	۷	۸٫۵	۵۹٫۵	۴۹
	۹	۱۲	۱۰۸	۸۱
	۱۴	۲۱٫۵	۲۷۹٫۵	۱۶۹
	۲۴	۳۵	۸۴۰	۵۷۶
$\sum$	۶۰	۰٫۰۹۰۶×۱۰^۳	۱٫۳۳۴۸۵×۱۰^۳	۹۰۴

$$\begin{bmatrix}7 & 60\\ 60 & 904\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.0906\times10^3\\ 1.33485\times10^3\end{bmatrix}$$

که از آن مقادیر زیر حاصل می‌شود:

$$b=0.6831\ ,\quad a=1.43534$$

پس برازش خطی آن برابر است با:

$$y=1.43534x+0.6831$$

برای برازش درجه دوم داریم:

$$\begin{bmatrix}7 & \sum x_i & \sum x_i^2\\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3\\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sum y_i\\ \sum x_iy_i\\ \sum x_i^2y_i\end{bmatrix}$$

$$\boxed{y=0.8977+1.3495x+0.0027x^2}$$

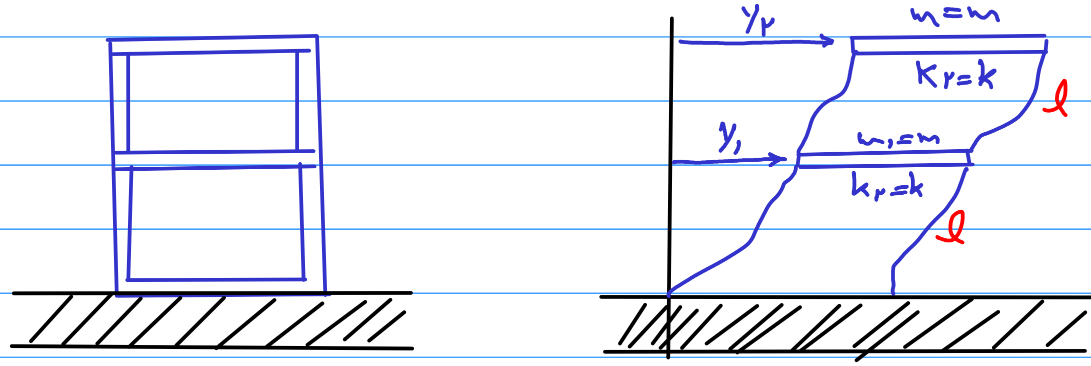
بسمه تعالی

ریاضی مهندسی

از کاربردهای مقادیر ویژه می‌توان به حل دستگاه معادلات دیفرانسیل و حتی تحلیل خود معادلات اشاره کرد. دو مثال کاربردی زیر برای این منظور ارائه می‌شود.

مثال ۱: (ارتعاش یک ساختمان) یک ساختمان دو طبقه ساده شکل زیر با یک سقف سخت را در نظر بگیرید.

فرض کنید که توزیع وزن ساختمان می‌تواند به شکل وزن متمرکز شده در هر سطح کف به صورت نشان داده شده در شکل زیر نمایش داده شود و سختی ستون‌های حمال توسط ثابت‌های k_i نشان داده شوند.



معادلات حرکت برای این دستگاه می‌توانند به شکل زیر نوشته شوند:

$$m_1\ddot{y}_1+(k_1+k_2)y_1-k_2y_2=0$$

$$m_2\ddot{y}_2-k_2y_1+k_2y_2=0$$

دستگاه فوق را می‌توان به صورت ماتریسی زیر نیز نمایش داد:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}=0$$

با انتخاب $m_1=m_2=m$ و $k_1=k_2=k$ داریم:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = 0$$

اگر ماتریس وزن را به صورت $\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} = M$ و ماتریس سختی ستون‌ها را با $K = \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}$

تعریف کنیم آنگاه به معادله زیر می‌رسیم:

$$M\ddot{y} - Ky = 0 \quad , \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

با فرض این که یک جواب به شکل $y = xe^{i\omega t}$ است، با ضرب کردن معادله فوق در M^{-1}

و قرار دادن $A = M^{-1}K$ خواهیم داشت:

$$\ddot{y} - Ay = 0$$

اکنون فرض می‌کنیم $\omega^2 = \lambda$ در این صورت مسئله مقدار اولیه زیر به دست می‌آید:

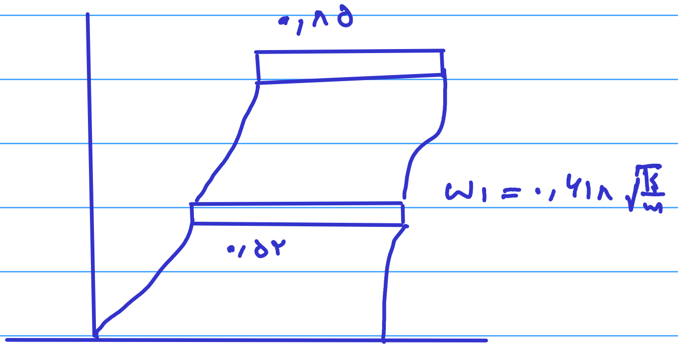
$$\begin{bmatrix} \frac{2k}{m} & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{m} & \frac{k}{m} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

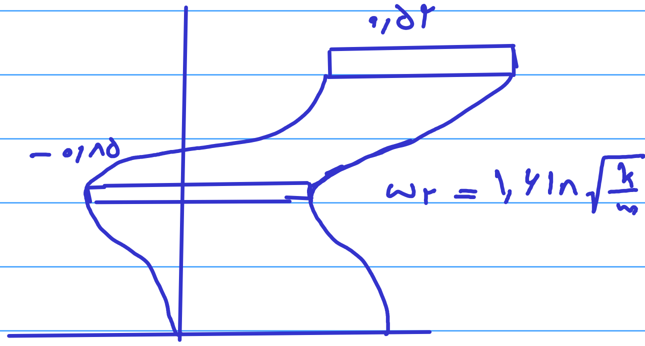
مقادیر ویژه λ_1 و λ_2 و بردارهای ویژه متناظر برای این مسئله به صورت زیر حاصل می‌شوند:

$$\det\left(\begin{bmatrix} \frac{2k}{m} & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{m} & \frac{k}{m} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\lambda_1 = \frac{k}{m}(0.38200) \quad \text{و} \quad \lambda_2 = \frac{k}{m}(2.6180)$$

و بردارهای ویژه آن برابر است با: $(-0.8507, 0.5257)$, $(0.5257, 0.8507)^T$





گاهی اوقات در تحلیل های آماری با داده‌های زیادی در دسترس است می‌خواهیم از حجم زیاد داده‌ها و پیچیدگی آن‌ها کم کنیم. ایده اصلی این است که k مولفه از یک مجموعه داده متشکل از n اندازه گیری بر روی P ($p>k$) متغیر اصلی به طریقی طوری انتخاب شوند که بیشترین اطلاعات موجود در P متغیر اصلی در k مولفه انتخاب شده موجود باشد. در آمار چنین k مولفه، اولین k مولفه اصلی نامیده می‌شوند. شناخت مقادیر و بردارهای ویژه ماتریس کوواریانس برای پیدا کردن این مولفه‌های اصلی لازم می‌باشد. اگر Σ ماتریس کوواریانس متناظر با بردارهای تصادفی $X=(X_1, X_2, \dots, X_p)$ باشد و $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p$ مقادیر ویژه باشند و $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ بردارهای ویژه متناظر ماتریس Σ باشند آنگاه i-امین مولفه اصلی به صورت زیر تعریف می‌شود: $Y_i = \alpha_i^T X \,,\; i=1,2,\dots,p$.

همچنین قسمتی از کل واریانس جامعه که از i-امین مولفه اصلی ناشی می‌شود توسط نسبت زیر بیان می‌گردد

$$\frac{\lambda_i}{\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_p} = \frac{\lambda_i}{trac(\Sigma)} \,,\quad i=1,\dots,p$$

که در آن $trac(\Sigma)$ تریس ماتریس Σ نامیده می‌شود و برابر است با مجموع عناصر روی قطر اصلی ماتریس Σ.

مثال ۲: فرض کنید که ماتریس کوواریانس برای نرخ های هفتگی برگشت برای اوراق بهادار پنج شرکت بزرگ در یک دوره مفروض از زمان به صورت زیر باشد:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0.577 & 0.509 & 0.387 & 0.462 \\ 0.577 & 1 & 0.599 & 0.389 & 0.322 \\ 0.509 & 0.599 & 1 & 0.436 & 0.426 \\ 0.387 & 0.389 & 0.436 & 1 & 0.523 \\ 0.462 & 0.322 & 0.426 & 0.523 & 1 \end{bmatrix}$$

(ماتریس کوواریانس نمونه نیمه معین مثبت است پس مقادیر ویژه نامنفی هستند.)

دو مقدار ویژه اول R برابرند با: $\lambda_1 = 2.857$, $\lambda_2 = 0.809$

و $trac(R) = 5$ پس بخشی از کل واریانس جامعه که از اولین مولفه نتیجه می‌گردد برابر است با:

$$\frac{\lambda_1}{trac(R)} = \frac{2.857}{5} = 0.57 \Longrightarrow 57\%$$

و بخشی از کل واریانس جامعه که از دومین مولفه نتیجه می‌گردد برابر است با:

$$\frac{\lambda_2}{trac(R)} = \frac{0.809}{5} = 0.16 \Longrightarrow 16\%$$

بنابراین دو مولفه اصلی اول ۷۳ درصد از کل واریانس جامعه را بیان می‌کنند. بردارهای ویژه متناظر با این مولفه‌های اصلی عبارت‌اند از:

$$x_1^T = (0.464, 0.457, 0.470, 0.421, 0.421)$$

$$x_2^T = (0.24, 0.509, 0.26, -0.526, -0.582)$$

جواب‌های بهترین توان‌های دوم برای دستگاه‌های خطی:

برای حل دستگاه معادلات خطی $Ax=b$ که ماتریس A مربعی و معکوس‌پذیر بود روش‌های حذفی گاوس و ماتریس معکوس را بررسی کردیم. حال فرض کنید ماتریس A نامربعی و شاید معکوس‌ناپذیر باشد. در چنین حالتی ممکن است به هیچ وجه جواب وجود نداشته باشد. و یا ممکن است بی‌نهایت جواب موجود باشد. برای مثال فرض کنید A ماتریس $m \times n$ که $m > n$ است. یک دستگاه فرامعین داریم (یعنی تعداد معادلات از تعداد مجهولات بیشتر است) در این حالت معمولاً دستگاه جواب ندارد و در حالت دستگاه فرومعین $m < n$ به تعداد نامتناهی جواب داریم.

برای حل دستگاه در این حالت ها بهترین وضعیت انتظار را می‌توان داشت که یک بردار x پیدا کنیم که Ax را تا حد ممکن به بردار b نزدیک سازد. به بیان دیگر به دنبال یافتن برداری هستیم که

$$\|r(x)\| = \|Ax-b\|$$

را کمینه کند. در تعریف فوق $\|\cdot\|$ را نرم اقلیدسی می‌نامیم. به جواب مسئله فوق جواب کمترین توان‌های دوم برای دستگاه $Ax=b$ می‌گوییم.

اگر مسئله کمترین توان‌های دوم بیش از یک جواب داشته باشد جوابی که نرم اقلیدسی min باشد را جواب با طول مینیمم یا با جواب مینیمم نرم می‌گویند.

قضیه: همیشه یک جواب برای مسئله کمترین توان‌های دوم وجود دارد. این جواب یکتا است اگر و فقط اگر A دارای رتبه کامل باشد. یعنی $\operatorname{rank}(A)=n$. همچنین هرگاه A دارای رتبه ناقص بود آنگاه مسئله کمترین توان‌های دوم دارای جواب‌های بی‌شماری است.

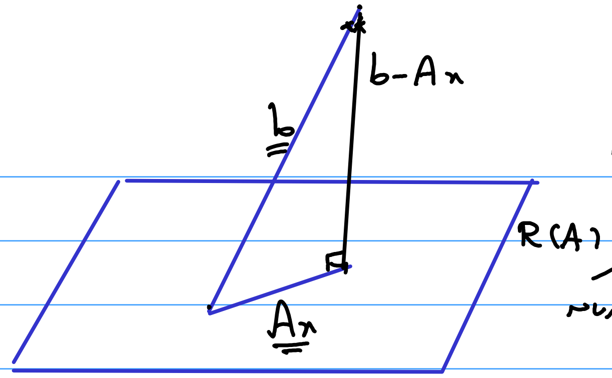
قضیه: x یک جواب کمترین توان‌های دوم $Ax=b$ است اگر و فقط اگر در رابطه زیر صدق کند:

$$A^TAx=A^Tb$$

تفسیر هندسی مسئله کمترین توان‌های دوم:

فرض کنید A یک ماتریس $m\times n$ که $m>n$ باشد. آنگاه A یک نگاشت خطی از $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ است.

یک جواب مسئله کمترین توان‌های دوم برای دستگاه خطی $Ax=b$ همواره وجود دارد. زیرا می‌توانیم b را در



هستم $R(A)$ تصویر کنیم روی یک بردار $u \in R(A)$

بدست آوریم و یک بردار $x \in \mathbb{R}^n$ وجود دارد به طوری‌که

$u = Ax$. این x همان جواب مسئله است.

چون $b - Ax$ بر $R(A)$ عمود است و هر بردار در $R(A)$ یک ترکیب خطی از بردارهای ستون A

هست آنگاه $b - Ax$ بر هر بردار ستونی A عمود است، یعنی $A^T(b - Ax) = 0$

$$\Longrightarrow A^Tb - A^TAx = 0 \Longrightarrow A^TAx = A^Tb \quad \checkmark$$

<u>مثال</u>: فرض کنید داده‌های تجربی زیر مفروض باشد. می‌خواهیم چندجمله‌ای را برای این داده‌ها متناظر با

بهترین برازش داده‌ها توسط <u>الف</u> یک خط و <u>ب</u> چندجمله‌ای درجه دوم بدست آوریم.

	۰	۲	۵	۷	۹	۱۳	۲۴
	۰	۶	۷٫۹	۸٫۵	۱۲	۲۶٫۵	۳۵

<u>برازش خطی</u>:

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۲ \\ ۱ & ۵ \\ ۱ & ۷ \\ ۱ & ۹ \\ ۱ & ۱۳ \\ ۱ & ۲۴ \end{bmatrix}, \quad b = (۰, ۶, ۷٫۹, ۸٫۵, ۱۲, ۲۶٫۵, ۳۵)^T$$

پس معادلات به صورت زیر خواهد بود:

$$A^TAx = A^Ty = b \Longrightarrow \begin{bmatrix} ۷ & ۶۰ \\ ۶۰ & ۹۰۴ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = ۱۰^۳ \begin{bmatrix} ۰٫۰۹۰۶ \\ ۱٫۳۳۸۵ \end{bmatrix}$$

پس جواب این معادلات به صورت: $x_1 = ۰٫۶۸۳۱$ و $x_2 = ۱٫۴۳۵۳$

یعنی خط برازش به صورت: $y = x_2x + x_1 \Longrightarrow \boxed{y = ۰٫۶۸۳۱ + ۱٫۴۳۵۳x}$

تجزیه مقدار تکین (SVD)

ماتریس های متعامد: ماتریس مربعی Q را متعامد گوییم هرگاه $Q^TQ = I$. از این تعریف نتیجه می‌شود که

ماتریس Q متعامد است اگر و فقط اگر Q معکوس‌پذیر باشد و $Q^{-1} = Q^T$

دو بردار $\underline{v_1} = (a,b,c)$ و $\underline{v_2} = (a',b',c')$ را در نظر بگیرید. حاصلضرب داخلی این دو بردار را به صورت

زیر تعریف می‌کنیم:

$$\underline{v_1} \cdot \underline{v_2} = (a,b,c) \cdot (a',b',c') = aa' + bb' + cc'$$

پس حاصلضرب داخلی دو بردار یک اسکالر است. اندازه یا طول یک بردار v_1 برابر است با $\|v_1\| = |v_1| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$

دو بردار v_1 و v_2 را متعامد گوییم هرگاه حاصلضرب داخلی آن‌ها صفر شود یعنی $\underline{v_1} \cdot \underline{v_2} = 0$.

قضیه: ماتریس $Q = (q_{ij})_{n\times n}$ از مرتبه n متعامد است اگر و فقط اگر ستون‌های آن مجموعه‌ای از

بردارهای یکا متعامد در $\mathbb{R}^n$ باشد.

بردار یکا یعنی طول آن برابر 1 است.

تجزیه مقدار تکین: فرض کنید A یک ماتریس حقیقی $m\times n$ باشد. تعریف می‌کنیم $\underset{n\times n}{B} = A^TA$

ماتریس مربعی مرتبه n و نیمه معین مثبت است زیرا B متقارن و $\forall x \in \mathbb{R}^n$ و $x \neq 0$

$$x^TBx = x^TA^TAx = (Ax)^TAx = \|Ax\|^2 \geq 0$$

چون B نیمه معین مثبت است لذا مقادیر ویژه آن نامنفی است. حال فرض کنیم مقادیر ویژه ماتریس B به صورت:

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$$

باشد. حال تعریف می‌کنیم $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i} \quad i=1,2,\dots,n$

σها را مقادیر تکین ماتریس A می‌نامیم. واضح است $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0$

مثال: مقادیر تکین ماتریس $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ را بیابید.

$$B = A^T A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 3} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

حال باید مقادیر ویژه B را حساب کنیم. لذا مقادیر ویژه برابر است با $\lambda_1 = 6$ و $\lambda_2 = 1$

پس مقادیر تکین ماتریس A برابر است با $\sigma_1 = \sqrt{6}$, $\sigma_2 = 1$

قضیه: فرض کنید A یک ماتریس $m\times n$ باشد. در این صورت ماتریس‌های متعامد $U_{m\times m}$ و $V_{n\times n}$ و یک ماتریس $\Sigma_{m\times n}$ وجود دارند به طوری که

$$A = U\Sigma V^T$$

که در آن ماتریس $\Sigma_{m\times n}$ یک ماتریس قطری به صورت است

$$\Sigma_{m\times n} = \left[\begin{array}{c|c} D & O_1 \\ \hline O_2 & O_3 \end{array}\right]$$

که O_1، O_2 و O_3 ماتریس‌های صفر و D یک ماتریس قطری است که درایه‌های قطری آن مقادیر تکین غیر صفر A هستند. یعنی

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0 = \sigma_{r+1} = \dots = \sigma_n, \quad D = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & O \\ & \sigma_2 & \\ O & & \ddots \\ & & & \sigma_n \end{bmatrix}$$

سید تقاضی

ریاضی مهندسی

قضیه: فرض کنید A یک ماتریس $m\times n$ باشد. در این صورت ماتریس های متعامد $U_{m\times m}$ و $V_{n\times n}$ و یک ماتریس $\Sigma_{m\times n}$ وجود دارند به طوری که

$$A = U\Sigma V^T$$

که در آن $\Sigma_{m\times n}$ یک ماتریس شبه قطری به شکل

$$\Sigma_{m\times n} = \left[\begin{array}{c|c} D & O_1 \\ \hline O_2 & O_3 \end{array}\right]$$

و D یک ماتریس قطری است که مقادیر تکین و غیر صفر A روی قطر آن قرار می گیرند.

مثال: تجزیه مقدار تکین ماتریس روبرو را بدست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 6 & 6 & 3 \end{bmatrix}_{2\times 3} \qquad m=2,\ n=3$$

$$A^TA = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 1 & 6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 6 & 6 & 3 \end{bmatrix}_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 40 & 34 & 14 \\ 34 & 37 & 20 \\ 14 & 20 & 13 \end{bmatrix}$$

مقادیر ویژه ماتریس A^TA برابرند با: $\lambda_1 = 81$ ، $\lambda_2 = 9$ و $\lambda_3 = 0$. لذا مقادیر تکین ماتریس A برابرند با: $\sigma_1 = 9$ ، $\sigma_2 = 3$ و $\sigma_3 = 0$

بردار ویژه ماتریس A^TA متناظر با مقادیر ویژه λ_1 ، λ_2 ، λ_3 عبارتند از:

$$v_1' = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2' = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad v_3' = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad V_{3\times 3}$$

با توجه به اینکه A^TA متقارن است و مقادیر ویژه آن متمایزند، بردارهای ویژه متعامدند. بردارهای ویژه را نرمال می کنیم تا ستون های ماتریس V را تشکیل دهند:

$$|v_1'| = \sqrt{2^2+2^2+1^2} = 3$$

$$v_1 = \frac{v_1'}{|v_1'|} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \qquad |v_2'| = 3 \ \therefore\ v_2 = \frac{v_2'}{|v_2'|} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$|v_3'| = 3 \Rightarrow v_3 = \frac{v_3'}{|v_3'|} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

پس ماتریس V برابر است با:

$$V = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

ستون های ماتریس $U_{2\times2}$ به صورت

$$u_i = \frac{1}{\sigma_i} A v_i \qquad i=1,2$$

$$u_1 = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 6 & 6 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$u_2 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 6 & 6 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

پس ماتریس U برابر است با:

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ماتریس $\Sigma_{2\times3}$ برابر است با:

$$\Sigma_{2\times3} = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

حال می‌توان بررسی نمود:

$$A = U \Sigma V^T$$

بسمه تعالی

ریاضی مهندسی

کاربردهای SVD

۱- حل مسئله کمترین توان‌های دوم

دستگاه معادلات خطی $Ax=b$ را به صورت مشخص در نظر بگیرید، به طوری که $A=(a_{ij})_{m\times n}$، $x\in\mathbb{R}^n$ و $b\in\mathbb{R}^m$. یادآوری می‌کنیم مسئله کمترین توان‌های دوم یافتن $x\in\mathbb{R}^n$ است به

$$\|r\|_2=\|Ax-b\|_2 \longrightarrow \min$$

فرض ماتریس A تجزیه مقدار تکین به صورت $A=U\Sigma V^T$ داشته باشد. در این صورت:

$$\|r\|_2=\|U\Sigma V^T x-\overset{UU^T}{I}b\|_2$$

$$=\|U(\Sigma V^T x-U^T b)\|_2$$

می‌دانیم U ماتریس یکانی است پس $\|U\|_2=1$

$$=\|U\|_2\|\Sigma V^T x-U^T b\|_2=\|\Sigma \underbrace{V^T x}_{y}-\underbrace{U^T b}_{b'}\|_2$$

$$=\|\Sigma y-b'\|_2$$

که در آن $V^T x=y$ و $U^T b=b'$. بنابراین استفاده از SVD ماتریس A مسئله کمترین توان‌های دوم مربوط به یک ماتریس کامل A را به یک مسئله کمترین توان‌های دوم با یک ماتریس قطری به صورت زیر کاهش می‌دهد:

یعنی هدف یافتن y است به طوری که $\|\Sigma y-b'\|_2 \longrightarrow \min$.

فرض کنیم ماتریس قطری Σ برخی از مقادیر تکین صفر باشد. در این صورت:

$$\|\Sigma y - b'\|_2 = \sum_{i=1}^{k} \|\sigma_i y_i - b'_i\|_2 + \sum_{i=k+1}^{m} |b'_i|^2$$

که در آن k تعداد مقادیر تکین ناصفر A است. بنابراین در خواهیم بردار $y=(y_1,y_2,\dots,y_n)^T$

را بیابیم به که در آن $\|\Sigma y - b'\|_2 \longrightarrow \min$

$$y_i = \begin{cases} \dfrac{b'_i}{\sigma_i} & \sigma_i \neq 0 \\ \text{دلخواه} & \sigma_i = 0 \end{cases}$$

وقتی y_i بدست آمد می‌توان x را از رابطه $x=Vy$ بدست آورد.

چون متناظر با هر مقدار تکین σ_i صفر، y_i می‌تواند به طور دلخواه انتخاب شود. در حالت رتبه ـ ناقص ما جواب های بیشماری داریم. زمانی که ماتریس A رتبه کامل باشد جواب کمترین توان های دوم منحصر به فرد است.

با توجه به توضیحات فوق الگوریتم زیر را برای یافتن جواب مسئله کمترین توان های دوم داریم.

گام ۱: SVD ماتریس A را بیابید. $A=U\Sigma V^T$.

گام ۲: بردار $b'=U^Tb=(b'_1,b'_2,\dots,b'_n)^T$ را تشکیل دهید.

گام ۳: بردار $y=(y_1,y_2,\dots,y_n)$ را به صورت زیر بدست می‌آوریم

$$y_i = \begin{cases} \dfrac{b'_i}{\sigma_i} & \sigma_i \neq 0 \\ \text{دلخواه} & \sigma_i = 0 \end{cases}$$

گام ۴: دسته جواب های کمترین توان های دوم به صورت زیر محاسبه می‌شود $x=Vy$.

نتیجه: جواب مسئله کمترین توان های دوم با مینیمم نرم ۲ با استفاده از SVD به صورت $x=\sum_{i=1}^{k}\frac{u_i^Tb}{\sigma_i}v_i$ است که در آن k برابر رتبه ماتریس A، u_i و v_i به ترتیب i امین ستون ماتریس U و V است.

مثال: دستگاه معادلات خطی $Ax=b$ را برای ماتریس $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&4\\1&2&3\end{bmatrix}$ و $b=(6,9,6)^T$ بدست آورید.

حال در ابتدا مقادیر تکین ماتریس A را می‌یابیم. لازم است بر مقادیر ویژه ماتریس A^TA را بیابیم.

مقادیر تکین ماتریس A عبارت است از: $\sigma_1 = 7.5358$ ، $\sigma_2 = 0.4597$ و $\sigma_3 = 0$

در این صورت A رتبه ناقص است. اکنون ماتریس‌های U و V و Σ را می‌یابیم.

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 7.5358 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4597 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad V = \begin{bmatrix} 0.3208 & -0.8546 & 0.4082 \\ 0.5470 & -0.1847 & -0.8165 \\ 0.7732 & 0.4853 & 0.4082 \end{bmatrix}$$

و ماتریس U به صورت زیر است:

$$U = \begin{bmatrix} 0.4956 & 0.5044 & 0.7071 \\ 0.7124 & -0.7008 & -0.0000 \\ 0.4956 & 0.5044 & -0.7071 \end{bmatrix}$$

حال بردار b' = طلق زیر به دست می‌آوریم:

$$b' = U^T b = (12.3667,\ -0.2547,\ 0)^T$$

$$y = (1.6411,\ -0.5541,\ 0)$$

و جواب مسئله کمترین توان‌های دوم به صورت زیر به دست می‌آید:

$$Vy = (1, 1, 1)^T.$$

مثال: دستگاه $Ax=b$ را با ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.0001 & 0 \\ 0 & 0.0001 \end{bmatrix}$ ، $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 0.0001 \\ 0.0001 \end{bmatrix}$ حل کنید. $x = (x_1, x_2)^T$

ابتدا مقادیر ویژه ماتریس A^TA و مقادیر تکین ماتریس A را می‌یابیم. $\sigma_1 = 1.4142$ و $\sigma_2 = 0.0001$

پس ماتریس Σ ، U و V به صورت زیر حاصل می‌شوند:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} ۱٫۴۱۴۲ & ۰ \\ ۰ & ۰٫۰۰۰۱ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۰٫۰۰۰۱ \\ ۰ & -۰٫۷۰۷۱ & ۰٫۷۰۷۱ \\ ۰ & ۰٫۷۰۷۱ & ۰٫۷۰۷۱ \end{bmatrix}$$

$$v = \begin{bmatrix} ۰٫۷۰۷۱ & -۰٫۷۰۷۱ \\ ۰٫۷۰۷۱ & +۰٫۷۰۷۱ \end{bmatrix}$$

[illegible] پس $b' = u^T b$

$$b' = u^T b = (۲, ۰, ۰)^T , \quad y = (y_1, y_2) = (۱٫۴۱۴۲, ۰)$$

$$x = Vy = (۱, ۱)^T$$

۲- فشرده‌سازی تصاویر:

فرض کنید تصویر توسط ماتریس $A_k = U \Sigma_k V^T = \sum_{i=1}^{k} u_i \sigma_i v_i^T$ فشرده شده باشد. کل فضای مورد نیاز برای ذخیره‌سازی ماتریس A_k برابر k ستون از U، k سطر از V و همچنین اولین k مقدار تکین است.

$$k + k \times m + k \times n = k(1 + m + n)$$

فرض کنید n_1 و n_2 به ترتیب کل پیکسل‌های مورد نیاز برای تصویر اصلی و تصویری که با استفاده از SVD فشرده شده باشد، آنگاه نسبت فشرده‌سازی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$CR = \frac{n_1}{n_2} = \frac{m \times n}{\underline{k}(1 + m + n)}$$

بنابراین برای رسیدن به نسبت فشرده‌سازی بزرگتر به تعداد کمتری از مقادیر تکین نیاز داریم. تعداد مقادیر تکین مورد نیاز باید کمتر از $p = \min(m, n)$ باشد تا فضای ذخیره‌سازی کمتری مورد استفاده قرار گیرد.

پس عدد شاخص مقادیر تکین کران بالا و پایین به صورت زیر دارد:

$$\frac{m\times n}{k(1+m+n)} > 1$$

پس: $1 < k < \frac{m\times n}{1+m+n}$.

فشرده سازی توسط SVD

در این روش ابتدا تصویر مورد نظر را به صورت ماتریس A در می‌آوریم. سپس SVD را روی آن اعمال می‌کنیم.

هدف از تبدیل ماتریس A به تجزیه SVD آن این است که می‌خواهیم ماتریس A را با رتبه‌های خیلی کمتری تقریب بزنیم. فرض کنید r رتبه ماتریس A باشد. در این صورت: $A=\sum_{i=1}^{r} u_i \sigma_i v_i^T$

علاوه بر حذف مقادیر تکین صفر می‌توان σ های خیلی کوچک را نیز حذف نمود. یعنی می‌توان یک آستانه ϵ برای مقادیر تکین انتخاب کرد و یک ماتریس قطری Σ_k را به صورت زیر تعریف نمود:

$$\Sigma_k = \mathrm{diag}(\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \dots, \hat{\sigma}_k)$$

به طوری که

$$\begin{cases} \hat{\sigma}_i = \sigma_i & \sigma_i > \epsilon \\ \hat{\sigma}_i = 0 & \sigma_i \leq \epsilon \end{cases}$$

بنابراین اگر مقادیر تکین $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k$ را داشته باشیم آنگاه تصویر به وجود آمده $A_k = U\Sigma_k V^T$ خواهد بود. اگر آستانه انتخاب شده ϵ بزرگ باشد آنگاه خیلی از اطلاعات تصویر از بین می‌رود و تصویر خیلی محو و نامشخص است.

حال می‌خواهیم این کار را روی یک عکس در اندازه 256×256 اجرا کنیم. با مقادیر مختلف k داریم:

$$1<k<\frac{256\times256}{1+256+256} \Rightarrow 1<k<\frac{256\times256}{513}=127{,}75$$

بسمه تعالی

ریاضی مهندسی

مسئله اشتورم ـ لیوویل :

گاهی اوقات یک معادله مرتبه دوم خطی همراه با دو شرط وجود دارند. اگر این دو شرط مقدار تابع و مقدار مشتق آن در یک نقطه در درون بازه مورد نظر بررسی شود آنگاه آن را یک مسئله مقدار اولیه و اگر این مسئله با دو شرط مقدار تابع در ابتدا و انتهای بازه مورد نظر باشد آن را مسئله مقدار مرزی می نامند.

معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم زیر را در نظر بگیرید.

$$\frac{d}{dx}\left(r(x)\frac{dy}{dx}\right)+[q(x)+\lambda p(x)]y=0 \qquad (*)$$

که در آن λ یک پارامتر است و توابع $p(x)$، $q(x)$ و $r(x)$ توابعی حقیقی مقدار هستند را یک معادله اشتورم ـ لیوویل می گویند. برای اطمینان از وجود جواب فرض می کنیم $p(x)$، $q(x)$، $r(x)$ و $r'(x)$ در بازه $[a,b]$ پیوسته و برای هر $x\in[a,b]$ داشته باشیم $r(x)\neq 0$.

می توانیم هر معادله مرتبه دوم به شکل زیر را به یک معادله اشتورم ـ لیوویل تبدیل کنیم.

$$P(x)y''+Q(x)y'+R(x)y=0$$

با ضرب کردن معادله فوق در $\mu(x)=\frac{1}{P(x)}e^{\int\frac{Q(x)}{P(x)}dx}$ به یک معادله اشتورم ـ لیوویل می رسیم.

برای مثال معادله زیر را در نظر بگیرید.

$$x^2y''+xy'+\lambda y=0 \quad , x>0$$

با ضرب کردن معادله در عامل

$$\mu=\frac{1}{x^2}e^{\int\frac{x}{x^2}dx}=\frac{1}{x^2}e^{\int\frac{dx}{x}}=\frac{1}{x^2}e^{\ln x}=\frac{1}{x}$$

پس:

$$xy'' + y' + \frac{\lambda}{x} y = 0 \quad , \quad x>0$$

که می‌توان نوشت:

$$\frac{d}{dx}\left(x \frac{dy}{dx}\right) + \frac{\lambda}{x} y = 0$$

که یک مسئله اشتورم-لیوویل است.

معادله (*) را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{d}{dx}\left(r(x) \frac{dy}{dx}\right) + q(x) y + \lambda p(x) y = 0$$

با انتخاب عملگر $L = \frac{d}{dx}\left(r\frac{dy}{dx}\right) + q(x)y$ داریم:

$$L(y) + \lambda p(x) y = 0$$

مسئله اشتورم-لیوویل فوق همراه با شرایط مرزی

$$\begin{cases} a_1 y(a) + b_1 y'(a) = 0 \\ a_2 y(b) + b_2 y'(b) = 0 \end{cases}$$

را مسئله اشتورم-لیوویل منظم می‌نامیم. که در آن a_1، a_2، b_1، b_2 اعداد حقیقی‌اند.

(a_1, b_1) و (a_2, b_2) هر دو با هم صفر نیستند.

همواره $y(x) = 0$ جواب مسئله فوق است، که آن را جواب بدیهی نامند. جواب‌های نابدیهی در صورت وجود را توابع ویژه مسئله و مقادیر λ که به ازای آن‌ها جواب نابدیهی وجود دارد را مقادیر ویژه مسئله می‌گوییم.

مثال ۱: مقادیر ویژه و توابع ویژه مسئله اشتورم-لیوویل زیر را بیابید

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \quad 0 < x < \pi \\ y(0) = 0 \\ y(\pi) = 0 \end{cases}$$

حل: سه حالت برای $\lambda = 0$ ، $\lambda > 0$ و $\lambda < 0$ را بررسی می‌کنیم.

حالت اول: $\nu=0$ در این حالت به مسئله $y''=0$ می‌رسیم. در نتیجه جواب عمومی معادله

به صورت $y(x)=c_1x+c_2$. از شرایط $y(0)=0$ و $y(\pi)=0$ داریم: $c_2=0$ و

$c_1=0$. پس در این حالت مسئله فقط جواب بدیهی $y(x)=0$ را دارد و $\nu=0$ مقدار ویژه نیست.

حالت دوم $\nu=-\lambda^2<0$ که در آن $\lambda=\sqrt{-\nu}>0$. در این حالت معادله به صورت $y''-\lambda^2y=0$

است. در نتیجه جواب عمومی معادله به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$y(x)=c_1\cosh\lambda x+c_2\sinh\lambda x$$

$\sinh(0)=0$
$\cosh(0)=1$

با استفاده از $y(0)=0$ داریم $c_1=0$ و از $y(\pi)=0$ داریم: $c_2\sinh\lambda\pi=0$. پس

$c_2=0$ یا $\sinh\lambda\pi=0$ اما $\sinh\lambda\pi\neq0$. در نتیجه باید $c_2=0$. در این حالت نیز جواب

بدیهی $y(x)=0$ دارد.

حالت سوم: $\nu=\lambda^2>0$ که در آن $\lambda=\sqrt{\nu}>0$. در این حالت با معادله دیفرانسیل $y''+\lambda^2y=0$ سروکار داریم.

در نتیجه جواب عمومی به صورت $y(x)=c_1\cos\lambda x+c_2\sin\lambda x$ خواهد بود.

در $y(0)=0$ داریم: $c_1=0$. پس $y=c_2\sin\lambda x$. چون $y(\pi)=0$ لذا

$c_2=0$ یا $\sin\lambda\pi=0$. اگر $c_2=0$ باز هم جواب بدیهی داریم.

اگر $\sin\lambda\pi=0$ آنگاه λ باید مقدار طبیعی باشد یعنی $\lambda=n$ و در نتیجه $c_2\neq0$.

که در این حالت جواب به صورت $y_n(x)=\sin nx$ و $\nu_n=n^2$ مقادیر ویژه هستند.

مثال ۲: مقادیر ویژه و توابع ویژه مسئله اشتورم - لیوویل زیر را بدست آورید.

$$\begin{cases} y'' + \nu y = 0 & 0 < x < \pi \\ y'(0) = 0 \\ y'(\pi) = 0 \end{cases}$$

حل: در سه حالت $\nu = 0$، $\nu > 0$ و $\nu < 0$ را بررسی می‌کنیم.

حالت اول $\nu = 0$. در این حالت جواب عمومی به صورت $y(x) = C_1 x + C_2$ حاصل می‌شود.

از شرط $y'(0) = 0$ داریم: $C_1 = 0$ پس $y(x) = C_2$. در این حالت با انتخاب $C_2 \neq 0$

جواب نابدیهی $y(x) = C_2$ با $\nu = 0$ بدست می‌آید.

حالت دوم $\nu = -\lambda^2 < 0$ به طوری که $\lambda = \sqrt{-\nu} > 0$. در این حالت با معادله $y'' - \lambda^2 y = 0$ سروکار داریم

و جواب عمومی آن به صورت $y(x) = C_1 \cosh \lambda x + C_2 \sinh \lambda x$ است.

با استفاده از $y'(0) = 0$ داریم: $C_2 = 0$. پس جواب به صورت: $y = C_1 \cosh \lambda x$ است.

اکنون اگر $y'(\pi) = 0$ آنگاه $0 = C_1 \lambda \sinh \lambda \pi$. درنتیجه یا $C_1 \lambda = 0$ یا $\sinh \lambda \pi = 0$

اما $\sinh \lambda \pi \neq 0$ پس باید داشته باشیم $C_1 \lambda = 0$ درنتیجه $C_1 = 0$. پس در این حالت جواب بدیهی داریم.

حالت سوم: $\nu = \lambda^2 > 0$ به طوری که $\lambda = \sqrt{\nu} > 0$. در این حالت جواب عمومی به صورت

$y(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x$ است. برای $y'(0) = 0$ داریم $C_2 = 0$ پس $y = C_1 \cos \lambda x$

و چون $y'(\pi) = 0$ درنتیجه $-C_1 \lambda \sin \lambda \pi = 0$. پس $C_1 = 0$ یا $\lambda = n \in \mathbb{N}$. لذا

در این حالت جواب نابدیهی $y_n(x) = \cos nx$ و $\nu_n = n^2$ را داریم.

مثال ۳: مقادیر و توابع ویژه مسئله اشتورم ـ لیوویل زیر را بدست آورید.

$$\begin{cases} y'' + \vartheta y = 0 & -\pi < x < \pi \\ y(-\pi) = y(\pi) \\ y'(-\pi) = y'(\pi) \end{cases}$$

حل: سه حالت $\vartheta = 0$ ، $\vartheta > 0$ و $\vartheta < 0$ را بررسی می‌کنیم.

حالت اول $\vartheta = 0$. در این حالت جواب عمومی به صورت $y = C_1 x + C_2$ است.

از $y(-\pi) = y(\pi)$ داریم: $-C_1\pi + C_2 = C_1\pi + C_2$. پس $2C_1\pi = 0 \Rightarrow C_1 = 0$.

درنتیجه $y = C_2$ در شرایط $y'(-\pi) = y'(+\pi)$ صادق است لذا جواب نابدیهی این حالت می‌باشد.

پس $y = C_2$ و $\vartheta = 0$.

حالت دوم: $\vartheta = -\lambda^2$ که $\lambda = \sqrt{-\vartheta} > 0$. در این حالت جواب عمومی به صورت

$y(x) = C_1 \cosh \lambda x + C_2 \sinh \lambda x$ است. از $y(-\pi) = y(\pi)$

داریم: $C_1 \underbrace{\cosh \lambda(-\pi)}_{\cosh \lambda\pi} + C_2 \underbrace{\sinh \lambda(-\pi)}_{-\sinh \lambda\pi} = C_1 \cosh \lambda\pi + C_2 \sinh \lambda\pi$

$\Longrightarrow \quad 2C_2 \sinh \lambda\pi = 0$ چون $\sinh \lambda\pi \neq 0$ باید $C_2 = 0$

بنابراین جواب به صورت $y = C_1 \cosh \lambda x$ حاصل شود. از شرط $y'(-\pi) = y'(\pi)$

داریم: $C_1 \lambda \sinh \lambda(-\pi) = C_1 \lambda \sinh \lambda\pi \Longrightarrow 2C_1 \lambda \sinh \lambda\pi = 0$

پس باید $C_1 = 0$ چون $\sinh \lambda\pi \neq 0$. در این حالت جواب بدیهی $y = 0$ دارد.

حالت سوم: $\vartheta = \lambda^2 > 0$ که $\lambda = \sqrt{\vartheta} > 0$. در این حالت جواب عمومی به صورت

$y = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x$ حاصل می‌شود.

$$y' = -c_1\lambda \sin \lambda x + c_2 \lambda \cos \lambda x$$

از شرایط مرزی $y(-\pi)=y(\pi)$ ① و $y'(-\pi)=y'(\pi)$ ② داریم:

① $\longrightarrow$ $c_1 \cos \lambda\pi - c_2 \sin \lambda\pi = c_1 \cos \lambda\pi + c_2 \sin \lambda\pi \Rightarrow 2c_2 \sin \lambda\pi = 0$ (*)

② $\longrightarrow$ $c_1 \lambda \sin \lambda\pi + c_2 \lambda \cos \lambda\pi = -c_1 \lambda \sin \lambda\pi + c_2 \lambda \cos \lambda\pi \Rightarrow 2c_1 \sin \lambda\pi = 0$ (**)

یعنی $c_1 \sin \lambda\pi = 0$ و $c_2 \sin \lambda\pi = 0$

در این حالت باید $\lambda = n \in \mathbb{N}$ باشد که در این صورت داریم:

$y_n = \cos nx + \sin nx$ و $\vartheta_n = n^2$. تابع و مقدار ویژه مسئله است.

مثال ۴: مقادیر و توابع ویژه مسئله اشتورم-لیوویل زیر را بیابید در آن $h>0$ عدد ثابت است.

$$\begin{cases} y'' + \vartheta y = 0 & 0 < x < l \\ y(0) = 0 \\ y(l) + h y'(l) = 0 \end{cases}$$

بسمه تعالی

ریاضی مهندسی

مثال ۴: مقادیر و توابع ویژه مسئله اشتورم-لیوویل زیر را بیابید. $h>0$ عدد ثابتی است.

$$\begin{cases} y''+\upsilon y=0 \qquad 0<x<l \\ y(0)=0 \\ y(l)+hy'(l)=0 \end{cases}$$

حل: سه حالت $\upsilon=0$ ، $\upsilon>0$ و $\upsilon<0$ را در نظر می‌گیریم.

حالت اول $\upsilon=0$: در این حالت معادله به صورت $y''=0$ تبدیل می‌شود، جواب عمومی آن برابر است با:

$y(x)=c_1x+c_2$. چون $y(0)=0$ پس $c_2=0$ لذا $y(x)=c_1x$. چون $y(l)+hy'(l)=0$

لذا خواهیم داشت: $c_1 l + c_1 l = 0$ یعنی $2c_1 l = 0$ و چون $l\neq 0$ پس باید $c_1=0$.

درنتیجه در این حالت جواب بدیهی صفر داریم $y(x)=0$.

حالت دوم $\upsilon=-\lambda^2<0$ که در آن $\lambda=\sqrt{-\upsilon}>0$. در این حالت داریم $y''-\lambda^2y=0$

که جواب عمومی معادله اخیر به صورت: $y(x)=c_1\cosh\lambda x+c_2\sinh\lambda x$ است.

چون $y(0)=0$ پس $c_2=0$ درنتیجه $y(x)=c_2\sinh\lambda x$. چون $y(l)+hy'(l)=0$

پس:
$$c_2\sinh\lambda l+h\lambda c_2\cosh\lambda l=0$$

$$\Rightarrow c_2(\sinh\lambda l+h\lambda\cosh\lambda l)=0 \quad \begin{cases} c_2=0 \quad \text{غ ق ق} \times \\ \sinh\lambda l+h\lambda\cosh\lambda l=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sinh\lambda l+h\lambda\cosh\lambda l=0 \Rightarrow \sinh\lambda l=-h\lambda\cosh\lambda l$$

$$\Rightarrow \tanh(\lambda l)=-h\lambda$$

با فرض $\lambda l=\alpha$ می‌توان نوشت:
$$\tanh\alpha=-\frac{h\alpha}{l}$$

یعنی باید بررسی کنیم معادله فوق چه جوابی دارد. یعنی دو معادله $-\frac{h}{l}\alpha$, $\tan h\alpha$

کجا یکدیگر را قطع می‌کنند. که در این نقطه در $\alpha=0$ صدق می‌کند. که این غیر قابل قبول است.

پس در این حالت نیز جواب بدیهی $y(x)=0$ را داریم.

حالت سوم $\mu=\lambda^2>0$ در این صورت $\lambda=\sqrt{\mu}>0$. در این حالت داریم: $y''+\lambda^2y=0$

که جواب عمومی به صورت زیر است: $y(x)=c_1\cos\lambda x+c_2\sin\lambda x$

چون $y(0)=0$ پس $c_1=0$ لذا $y(x)=c_2\sin\lambda x$. چون $y(l)+hy'(l)=0$

داریم: $c_2\sin\lambda l+hc_2\lambda\cos\lambda l=0$

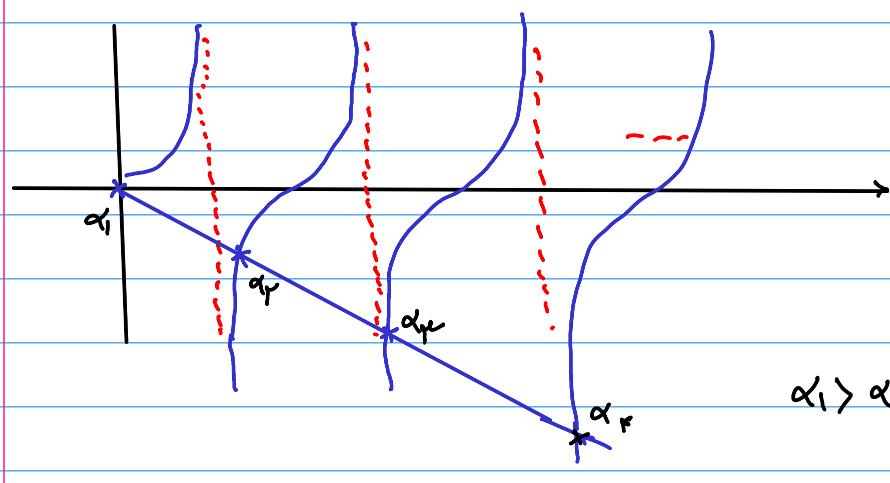
$$\Longrightarrow c_2(\sin\lambda l+h\lambda\cos\lambda l)=0 \quad \begin{cases} c_2=0 \\ \sin\lambda l+h\lambda\cos\lambda l=0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \sin\lambda l+h\lambda\cos\lambda l=0 \Longrightarrow \sin\lambda l=-h\lambda\cos\lambda l$$

$$\Longrightarrow \tan\lambda l=-h\lambda$$

با فرض $\lambda l=\alpha$ داریم: $\tan\alpha=-\frac{\alpha}{l}h \quad (*)$

از نمودار $\tan x$ می‌دانیم:



معادله (*) بی‌نهایت جواب دارد.

$\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \alpha_4 > \dots$

پس $\alpha_n = \lambda_n l$ و بنابراین $\lambda_n = \frac{\alpha_n}{l}$. در نتیجه مقادیر و توابع ویژه در این حالت

برابرند با: $v_n = \lambda_n^2 = \left(\frac{\alpha_n}{l}\right)^2$ و $y = \sin\left(\frac{\alpha_n}{l} x\right)$ $\quad n = 1, 2, \dots$

معادله گرما:

روش جداسازی متغیرها در حل معادله گرما:

یک میله راست با مقطع عرضی یکنواخت و همگن به طول l را در نظر بگیرید. فرض کنید به میله درون محورها قرار داشته باشد. همچنین جوانب میله کاملاً عایق‌بندی شده باشند. بنابراین گرمایی از آن‌ها عبور نمی‌کند. فرض کنید گرمای u از میله فقط به زمان t و مکان x بستگی داشته باشد و نه به مولفه‌های y، z. به بیان دیگر فرض می‌کنیم در هر مقطع عرضی میله ثابت است. این فرض وقتی به مولفه‌های y و z میله نسبت به طول آن بسیار کوچک باشد قابل چشم‌پوشی است. بنابراین گرمای میله یعنی $u = u(t, x)$ تابعی بر حسب x و t است. می‌توان نشان داد که u در معادله دیفرانسیل زیر صدق می‌کند.

با مشتقات جزئی.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a^2 \frac{r}{x}$$

که در آن a کمیتی است که به جنس میله بستگی دارد که آن را قابلیت انتشار گرمایی گویند و $r(x,t)$ میزان گرمایی است که در داخل میله تولید می‌شود. در صورتی که هیچ گرمایی در داخل میله تولید نشود داریم $r = 0$ و در این صورت معادله گرمای یک بعدی همگن به صورت زیر در می‌آید:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} .$$

گاهی اوقات معادله فوق را به صورت: $u_t = a^2 u_{xx}$

برای تحقیق گرمای $u(t,x)$ از میله باید وضعیت دو سر میله مشخص شود. یعنی باید شرایط مرزی روی معادله دیفرانسیل وجود داشته باشد. اگر دما ابتدا میله برابر مقدار معین $\varphi(t)$ باشد آنگاه شرط مرزی به صورت $u(0,t)=\varphi(t)$ برای $t\geq 0$. به همین ترتیب اگر دمای انتهای میله برابر مقدار معین $\psi(t)$ باشد آنگاه شرط مرزی به صورت زیر خواهد بود

$$u(l,t)=\psi(t)\ ,\quad t\geq 0$$

اگر ابتدای میله عایق بندی شده باشد آنگاه شرط مرزی در این حالت برابر است با $u_x(0,t)=0\ ,\ t\geq 0$.

و " انتهای " " " " " " " " " " $u_x(l,t)=0\ ,\ t\geq 0$.

اگر ابتدای میله عایق بندی نشده باشد و همچنین در دمای خاصی نیز نگه داشته نشود آنگاه شرط مرزی به صورت زیر است:

$$u_x(0,t)-h\,u(0,t)=0 \qquad t\geq 0$$

که h یک ثابت است.

" " " " " " " " " " " " " " " "

$$u_x(l,t)+h\,u(l,t)=0 \qquad t\geq 0$$

که h ثابت است.

در هر حالت باید توزیع دمای اولیه در طول میله را بدانیم. این شرط اولیه نیز به صورت زیر است:

$$u(x,0)=f(x)\ ,\qquad 0<x<l$$

که f یک تابع مشخص است.

مثال: معادله با شرایط مرزی زیر را حل کنید

$$\begin{cases} u_t=a^2u_{xx} & 0<x<\pi\ ,\ t>0 \\ u(0,t)=0 \\ \underline{u(\pi,t)=0} \\ \underline{u(x,0)=f(x)} \end{cases}$$

حل: واضح است که $u(x,t)=0$ هم در معادله و هم در شرایط مرزی صدق می‌کند که آن را جواب بدیهی می‌نامیم.

برای یافتن جواب های نابدیهی ابتدا جواب های به صورت حاصلضرب دو تابع برحسب x و t در می‌یابیم.

یعنی $u(x,t)=X(x)T(t)$ پس

$$u_t(x,t)=X(x)T'(t)\quad,\quad u_{xx}=X''(x)T(t)$$

در نتیجه $u_t=a^2u_{xx}\Longrightarrow X(x)T'(t)=a^2X''(x)T(t)$

$$\Longrightarrow \frac{X''}{X}=\frac{T'}{Ta^2}$$

در معادله فوق سمت راست برحسب t و سمت چپ برحسب x است. لذا باید هر دو طرف باید مقدار ثابت برابر باشند. یعنی

$$\frac{X''}{X}=\frac{T'}{Ta^2}=-\nu$$

پس: $\frac{X''}{X}=-\nu\Longrightarrow\boxed{X''+\nu X=0}$ (1) و $\frac{T'}{Ta^2}=-\nu\Longrightarrow\boxed{T'=-a^2\nu T}$ (2)

چون $u(0,t)=0$ پس $X(0)T(t)=0$ و چون $T(t)\neq 0$ در نتیجه باید $X(0)=0$.

چون $u(\pi,t)=0$ پس $X(\pi)T(t)=0$ و چون $T(t)\neq 0$ در نتیجه باید $X(\pi)=0$.

نهایتاً داریم:

$$\begin{cases} X''+\nu X=0 & 0<x<\pi\\ X(0)=0\\ X(\pi)=0\end{cases}$$

که یک مسئله اشتورم-لیوویل است، که توابع و مقادیر ویژه نابدیهی آن به صورت زیر بود:

$$\nu_n=\lambda_n=n^2,\ (**)\quad X_n(x)=\sin nx\ ,\quad n=1,2,\dots$$

حال جواب معادله (2) را بدست می‌آوریم: $T'+a^2\nu T=0$

که یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول است.

$$\frac{dT}{T}=-a^2\nu\,dt\Rightarrow \ln(T)=-a^2\nu t$$

$$\overset{e}{\Longrightarrow} T_n(t) = e^{-a^2 \nu^2 t} \overset{\nu=n}{\Longrightarrow} T_n(t) = e^{-a^2 n^2 t}$$

و چون $u(x,t)=X(x)T(t)$ پس ؛ $u(x,t)=\sin nx \, e^{-a^2 n^2 t} \quad , n=1,2,\ldots$

پس کلی‌ترین جواب معادله‌ی ملی که در شرایط مرزی صدق کند ترکیب خطی همه جواب‌های حاصل‌ضربی است؛

$$\leftarrow \quad u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} B_n X_n(x) T_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-a^2 n^2 t} \sin nx$$

با استفاده از شرط مرزی $u(x,0)=f(x)$ داریم؛

$$u(x,0)=f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin nx$$

که B_n همان ضریب سری فوریه سینوسی تابع $f(x)$ است.

$$B_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx \, dx$$

ریاضی مهندسی

مثال: معادله با شرایط مرزی زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & 0<x<\pi \quad t>0 \\ u_x(0,t)=0 \\ u_x(\pi,t)=0 \\ u(x,0)=f(x) \end{cases}$$

حل: حل بروش تفکیک متغیرها است. فرض می‌کنیم $u(x,t)=X(x)T(t)$

پس $u_t(x,t)=X(x)T'(t)$ و $u_{xx}=X''(x)T(t)$

در نتیجه با جایگذاری مقادیر فوق در معادله دیفرانسیل اصلی داریم:

$$X(x)T'(t)=a^2X''(x)T(t)$$

و می‌توان نوشت:

$$\frac{X''}{X}=\frac{T'}{a^2T}=-\mu$$

که در نتیجه خواهیم داشت:

$$X''+\mu X=0 \quad (1) \qquad , \qquad T'+a^2\mu T=0 \quad (2)$$

وچون $u_x(0,t)=0$ پس $X'(0)T(t)=0$ پس $X'(0)=0$ وچون $u_x(\pi,t)=0$

پس $X'(\pi)=0$. بنابراین مسئله اشتورم - لیوویل زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{cases} X''+\mu X=0 \\ X'(0)=0 \\ X'(\pi)=0 \end{cases}$$

با توجه به حل مثال‌های قسمت اشتورم لیوویل جواب مسئله فوق به صورت زیر خواهد بود:

حالت اول $\mu_0=\lambda_0=0 \Longrightarrow X_0(x)=1$

حالت دوم $\mu_n=\lambda_n^2=n^2 \Longrightarrow X_n(x)=\cos nx \quad , \quad n=1,2,\dots$

حال جواب $T(t)$ را برای حالات فوق بدست می‌آوریم. فرض کنیم $\mu=0$ پس $X_0(x)=1$ وچون $T'=-a^2\mu T$

پس $T_0(t)=1$.

برای حالت $\mu_n=n^2$ داریم، از $\mu=n^2$ و $T'=-a^2\mu T$ خواهیم:

$$T=e^{-a^2n^2t}$$

پس در این حالت $X_n(x)=\cos nx$ و $T_n(t)=e^{-a^2n^2t}$. چون $u(x,t)=X(x)T(t)$ پس

حالت اول $\quad n=0 \quad$ $u_0(x,t)=X_0(x)T_0(t)=1$

$$u(x,t)=X_n(x)T_n(t)=e^{-a^2n^2t}\cos nx \qquad n=1,2,3,\dots$$

برای جواب کلی معادله اصلی که در شرط $u_x(0,t)=0$ و $u_x(\pi,t)=0$ صدق کند داریم:

$$u(x,t)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n X_n(x)T_n(t)$$

$$=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n e^{-a^2n^2t}\cos nx$$

با استفاده از شرط اولیه $u(x,0)=f(x)$ می‌توانیم ضرایب مجهول A_n را بیابیم. $(n=0,1,2,\dots)$

$$f(x)=u(x,0)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n e^{0}\cos nx=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos nx$$

که A_0 و A_n همان ضرایب سری فوریه کسینوسی تابع $f(x)$ هستند یعنی

$$A_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\,dx \quad , \quad A_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,dx$$

معادله گرما غیرهمگن:

در این بخش به دنبال یافتن جواب های معادله گرما در حالت غیرهمگن هستیم. در این مبحث سعی می کنیم حالت ها

مثال هایی را مورد بررسی قرار دهیم.

مثال: معادله زیر را به حالت همگن با شرایط مرزی همگن تبدیل کنید.

$$u_t=a^2u_{xx}+h(x) \qquad 0<x<l$$
$$u(0,t)=A$$
$$u(l,t)=B$$
$$u(x,0)=f(x)$$

حل: برای این منظور از تغییر متغیر $u(x,t) = w(x,t) + \psi(x)$ استفاده می‌کنیم. تابع ψ را طوری بدست می‌آوریم که معادله برحسب w همگن شود. پس:

$$u_t = w_t \quad , \quad u_{xx} = w_{xx} + \psi''(x)$$

$$u(0,t) = A \Longrightarrow w(0,t) + \psi(0) = A$$

$$u(l,t) = B \Longrightarrow w(l,t) + \psi(l) = B$$

با جایگذاری مقادیر فوق در تابع اصلی مسئله خواهیم داشت:

$$\begin{cases} w_t = a^2(w_{xx} + \psi''(x)) + h(x) \\ w(0,t) + \psi(0) = A \\ w(l,t) + \psi(l) = B \\ w(x,0) + \psi(x) = f(x) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} w_t = a^2 w_{xx} + a^2\psi''(x) + h(x) \\ w(0,t) = A - \psi(0) \\ w(l,t) = B - \psi(l) \\ w(x,0) = f(x) - \psi(x) \end{cases} \quad (*)$$

اگر بخواهیم مسئله (*) به یک معادله گرما همگن تبدیل شود باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} a^2\psi''(x) + h(x) = 0 \\ \psi(0) = A \\ \psi(l) = B \end{cases}$$

با این شرایط به یک مسئله گرما همگن می‌رسیم:

$$\begin{cases} w_t = a^2 w_{xx} \\ w(0,t) = 0 \\ w(l,t) = 0 \\ w(x,0) = f(x) - \psi(x) \end{cases}$$

$$u_t = a^2 u_{xx} + g(x,t) \qquad 0<x<l$$
$$u(0,t)=\varphi(t) \qquad t>0$$
$$u(l,t)=\psi(t) \qquad t>0$$
$$u(x,0)=f(x)$$

حال حالت کلی تر زیر را در نظر بگیرید

برای تبدیل مسئله به مسئله‌ای با شرایط مرزی همگن باید از تغییر متغیر زیر استفاده کنیم:

$$\boxed{u(x,t) = w(x,t) + v(x,t)}$$

که در آن $\underline{v(x,t)=c_1x+c_2}$. با استفاده از تعبیر فوق داریم:

$$\begin{cases} u(0,t)=\varphi(t)= w(0,t)+v(0,t) = w(0,t)+c_2 \\ u(l,t)=\psi(t)= w(l,t)+v(l,t)= w(l,t)+c_1 l+c_2 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \varphi(t)= \cancelto{0}{w(0,t)}+c_2 \\ \psi(t)= \cancelto{0}{w(l,t)}+c_1 l+c_2 \end{cases}$$

چون هدف این است که $w(0,t)=w(l,t)=0$ باشد پس:

$$\varphi(t)=c_2 \quad \text{و} \quad \psi(t)= c_1 l + c_2$$

$$\Longrightarrow \psi(t)= c_1 l+\varphi(t) \Longrightarrow c_1=\frac{1}{l}(\psi(t)-\varphi(t))$$

لذا تابع $v(x,t)=c_1x+c_2$ باید به صورت $\boxed{v(x,t)= \frac{x}{l}(\psi(t)-\varphi(t))+\varphi(t)}$ باشد. پس تغییر متغیر به صورت زیر خواهد بود

$$\boxed{\underline{u(x,t)}= w(x,t)+ \frac{x}{l}(\psi(t)-\varphi(t))+\varphi(t)}$$

$$u_t= w_t + \frac{x}{l}(\psi'(t)-\varphi'(t)) + \varphi'(t)$$

با جایگذاری مقادیر اخیر در مسئله اصلی داریم:

$$u_{xx} = w_{xx}$$

$$\begin{cases} w_t + \frac{x}{l}\left(\psi'(t) - \varphi'(t)\right) + \varphi'(t) = a^2 w_{xx} + g(x,t) \\ w(0,t) + \varphi(t) = \varphi(t) \\ w(l,t) + \psi(t) = \psi(t) \\ w(x,0) + \frac{x}{l}\left(\psi(0) - \varphi(0)\right) + \varphi(0) = f(x) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} w_t = a^2 w_{xx} + g(x,t) - \varphi'(t) - \frac{x}{l}\left(\psi'(t) - \varphi'(t)\right) \\ w(0,t) = 0 \\ w(l,t) = 0 \\ w(x,0) = f(x) - \varphi(0) - \frac{x}{l}\left(\psi(0) - \varphi(0)\right) \end{cases}$$

با انتخاب تغییر متغیر مناسب $u(x,t) = w(x,t) + v(x,t)$ می‌توان؛ مسئله را همگن برحسب w به صورت زیر رسید

$$\begin{cases} w_t = a^2 w_{xx} \\ w(0,t) = 0 \\ w(l,t) = 0 \\ w(x,0) = f(x) - \varphi(0) - \frac{x}{l}\left(\psi(0) - \varphi(0)\right) \end{cases}$$

اما باید داشته باشیم

$$g(x,t) = \varphi'(t) + \frac{x}{l}\left(\psi'(t) - \varphi'(t)\right)$$

حال می‌خواهیم مسئله تعمیم یافته زیر را حل کنیم:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + g(x,t) & 0 < x < l \\ u(0,t) = 0 \\ u(l,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

ابتدا باید مسئله همگن نظیر آن (بدون تابع $g(x,t)$) را حل کنیم

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & 0<x<l \\ u(0,t)=0 \\ u(l,t)=0 \\ u(x,0)=f(x) \end{cases}$$

یعنی باید مسئله روبرو را حل کنیم.

که از مثال های قبل می دانیم که این مسئله جوابی به صورت زیر دارد.

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-a^2n^2 t} \sin\frac{n\pi}{l}x$$

$$f(x)=u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi}{l}x$$

که

$$B_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx$$

برای حل قسمت ناهمگن از جواب قسمت همگن کمک می گیریم.

در قسمت همگن تابع ویژه به صورت $\sin\frac{n\pi}{l}x$ برای $n=1,2,\dots$ حاصل می شود

حال جواب معادله ناهمگن را برحسب توابع ویژه مسئله همگن می یابیم. در واقع سری فوریه تابع $u(x,t)$

را برحسب توابع ویژه قسمت همگن باید بنویسیم. فرض می کنیم جواب $u(x,t)$ به صورت سری فوریه

زیر باشد:

$$\longrightarrow u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

تا اینکه $u_n(t)$ های ضرایب سری فوریه وار تابع f حاصل شود،

$$f(x)=u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(0)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

در نتیجه

$$u_n(0)=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx$$

حال می خواهیم سری تابع $g(x,t)$ سری فوریه برحسب تابع ویژه بنویسیم،

$$g(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} g_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x\ ,\quad g_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l g(x,t)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx$$

با جایگذاری مقادیر فوق در معادله $u_t = a^2 u_{xx} + g(x,t)$ داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(t) \sin\frac{n\pi}{l}x = a^2 \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\left(-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \sin\frac{n\pi}{l}x\right) + \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t) \sin\frac{n\pi}{l}x$$

یا

$$\longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left(u_n'(t) + a^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 u_n(t)\right)\sin\frac{n\pi}{l}x = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

$$\Longrightarrow \quad u_n'(t) + \frac{a^2 n^2 \pi^2}{l^2}\, u_n(t) = g_n(t)$$

که یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول خطی است که با حل آن $u_n(t)$ بدست می‌آید.

ریاضی مهندسی

مثال: مسئله غیرهمگن زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + \underbrace{t(x^2-\pi x)}_{g(x,t)} & 0<x<\pi \ ,\ t>0 \\ u(0,t)=0 \\ u(\pi,t)=0 \\ u(x,0)=\underbrace{x}_{f(x)} \end{cases}$$

حل: ابتدا باید مسئله همگن متناظر را حل کنیم. یعنی

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} \ , & 0<x<\pi \\ u(0,t)=0 \\ u(\pi,t)=0 \\ u(x,0)=x \end{cases}$$

برای این منظور مسئله اشتورم-لیوویل آن را تشکیل داده و حل می‌کنیم.

$$X'' + \lambda X = 0 \ , \quad X(0)=0 \quad X(\pi)=0$$

توابع ویژه این مسئله به صورت زیر است: $\sin nx \ , \ n=1,2,\dots$

حال سری فوریه تابع جواب $u(x,t)$ را برحسب توابع ویژه مسئله همگن می‌نویسیم. فرض کنید سری فوریه تابع جواب $u(x,t)$ به صورت زیر باشد،

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin nx}$$

که در آن $u_n(t)$ ضرایب سری فوریه تابع $u(x,t)$ است. با استفاده از شرایط مسئله همگن داریم:

$$x = u(x,0) = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{u_n(0)}_{B_n} \sin nx}$$

یعنی $u_n(0)$ ضرایب سری فوریه سینوسی تابع x است.

$$u_n(0) = B_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \sin nx \, dx \qquad \begin{cases} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \sin nx \Rightarrow v = -\frac{1}{n}\cos nx \end{cases}$$

$$u_n(0) = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{x}{n}\cos nx + \cancel{\frac{1}{n^2}\sin nx}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n}\cos n\pi\right)$$

$$u_n(0) = -\frac{2}{n}(-1)^n$$

پس جواب معادله همگن حاصل شد. اکنون باید جواب معادله ناهمگن را حاصل کنیم. یعنی باید سری فوریه تابع $g(x,t)$

$$g(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)\sin nx$$ را بنویسیم (برحسب توابع ویژه مسئله همگن)

$$\Longrightarrow t(x^2-\pi x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)\sin nx$$ سری فوریه سینوسی تابع $t(x^2-\pi x)$

$$\Longrightarrow b_n(t)=\frac{2t}{\pi}\int_0^{\pi}(x^2-\pi x)\sin nx\,dx \qquad \begin{cases} u=x^2-\pi x \Longrightarrow du=2x-\pi \\ dv=\sin nx \Longrightarrow v=-\frac{1}{n}\cos nx \end{cases}$$

$$b_n(t)=\frac{2t}{\pi}\Big(-\frac{x^2-\pi x}{n}\cos nx+\frac{1}{n}\underbrace{\int_0^{\pi}(2x-\pi)\cos nx\,dx}\Big)$$

$$\begin{cases} u=2x-\pi \Longrightarrow du=2 \\ dv=\cos nx\,dx \Longrightarrow v=\frac{\sin nx}{n} \end{cases}$$

$$=\frac{2t}{\pi}\Big(-\frac{x^2-\pi x}{n}\cos nx+\frac{1}{n^2}(2x-\pi)\sin nx-\frac{2}{n^2}\int \sin nx\,dx\Big)$$

$$=\frac{2t}{\pi}\Big(-\frac{x^2-\pi x}{n}\cos nx+\frac{2x-\pi}{n^2}\cancel{\sin nx}+\frac{2}{n^3}\cos nx\Big]_0^{\pi}$$

$$=\frac{2t}{\pi}\Big(\frac{2}{n^3}((-1)^n-1)\Big)=\frac{4t}{n^3\pi}((-1)^n-1) \longleftarrow$$

حال عبارت فوق را در $u_t=a^2u_{xx}+t(x^2-\pi x)$ قرار میدهیم. (جواب $u(x,t)$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(t)\sin nx=a^2\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)(-n^2\sin nx)+\sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)\sin nx$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(t)\sin nx=-a^2\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)n^2\sin nx+\sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)\sin nx$$

$$\Longrightarrow u_n'(t)=-a^2u_n(t)n^2+b_n(t)$$

تذکر: یک معادله مرتبه اول $y'+p(x)y=q(x)$ است.

یادآوری

هر معادله دیفرانسیل به صورت $y'+p(x)y=q(x)$ یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول خطی نام دارد.

برای حل این نوع معادله ابتدا عامل $\mu(x)=e^{\int p(x)dx}$ تعریف کرده و سپس جواب معادله را به صورت زیر بدست می‌آوریم،

$$y=\frac{1}{\mu(x)}\left(\int \mu(x)q(x)dx+c\right)$$

$$u_n'(t)+a^2n^2u_n(t)=b_n(t) \quad , \quad y=u_n(t)$$

$$p(t)=a^2n^2 \quad q(t)=b_n(t)$$

$$\mu(t)=e^{\int a^2n^2dt}=e^{a^2n^2t}$$

$$u_n(t)=\frac{1}{e^{a^2n^2t}}\left(\int e^{a^2n^2t}b_n(t)dt+C\right)$$

$$=e^{-a^2n^2t}\left(\int e^{a^2n^2t}b_n(t)dt+c\right) \qquad u_n(0)=\frac{-2}{n}(-1)^n$$

چون بازه انتگرال‌گیری $[0,t]$ است و مقدار $u_n(0)$ مشخص است، جواب فوق به صورت زیر

حاصل می‌شود:

$$u_n(t)=e^{-a^2n^2t}u_n(0)+\int_0^t e^{-a^2n^2(t-z)}b_n(z)dz$$

که در آن $u_n(0)=-\frac{2}{n}(-1)^n$, $b_n(t)=\frac{4t((-1)^n-1)}{\pi n^3}$.

$$u_n(t)=-e^{-a^2n^2t}\frac{2(-1)^n}{n}+\int_0^t e^{-a^2n^2(t-z)}\frac{4z((-1)^n-1)}{\pi n^3}dz$$

$$=-\frac{2(-1)^n}{n}e^{-a^2n^2t}+\frac{4((-1)^n-1)}{\pi n^3}\int_0^t ze^{-a^2n^2(t-z)}dz$$

$$= -\frac{2(-1)^n}{n} e^{-a^2n^2t} + \frac{4((-1)^n-1)}{\pi n^3} e^{-a^2n^2t} \underbrace{\int_0^t z e^{a^2n^2z}\,dz}$$

$$\begin{cases} u=z \Rightarrow du=dz \\ dv=e^{a^2n^2z} \Rightarrow v=\dfrac{e^{a^2n^2z}}{a^2n^2} \end{cases}$$

$$= -\frac{2(-1)^n}{n} e^{-a^2n^2t} + \frac{4((-1)^n-1)}{\pi n^3} e^{-a^2n^2t} \left(\frac{z e^{a^2n^2z}}{a^2n^2} - \frac{e^{a^2n^2z}}{a^4n^4}\right]_0^t$$

$$= -\frac{2(-1)^n}{n} e^{-a^2n^2t} + \frac{4((-1)^n-1)}{\pi n^3} e^{-a^2n^2t} \left(\frac{t e^{a^2n^2t}}{a^2n^2} - \frac{e^{a^2n^2t}}{a^4n^4} + \frac{1}{a^4n^4}\right)$$

پس جواب معادله گرمای ناهمگن اصلی که به صورت سری فوریه زیر بود:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin nx \quad , \quad u_n(t) =$$

یادآوری: معادله دیفرانسیل مرتبه اول حاصل از معادله ناهمگن به صورت زیر را در نظر بگیرید:

$$u_n'(t) + \underbrace{\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2}_{p(t)} u_n(t) = \underbrace{g_n(t)}_{q(t)}$$

در این صورت جواب مسئله به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$u(t) = e^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 t} u_n(0) + \int_0^t e^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 (t-z)} g_n(z)\,dz$$

روش انتگرال فوریه در حل معادله گرمای نامتناهی:

قبل از شروع این بخش ابتدا یک انتگرال مهم را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

$$(*) \quad \int_0^{\infty} e^{-ax^2} \cos bx\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\frac{b^2}{4a}} \quad , \quad a>0$$

و داریم

$$F(e^{-ax^2}) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\frac{\alpha^2}{4a}}$$

از طریق دیگر:

$$\sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\frac{\alpha^2}{4a}} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\, \underbrace{e^{-i\alpha x}}_{\cos\alpha x - i\sin\alpha x}\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\cos\alpha x\, dx - i\,\cancelto{0}{\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{e^{-ax^2}}_{\text{زوج}}\, \underbrace{\sin\alpha x}_{\text{فرد}}\, dx}_{\text{تابع فرد}}}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\cos\alpha x\, dx$$

$$= 2\int_{0}^{\infty} e^{-ax^2}\cos\alpha x\, dx$$

پس:

$$\int_{0}^{\infty} e^{-ax^2}\cos\alpha x\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\frac{\alpha^2}{4a}}$$

همچنین می‌توان از استدلال فوق نتیجه گرفت که:

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

بسمه تعالی

ریاضی مهندسی ۱۴۰۰/۲/۱۹

$$\boxed{\int_0^{\infty} e^{-ax^2}\cos bx\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\frac{b^2}{4a}}} \quad , \quad a>0$$

مثال (معادله گرما در میله نامتناهی): معادله با شرایط مرزی زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} \quad , \quad -\infty < x < \infty \quad , \quad t>0 \\ x \to \pm\infty \text{ وقتی که } u(x,t) = \text{کراندار} \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

حل: جواب های معادله فوق را به صورت حاصلضربی (جدایی پذیر) در نظر می گیریم، یعنی $u(x,t) = X(x)T(t)$

پس $u_t = X(x)T'(t)$ و $u_{xx} = X''(x)T(t)$ و با جایگذاری در معادله اصلی داریم:

$$u_t = a^2 u_{xx} \implies \frac{T'}{a^2T} = \frac{X''}{X} = -\mu$$

که μ مقدار ثابت است. پس

$$X'' + \mu X = 0 \quad \text{و} \quad T' = -\mu a^2 T$$

چون وقتی $x \to \pm\infty$، $u(x,t)$ کراندار است پس وقتی $x \to \pm\infty$، $X(x)$ کراندار است پس مسئله مقدار مرزی زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{cases} X'' + \mu X = 0 & -\infty < x < \infty \\ x \to \pm\infty \text{ متناهی وقتی } X(x) \end{cases}$$

که یک مسئله اشتورم لیوویل است. دو حالت زیر را بررسی می کنیم.

حالت اول: $\mu = -\lambda^2$ که در آن $\lambda > 0$. مسئله اشتورم لیوویل به صورت زیر حاصل می شود: $X'' - \lambda^2 X = 0$

که جواب عمومی آن به صورت $X(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 e^{-\lambda x}$.

چون $\lim_{x\to\infty} e^{\lambda x} = \infty$ و $X(x)$ کراندار وقتی که $x \to \infty$ پس باید $c_1 = 0$

لذا $X(x) = c_2 e^{-\lambda x}$. در حالتی که $x \to -\infty$ داریم؛ چون $\lim_{x\to -\infty} e^{-\lambda x} = \infty$ ، $X(x)$

کراندار است در نتیجه: $c_2 = 0$. در این حالت جواب فقط جواب بدیهی است.

حالت دوم: $\mu = \lambda^2$ که در آن $\lambda > 0$؛ در این حالت داریم: $X'' + \lambda^2 X = 0$.

جواب عمومی این معادله به صورت $X(x) = c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x$ است.

می‌دانیم برای هر مقدار x و λ داریم: $|\sin \lambda x| \leq 1$ و $|\cos \lambda x| \leq 1$. پس $X(x)$ فوق

برای هر مقدار کراندار است. پس برای هر λ جواب $X_\lambda(x) = A_\lambda \cos \lambda x + B_\lambda \sin \lambda x$

یک جواب غیر بدیهی است. حال جواب $T(t)$ را می‌یابیم. داریم: $T' = -\mu a^2 T$.

در حالت $\mu = \lambda^2$ داریم: $T' = -\lambda^2 a^2 T \Longrightarrow \frac{dT}{dt} = -\lambda^2 a^2 T$

$$\Longrightarrow \frac{dT}{T} = -\lambda^2 a^2 t \Longrightarrow T = e^{-a^2 \lambda^2 t}$$

در نتیجه جواب $u(x,t) = X(x) T(t)$ به صورت زیر خواهد بود:

$$u_\lambda(x,t) = e^{-a^2\lambda^2 t}(A_\lambda \cos \lambda x + B_\lambda \sin \lambda x)$$

در نتیجه جواب کلی به صورت روبرو است: $u(x,t) = \int_0^\infty e^{-a^2\lambda^2 t}(A_\lambda \cos \lambda x + B_\lambda \sin \lambda x)\,d\lambda$

با استفاده از شرط $u(x,0) = f(x)$ داریم:

$$\to f(x) = u(x,0) = \int_0^\infty (A_\lambda \cos \lambda x + B_\lambda \sin \lambda x)\,d\lambda$$

و ضرایب A_λ و B_λ ضرایب انتگرال فوریه تابع f هستند.

$$\to A_\lambda = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \lambda x\, dx$$

$$B_\lambda = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \lambda x\, dx$$

می‌توانیم جواب را به صورت زیر نیز بدست آوریم:

$$\longrightarrow u(x,t)=\int_0^\infty e^{-a^2\lambda^2 t}\left(A_\lambda \cos\lambda x+B_\lambda \sin\lambda x\right)d\lambda$$

$$=\int_0^\infty e^{-a^2\lambda^2 t}\left[\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\cos\lambda z\,dz\right)\cos\lambda x+\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\sin\lambda z\,dz\right)\sin\lambda x\right]d\lambda$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,e^{-a^2\lambda^2 t}\cos\lambda(x-z)\,dz\,d\lambda$$

$$\cos\lambda z\cos\lambda x+\sin\lambda z\sin\lambda x=\cos(\lambda x-\lambda z)=\cos(\lambda z-\lambda x)=\cos\lambda(x-z)$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\left(\int_0^\infty e^{-a^2\lambda^2 t}\cos\lambda(x-z)\,\underline{\underline{d\lambda}}\right)dz$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a^2 t}}\;e^{-\frac{(x-z)^2}{4a^2 t}}\,dz$$

پس جواب $u(x,t)$ می‌تواند توسط انتگرال زیر حاصل شود: $(x-z=r)$

$$u(x,t)=\frac{\sqrt{\pi}}{2\pi a\sqrt{t}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-r)\,e^{-\frac{r^2}{4a^2 t}}\,dr=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int ---$$

حال اگر فرض کنیم $f(x)=e^{-|x|}$ برای $-\infty<x<\infty$ باشد آنگاه جواب معادله به صورت زیر

حاصل می‌شود:

$$A_\lambda=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|z|}\cos\lambda z\,dz=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-|z|}\cos\lambda z\,dz=\frac{2}{\pi(1+\lambda^2)}$$

$$B_\lambda=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{e^{-|z|}}_{\text{زوج}}\underbrace{\sin\lambda z}_{\text{فرد}}\,dz=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-|z|}\sin\lambda z\,dz=0$$

پس

$$u(x,t)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{1+\lambda^2}\cos\lambda x\;e^{-a^2\lambda^2 t}\,d\lambda$$

مثال (معادله گرما نیمه متناهی): معادله با شرایط مرزی زیر را حل کنید

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & 0<x<\infty,\ t>0 \\ u(0,t)=0 \\ x\to\infty \ \text{کراندار وقتی}\ u(x,t) \\ u(x,0)=f(x) \end{cases}$$

فرض کنیم جواب به صورت حاصلضربی $u(x,t)=X(x)T(t)$ باشد.

مانند مثال قبل به مسئله اشتورم-لیوویل زیر می‌رسیم: $X''+\nu X=0$, $T'=-\nu a^2 T$

چون $u(0,t)=0$ پس $X(0)T(t)=0$ در نتیجه $X(0)=0$.

و چون وقتی $x\to\infty$ ، $u(x,t)$ کراندار است پس $X(x)$ کراندار است و در نتیجه مسئله مقدار مرزی زیر را خواهیم داشت:

$$X''+\nu X=0 \qquad 0<x<\infty$$
$$X(0)=0$$

$X(x)$ متناهی است وقتی $x\to\infty$.

دو حالت زیر را بررسی می‌کنیم:

حالت اول $\nu=-\lambda^2$ که $\lambda>0$: در این حالت داریم:

$$\begin{cases} X''-\lambda^2 X=0 & 0<x<\infty \\ X(0)=0 \\ x\to\infty \ \text{متناهی}\ X(x) \end{cases}$$

جواب عمومی $X''-\lambda^2X=0$ به صورت زیر است: $X(x)=c_1\cosh\lambda x+c_2\sinh\lambda x$

چون $X(0)=0$ پس $c_1=0$ در نتیجه $X(x)=c_2\sinh\lambda x$. در حالی که $x\to\infty$

باید $X(x)$ کراندار باشد اما $\lim_{x\to\infty}\sinh\lambda x=\infty$ پس $c_2=0$ در نتیجه در این حالت $X(x)=0$ جواب بدیهی است.

حالت دوم، $\nu=\lambda^2$ که $\lambda>0$: در این حالت به یک مسئله اشتورم لیوویل به صورت زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} X''+\lambda^2 X=0 & 0<x<\infty \\ X(0)=0 \\ x\to\infty \ \text{متناهی است}\ X(x) \end{cases}$$

در این حالت جواب عمومی به صورت $X(x)=c_1\cos\lambda x+c_2\sin\lambda x$ است.

چون $X(0)=0$ پس $c_1=0$ درنتیجه $X(x)=c_2\sin\lambda x$. وچون موقعی که $x\to\infty$

داریم که $X(x)$ مرزدار است و $|\sin\lambda x|\leq 1$ پس $X_\lambda(x)=\sin\lambda x$ یک جواب.

همچنین بین معادلات . از $T'=-\lambda^2a^2T$ داریم $T'=-\lambda^2a^2T \Rightarrow T(t)=e^{-a^2\lambda^2t}$

پس جواب حاصلضربی به صورت زیر حاصل می شود

$$u_\lambda(x,t)=X_\lambda(x)\,T_\lambda(x)$$
$$=e^{-a^2\lambda^2t}\sin\lambda x \qquad \lambda>0$$

درنتیجه فرم کلی جواب به صورت زیر حاصل می شود:

$$u(x,t)=\int_0^\infty B_\lambda\, e^{-a^2\lambda^2t}\sin\lambda x\, d\lambda$$

و با داشتن شرط اولیه $f(x)=u(x,0)$ داریم:

$$f(x)=u(x,0)=\int_0^\infty B_\lambda \sin\lambda x\, d\lambda$$

درنتیجه B_λ ضریب انتگرال فوریه سینوسی تابع $f(x)$ است. یعنی $B_\lambda=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\sin\lambda x\, dx$

بنابراین جواب سوال به صورت زیر است:

$$u(x,t)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left(\int_0^\infty f(z)\, e^{-a^2\lambda^2t}\sin\lambda z\sin\lambda x\, dz\right)d\lambda$$

مثلاً اگر تابع f به صورت $f(x)=\begin{cases}\pi-x & 0\leq x\leq\pi\\ 0 & x>\pi\end{cases}$ باشد آنگاه:

$$B_\lambda=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi(\pi-z)\sin\lambda z\, dz=\frac{2}{\pi}\left(1-\frac{\sin\lambda\pi}{\lambda\pi}\right)$$

درنتیجه جواب به صورت:

$$u(x,t)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left(1-\frac{\sin\lambda\pi}{\lambda\pi}\right)\sin\lambda x\, e^{-a^2\lambda^2t}\, d\lambda$$

بسمه تعالی

ریاضی مهندسی

روش تبدیل فوریه در حل معادله گرما نامتناهی:

مثال: معادله با شرایط مرزی زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & -\infty < x < \infty \quad , \quad t > 0 \\ x \to \pm\infty & u(x,t) \text{ کراندار و محدود} \\ \underline{u(x,0) = f(x)} & \end{cases}$$

فرض کنید $F(u(x,t)) = U(\alpha,t)$ تبدیل فوریه $u(x,t)$ نسبت به x باشد. در این صورت:

$$U(\alpha,t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\, e^{-i\alpha x}\, dx$$

و می‌دانیم تبدیل فوریه معکوس داشتیم:

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} U(\alpha,t)\, e^{+i\alpha x}\, d\alpha$$

$$F(u_{xx}(x,t)) = (i\alpha)^2 F(u(x,t)) = -\alpha^2 U(\alpha,t)$$

$$F(u_t(x,t)) = \frac{\partial}{\partial t} F(u(x,t)) = \frac{\partial}{\partial t} U(\alpha,t)$$

$$F(f(x)) = F(u(x,0)) = U(\alpha,0)$$

با جایگذاری مقادیر فوق در معادله داریم:

$$F(u_t) = a^2 F(u_{xx}) \Longrightarrow \frac{\partial}{\partial t} U(\alpha,t) = -a^2\alpha^2 U(\alpha,t)$$

که یک معادله مرتبه اول خطی است که با حل آن داریم:

$$U(\alpha,t) = U(\alpha,0)\, e^{-a^2\alpha^2 t} = F(f(x))\, e^{-a^2\alpha^2 t}$$

می‌دانیم:

$$F^{-1}\left(e^{-\frac{\alpha^2}{4a}}\right) = \sqrt{\frac{a}{\pi}}\, e^{-ax^2} \quad \text{پس} \quad F\left(e^{-ax^2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\frac{\alpha^2}{4a}}$$

درنتیجه، یا $F^{-1}\left(e^{-a^2\alpha^2 t}\right) = \dfrac{1}{2a\sqrt{t}}\sqrt{\dfrac{a}{\pi}}\; e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}$

$$F^{-1}\left(e^{-a^2\alpha^2 t}\right) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\, e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}$$

پس

$$u(x,t) = F^{-1}\left(U(\alpha,t)\right) = F^{-1}\left(F(f(x)) \times e^{-a^2\alpha^2 t}\right)$$

$$= F^{-1}\left(F(f(x))\right) * \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\, e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}$$

$$= f(x) * \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\, e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}$$

مثال: با استفاده از تبدیل فوریه مناسب معادله گرما نیمه متناهی زیر را حل کنید. $x>0,\ t>0$

$$F_c \rightarrow \begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u_x(0,t) = \varphi(t) \\ u(x,0) = 0 \end{cases}$$

حل. در تبدیل فوریه داشتیم، برای تبدیل فوریه کسینوسی

$$F_c\left(f''(x)\right) = -\alpha^2 F_c\left(f(x)\right) - f'(0)$$

$$F_c(u_{xx}) = -\alpha^2 F_c(u) - u_x(0,t) = -\alpha^2 F_c(u) - \varphi(t)$$

از طرفین معادله اصلی F_c می‌گیریم. درنتیجه داریم:

$$F_c(u_t) = F_c(u_{xx}) \Longrightarrow \frac{\partial}{\partial t} U(\alpha,t) = -\alpha^2 F_c(u) - \varphi(t)$$

که یک معادله مرتبه اول خطی برحسب $U(\alpha,t)$ است. لذا داریم:

$$U(\alpha,t) = e^{-\alpha^2 t}\left(-\int_0^t e^{\alpha^2 z}\varphi(z)\,dz + c\right)$$

و چون $u(x,0)=0$ پس $U(\alpha,0)=0$ درنتیجه: $c=0$ و جواب به صورت:

$$u(\alpha,t)=e^{-\alpha^2 t}\left(-\int_0^t e^{\alpha^2 z}\varphi(z)\,dz\right)$$

$$=-\int_0^t \varphi(z)\,e^{-\alpha^2(t-z)}\,dz$$

با استفاده از فوریه معکوس کسینوسی داریم:

$$F^{-1}(u(\alpha,t))=u(x,t)$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \underbrace{u(\alpha,t)}\cos\alpha x\,d\alpha$$

$$=-\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left(\int_0^t \varphi(z)\,e^{-\alpha^2(t-z)}\,dz\right)\cos\alpha x\,d\alpha$$

$$=-\frac{2}{\pi}\int_0^t \varphi(z)\left(\underbrace{\int_0^\infty e^{-\alpha^2(t-z)}\cos\alpha x\,d\alpha}\right)dz$$

$$\boxed{\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}\cos bx\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\;e^{-\frac{b^2}{4\alpha}}}$$

$$=-\frac{2}{\pi}\int_0^t \varphi(z)\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t-z}}\;e^{-\frac{x^2}{4(t-z)}}\right)dz$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t \varphi(z)\,\frac{1}{\sqrt{t-z}}\,e^{-\frac{x^2}{4(t-z)}}\,dz$$

معادله لاپلاس: معادله گرما یک بعدی را می‌توانیم تعمیم دهیم. یک صفحه بسیار نازک که دارای صورت که دو طرف آن کاملاً عایق شده را در نظر بگیرید. در این صورت معادله گرما صفحه عبارت است از:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

که در آن $u=u(x,y,t)$. در اینجا معادله گرما مستقل از زمان که به معادله لاپلاس مشهور است

مورد بررسی قرار می‌دهید. یعنی معادله لاپلاس دوبعدی $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$.

جهت راحتی کار می‌توان از نماد ∇^2 استفاده نمود و به جای $\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ نوشت؛

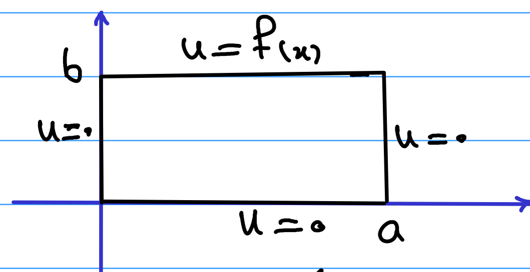
معادله لاپلاس را می‌توان با نماد لاپلاسین (دلتا دو) به صورت زیر نوشت؛

$$\nabla^2 u = 0$$

می‌توان همان روش های تفکیک متغیرها را نیز برای حل معادله لاپلاس به کار برد.

مثال: معادله لاپلاس با شرایط مرزی زیر را حل کنید. $u_{xx}+u_{yy}=0,\quad 0<x<a,\quad 0<y<b$

$$\begin{cases} u(0,y)=0 \\ u(a,y)=0 \\ u(x,0)=0 \\ u(x,b)=f(x) \end{cases}$$



جواب مسئله را به صورت حاصلضربی در نظر می‌گیریم؛ $u(x,y)=X(x)Y(y)$، چون $u(0,y)=0$

پس $X(0)Y(y)=0$ درنتیجه $X(0)=0$ و به طور مشابه چون $u(x,0)=0$ پس $Y(0)=0$

لذا مسئله اشتورم-لیوویل به صورت زیر را خواهیم داشت؛

$$u_{xx}+u_{yy}=0$$
$$X''(x)Y(y)+X(x)Y''(y)=0$$

$$\Rightarrow X''Y=-XY'' \Longrightarrow \frac{X''}{X}=-\frac{Y''}{Y}=-\mu \Rightarrow \begin{cases} X''+\mu X=0 \\ Y''-\mu Y=0 \end{cases}$$

جواب مسئله اشتورم-لیوویل روبرو هم به صورت زیر حاصل می‌شود؛

$$\begin{cases} X''+\mu X=0 \\ X(0)=0 \\ X(a)=0 \end{cases}$$

$$\mu_n=\lambda_n^2=\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2,\quad \underline{\underline{X_n(x)=\sin\frac{n\pi}{a}x}},\quad n=1,2,\dots$$

اکنون جواب $Y(y)$ را می‌یابیم؛ $Y''-\mu Y=0$ جواب معادله اخیر به صورت؛

$$Y(y)=c_1\cosh\lambda y+c_2\sinh\lambda y$$

و چون $Y(0)=0$ پس $c_1=0$ و لذا $Y(y)=c_2\sinh\lambda y$. در نتیجه جواب متناظر

با $\nu_n=\lambda_n^2=\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$ برابر است با: $Y_n(y)=\sinh\frac{n\pi}{a}y$

لذا جواب حاصلضربی به صورت زیر است:

$$u(x,y)=X(x)Y(y)=\sin\frac{n\pi}{a}x\,\sinh\frac{n\pi}{a}y\,,\quad n=1,2,\ldots$$

جواب کلی مسئله فوق عبارت است از:

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{n\pi}{a}x\,\sinh\frac{n\pi}{a}y$$

با استفاده از شرایط اولیه $u(x,b)=f(x)$ داریم:

$$f(x)=u(x,b)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{n\pi}{a}x\,\sinh\frac{n\pi}{a}b$$

که ضریب سری فوریه سینوسی تابع $f(x)$ است. یعنی:

$$B_n\sinh\frac{n\pi}{a}b=\frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin\frac{n\pi}{a}x\,dx\,.$$

بسمه تعالی

ریاضی مهندسی

مثال: $u(x,y)$ را بیابید هرگاه:

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0 & 0<x<a \ , \ y>0 \\ u(x,0)=f(x) & 0<x<a \\ u(0,y)=g_1(y) & y\geq 0 \\ u(a,y)=g_2(y) & y\geq 0 \end{cases}$$

حل: مسأله بوبروبرو را به دو مسئله به فرم زیر تفکیک می‌دهیم:

ابتدا $u(x,y)=v(x,y)+w(x,y)$ در آن:

$$(*)\begin{cases} v_{xx}+v_{yy}=0 \\ v(x,0)=f(x) \\ v(0,y)=0 \\ v(a,y)=0 \end{cases} \checkmark \qquad \text{و} \quad (**)\begin{cases} w_{xx}+w_{yy}=0 \\ w(x,0)=0 \\ \underline{w(0,y)}=\underline{g_1(y)} \\ \underline{w(a,y)}=\underline{g_2(y)} \end{cases} \checkmark$$

تابع $v(x,y)$ در سوالات قبل حل شده است. اکنون حاصل مسئله $(**)$ را بدست می‌آوریم. برای این منظور

فرض می‌دهیم $w(x,y)=X(x)Y(y)$ و با قراردادن در مسأله اصلی داریم: $\frac{X''}{X}=-\frac{Y''}{Y}=\mu$ ، $Y(0)=0$

حالت $\mu<0$ به جواب‌هایی از Y منجر می‌شود که نمایی و صعودی است. با توجه به فرض کراندار

بودن $Y(y)$ وقتی که $y\longrightarrow\infty$ این حالت جواب بدست نمی‌دهد. در حالت $\mu\geq 0$ داریم:

$\mu=\lambda^2$ و در این صورت مسأله اشتورم ـ لیوویل $Y''+\lambda^2Y=0$ را خواهیم داشت که

به جواب $Y(y)=c_1\cos\lambda y+c_2\sin\lambda y$. چون $Y(0)=0$ پس $c_1=0$ و

در این صورت برای $\lambda>0$ جواب به صورت $\longleftarrow$ $Y_\lambda(y)=\sin\lambda y$ حاصل می‌شود.

برای جواب X داریم که $\mu=\lambda^2$ و $\underline{X''-\lambda^2X=0}$ که جواب آن به صورت زیر است:

$$\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2} \ , \ \cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

$$\rightarrow X_\lambda(x) = \frac{A_\lambda}{\sinh\lambda a}\sinh\lambda x + \frac{B_\lambda}{\sinh\lambda a}\sinh\lambda(a-x)$$

پس جواب حاصلضربی به صورت زیر بدست می‌آید:

$$w(x,y)=\sin\lambda y\left(\frac{A_\lambda}{\sinh\lambda a}\sinh\lambda x + \frac{B_\lambda}{\sinh\lambda a}\sinh\lambda(a-x)\right)$$

اما فرم کلی این جواب به صورت انتگرال زیر بدست می‌آید:

$$w(x,y)=\int_0^\infty\left[A(\lambda)\frac{\sinh\lambda x}{\sinh\lambda a} + B(\lambda)\frac{\sinh\lambda(a-x)}{\sinh\lambda a}\right]\sin\lambda y\, d\lambda$$

از شرایط مرزی خواهیم داشت:

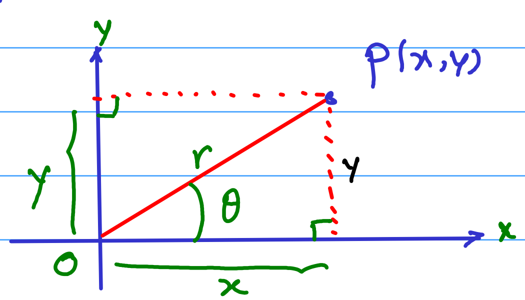
$$w(0,y)=g_1(y)=\int_0^\infty \underline{B(\lambda)}\sin\lambda y\, d\lambda$$

$$w(a,y)=g_2(y)=\int_0^\infty \underline{A(\lambda)}\sin\lambda y\, d\lambda$$

بنابراین $A(\lambda)$ و $B(\lambda)$ ضرایب انتگرال فوریه سینوسی توابع g_2 و g_1 هستند.

معادله لاپلاس روی دایره (مختصات قطبی)

فرض کنید $p(x,y)$ نقطه‌ای در صفحه دکارتی باشد. می‌خواهیم این نقطه را توسط دو پارامتر دیگر مانند r و θ توصیف کنیم. فاصله نقطه p با مبدأ O را با r و زاویه مثبت محور xها تا خط OP را با θ نمایش می‌دهیم.



با نوشتن روابط مثلثاتی $\sin$، $\cos$ و $\tan$ زاویه θ

خواهیم داشت: $\sin\theta = \frac{y}{r} \Rightarrow y = r\sin\theta$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \Rightarrow x = r\cos\theta$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \Longrightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

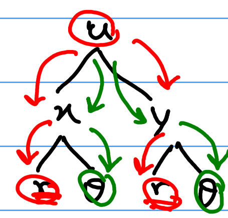
تا با داشتن x و y مختصات نقطه P را توسط روابط
$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$
به مختصات قطبی تبدیل کنیم

و با عکس از روابط
$$\begin{cases} x^2+y^2=r^2 \\ \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}$$
برای معکوس آن کمک می‌گیریم.

مثلاً نقطه $P(1,1)$ در صفحه دکارتی نمایش چه نقطه‌ای در مختصات قطبی است؟ $P(1,1) \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

$$r^2 = x^2+y^2 \Rightarrow r^2 = 1+1 = 2 \rightarrow r=\sqrt{2}$$
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4}$$
$$\Bigg\} \quad \underline{P(r,\theta) = P\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)}$$

حال اگر $u = u(x,y)$ آنگاه با قرار دادن
$$\begin{cases} \underline{x = r\cos\theta} \checkmark \\ \underline{y = r\sin\theta} \checkmark \end{cases}$$
می‌توان u را به عنوان تابعی از (r,θ) در نظر گرفت. می‌خواهیم معادله لاپلاس $\underline{u_{xx}+u_{yy}=0}$ را در مختصات قطبی بیان کنیم.



$$\underline{u_r} = \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}$$
$$= u_x\cos\theta + u_y\sin\theta \longleftarrow$$

$$u_{rr} = \cos\theta\,(u_x)_r + \sin\theta\,(u_y)_r$$
$$= \cos\theta\, u_{xx}\, \overset{\cos\theta}{x_r} + \sin\theta\, u_{yy}\, \overset{\sin\theta}{y_r}$$
$$= u_{xx}\cos^2\theta + u_{yy}\sin^2\theta \leftarrow$$

$$f(g(x))' = g'(x) \times f'(g(x))$$

$$u_\theta = u_x x_\theta + u_y y_\theta = u_x(-r\sin\theta) + u_y(r\cos\theta)$$
$$= \underline{r}\, u_y\cos\theta - r\, u_x\sin\theta \longleftarrow$$

$$u_{\theta\theta} = r\,\underline{(u_y)_\theta}\cos\theta - r\sin\theta\, u_y - r\,\underline{(u_x)_\theta}\sin\theta - r\cos\theta\, u_x$$

$$= r\cos\theta\, u_{yy}\overset{r\cos\theta}{y_\theta} - r\sin\theta\, u_y - r\sin\theta\, u_{xx}\overset{-r\sin\theta}{x_\theta} - r\cos\theta\, u_x$$

$$\longrightarrow \quad = r^2\cos^2\theta\, u_{yy} - r\sin\theta\, u_y + r^2\sin^2\theta\, u_{xx} - r\cos\theta\, u_x$$

اکنون داریم:

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \underline{\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}} =$$

$$= u_{xx}\cos^2\theta + u_{yy}\sin^2\theta + \frac{1}{r}\cancel{u_x\cos\theta} + \frac{1}{r}\cancel{u_y\sin\theta}$$

$$+ \cos^2\theta\, u_{yy} - \frac{1}{r}\cancel{\sin\theta\, u_y} + \sin^2\theta\, u_{xx} - \frac{1}{r}\cancel{\cos\theta\, u_x}$$

$$= u_{xx}(\sin^2\theta + \cos^2\theta) + u_{yy}(\cos^2\theta + \sin^2\theta)$$

$$= u_{xx} + u_{yy}$$

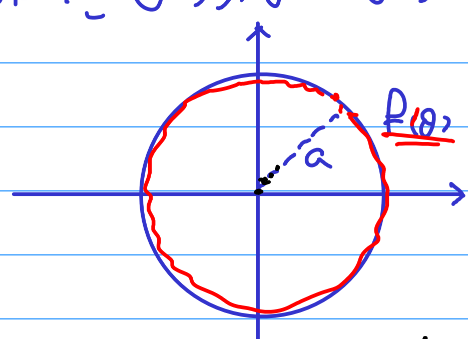
پس معادله لاپلاس در مختصات قطبی برابر است با:

$$\boxed{u_{xx} + u_{yy} = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}}$$

مثال: دمای مستقل از زمان یک صفحه دایره‌ای شکل به شعاع a که دمای روی مرز آن $f(\theta)$ است را بیابید.

$$\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0 & r<a \\ \underline{u(a,\theta) = f(\theta)} & \underline{-\pi < \theta \leq \pi} \end{cases}$$

حل: یعنی باید مسئله زیر را حل کنیم



همواره در مختصات قطبی داریم: $\underline{(r,\theta)} = \underline{(r, \theta + 2n\pi)}$ پس برای تابع u داریم:

$$u(r,\theta) = u(r, \theta + 2n\pi)$$

لذا u تابعی متناوبی است پس داریم:
$$\begin{cases} u(r,\pi)=u(r,-\pi)\\ u_\theta(r,\pi)=u_\theta(r,-\pi)\end{cases}$$

همچنین زمانی که $r\to 0^+$ باید تابع $u(r,\theta)$ کراندار باشد.

اکنون جواب $u(r,\theta)$ را تفکیک پذیر به صورت $u(r,\theta)=R(r)\varphi(\theta)$ در نظر می‌گیریم.

با جایگذاری در معادله لاپلاس داریم:
$$u_r=R'(r)\varphi(\theta)\quad,\quad u_{rr}=R''(r)\varphi(\theta)$$
$$u_{\theta\theta}=R(r)\varphi''(\theta)$$
$$u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=R''(r)\varphi(\theta)+\frac{1}{r}R'(r)\varphi(\theta)+\frac{1}{r^2}R(r)\varphi''(\theta)=0$$
$$\Longrightarrow \left(R''(r)+\frac{1}{r}R'(r)\right)\varphi(\theta)=-\frac{1}{r^2}R(r)\varphi''(\theta)$$
$$\underbrace{-\frac{\varphi''}{\varphi}}_{\text{برحسب } \theta}=\underbrace{\frac{r^2R''(r)+rR'(r)}{R(r)}}_{\text{برحسب } r}=\nu$$

پس دستگاه زیر را داریم:
$$\begin{cases}\varphi''+\nu\varphi=0\\ r^2R''+rR'-\nu R=0\end{cases}$$

حالت اول: $\nu=0$: در این حالت $\varphi''=0$ در نتیجه $\varphi=c_1+c_2\theta$. چون φ باید نسبت به θ متناوبی باشد پس $c_2=0$ در نتیجه $\varphi=c_1$ حال برای $\nu=0$ برای معادله دوم داریم:
$$r^2R''+rR'=0\Longrightarrow R(r)=a_1+a_2\ln r$$

و چون وقتی $r\to 0^+$ ، R باید کراندار باشد پس $a_2=0$ و $R(r)=a_1$ بنابراین در حالت $\nu=0$

جواب به صورت $\varphi(\theta)=1$, $R(r)=1$

حالت دوم $\nu=-\lambda^2<0$. در این حالت معادله اول به صورت $\varphi''-\lambda^2\varphi=0$ است با:

که جواب آن برابر است با: $\varphi(\theta)=c_1\cosh\lambda\theta+c_2\sinh\lambda\theta$

وچون φ باید تناوبی باشد اما توابع $\sinh$ و $\cosh$ تناوبی نیستند لذا $c_1=c_2=0$.

لذا در این حالت فقط جواب صفر را داریم.

حالت سوم: $\nu=\lambda^2>0$. در این حالت معادله اول برابر است با: $\varphi''+\lambda^2\varphi=0$

که جواب آن به صورت: $\varphi(\theta)=c_1\cos\lambda\theta+c_2\sin\lambda\theta$

وچون هم $\sin$ و هم $\cos$ تناوبی هستند برای $\lambda=n$ که $n=1,2,\dots$

داریم: $\longrightarrow \varphi_n(\theta)=a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta$

جواب برای $R(r)$ را نیز پیدا می‌کنیم: $\lambda^2=n^2$: $r^2R''+rR'-n^2R=0$

که معادله دیفرانسیل است و جواب آن برابر است با: $R(r)=c_1r^n+\underline{\underline{c_2r^{-n}}}$

وچون $r\to0^+$ باید $R(r)$ متناهی باشد پس $c_2=0$ یعنی $R(r)=c_1r^n$

در نتیجه، جواب حاصلضربی مسئله عبارت است از:

$$\begin{cases}u_0(r,\theta)=R_0(r)\,\varphi_0(\theta)=1\\ u_n(r,\theta)=R_n(r)\,\varphi_n(\theta)=r^n(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta), \quad n=1,2,\dots\end{cases}$$

و جواب کلی آن برابر است:

$$u(r,\theta)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta)\,r^n$$

با استفاده از شرط اولیه $u(a,\theta)=f(\theta)$ داریم:

$$u(a,\theta)=A_0+a^n\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta)$$

که ضرایب A_0 ، A_n و B_n به صورت زیر حاصل می‌شوند:

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\, d\theta$$

$$A_n = \frac{1}{a^n \pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos n\theta \, d\theta$$

$$B_n = \frac{1}{a^n \pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sin n\theta \, d\theta$$

بسمه تعالی

ریاضی مهندسی

روش دالامبر در حل معادله موج:

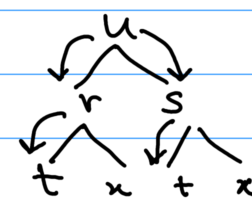
این روش بر مبنای یک تغییر متغیر مناسب است. فرض کنید یک سیم مرتعش نامتناهی داریم که معادله موج آن به صورت زیر باشد:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} & -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \\ u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$$

تغییر متغیر زیر را در نظر می‌گیریم:

$$s = x + at, \qquad r = x - at$$

با تغییرات فوق u تابعی از r و s خواهد بود. با استفاده از قاعده زنجیره‌ای داریم:



$$\frac{\partial r}{\partial x} = r_x = 1, \qquad \frac{\partial s}{\partial x} = s_x = 1$$

$$u_x = u_r \cdot \cancel{r_x}^{\,1} + u_s \cdot \cancel{s_x}^{\,1} = u_r + u_s \qquad u_{rs} \cdot \cancel{s_x}^{\,1}$$

$$u_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(u_r) + \frac{\partial}{\partial x}(u_s) = u_{rr} \cdot \cancel{r_x}^{\,1} + \underbrace{u_{sr} \cdot \cancel{r_x}^{\,1} + u_{ss}\, \cancel{s_x}^{\,1}}$$

$$= u_{rr} + u_{rs} + u_{sr} + u_{ss} \quad \Rightarrow \quad u_{rs} = u_{sr}$$

چون u تابعی مشتق‌پذیر برحسب r و s است

$$\boxed{u_{xx} = u_{rr} + 2u_{rs} + u_{ss}} \qquad (1)$$

به طور مشابه: $r_t = \frac{\partial r}{\partial t} = -a$ و $s_t = \frac{\partial s}{\partial t} = a$ پس:

$$u_t = u_r \cdot \cancel{r_t}^{\,-a} + u_s \cdot \cancel{s_t}^{\,a} = a u_s - a u_r$$

$$u_{tt} = \frac{\partial}{\partial t}(u_t) = a \frac{\partial}{\partial t}(u_s) - a \frac{\partial}{\partial t}(u_r)$$

$$= a\left(u_{sr}\overset{-a}{\cancel{r_t}} + u_{ss}\overset{a}{\cancel{s_t}}\right) - a\left(u_{rr}\overset{-a}{\cancel{r_t}} + u_{rs}\overset{a}{\cancel{s_t}}\right)$$

$$= -a^2 u_{sr} + a^2 u_{ss} + a^2 u_{rr} - a^2 u_{rs} \qquad u_{rs} = u_{sr}$$

$$\boxed{u_{tt} = a^2 u_{rr} + a^2 u_{ss} - 2a^2 u_{rs}} \quad (2)$$

با جایگذاری مقادیر (1) و (2) در معادله اصلی داریم:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

$$\Longrightarrow a^2\cancel{u_{rr}} + a^2\cancel{u_{ss}} - 2a^2 u_{rs} = a^2\cancel{u_{rr}} + a^2\cancel{u_{ss}} + 2a^2 u_{rs}$$

$$\Longrightarrow 4a^2 u_{rs} = 0 \Longrightarrow u_{rs} = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial s} = 0 \xrightarrow{\int dr} \frac{\partial u}{\partial s} = \alpha(s)$$ دلخواه

$$\xrightarrow{\int ds} u = \int \alpha(s)\, ds + \psi(r)$$

پس می‌توان نوشت $\boxed{u = \varphi(s) + \psi(r)}$ با جایگذاری مقادیر $S = x+at$ و $r = x-at$

خواهیم داشت:

$$u = \varphi(x+at) + \psi(x-at)$$

با استفاده از شرایط اولیه $u(x,0) = f(x)$ و $u_t(x,0) = g(x)$ داریم:

$$\boxed{u(x,0) = f(x) = \varphi(x) + \psi(x)} \qquad u_t(x,t) = a\varphi'(x+at) - a\psi'(x-at)$$

$$u_t(x,0) = g(x) = a\varphi'(x) - a\psi'(x)$$

یا

$$g(x) = a(\varphi'(x) - \psi'(x)) \Longrightarrow \varphi'(x) - \psi'(x) = \frac{1}{a} g(x)$$

با انتگرال‌گیری داریم:

$$\varphi(x)-\psi(x)=\frac{1}{a}\int_{x_0}^{x} g(s)\,ds+k$$

که x_0 و $k \in \mathbb{R}$. پس:

$$\begin{cases}\varphi(x)+\psi(x)=f(x)\\ \varphi(x)-\psi(x)=\dfrac{1}{a}\displaystyle\int_{x_0}^{x} g(s)\,ds+k\end{cases}$$

دستگاه دو معادله دو مجهول فوق را حل می‌کنیم و داریم:

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x} g(s)\,ds+\frac{k}{2}$$

$$\psi(x)=\frac{1}{2}f(x)-\frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x} g(s)\,ds-\frac{k}{2}$$

پس جواب معادله برابر است با:

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\varphi(x+at)+\psi(x-at)\\&=\frac{1}{2}f(x+at)+\frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x+at} g(s)\,ds+\frac{1}{2}f(x-at)-\frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x-at} g(s)\,ds\\&=\frac{1}{2}\big(f(x+at)+f(x-at)\big)+\frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x+at} g(s)\,ds+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x_0} g(s)\,ds\\&=\frac{1}{2}\big(f(x+at)+f(x-at)\big)+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} g(s)\,ds\end{aligned}$$

مثال: با استفاده از روش دالامبر مسئله تار مرتعش نامتناهی زیر را حل کنید.

$$\begin{cases}u_{tt}=a^2u_{xx} & -\infty<x<\infty\,,\ t>0\\ u(x,0)=\sin x=f\\ u_t(x,0)=\cos x=g\end{cases}$$

حل: جواب به صورت زیر است:

$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\sin(x+at) + \sin(x-at)\right) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \cos(s)\, ds$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sin x \cos at + \cancel{\cos x \sin at} + \sin x \cos at - \cancel{\cos x \sin at}\right) + \cdots$$

$$= \sin x \cos at + \frac{1}{2a}\left(\sin s\right]_{x-at}^{x+at}$$

$$= \sin x \cos at + \frac{1}{2a}\left(\sin(x+at) - \sin(x-at)\right)$$

$$= \sin x \cos at + \frac{1}{2a}\left(2 \cos x \sin at\right)$$

$$= \sin x \cos at + \frac{1}{a} \cos x \sin at$$

مثال: (تار مرتعش نیمه متناهی با انتهای ثابت): با استفاده از روش دالامبر مسئله تار مرتعش زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} & 0 < x < \infty, \quad t > 0 \\ u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \\ u(0,t) = 0 \end{cases}$$

حل: جواب مسئله به روش دالامبر برابر $u(x,t) = \varphi(x+at) + \psi(x-at)$ است که با شرط مرزی داریم: $x_0 = 0$. پس

$$\to \varphi(x) = \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2a}\int_0^x g(s)\, ds + \frac{k}{2}$$

$$\psi(x) = \frac{1}{2} f(x) - \frac{1}{2a}\int_0^x g(s)\, ds - \frac{k}{2}$$

برای وقتی که $x-at > 0$ از روابط بالا داریم: (جواب مانند حالت قبل است)

$$\checkmark\ u(x,t) = \frac{1}{2}\left(f(x+at) + f(x-at)\right) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} g(s)\, ds, \quad x-at > 0$$

در حالتی که $x-at < 0$ با استفاده از شرط مرزی $u(x,t) = 0$ داریم:

$$u(x,t)=\varphi(x+at)+\psi(x-at)$$

$$0=u(0,t)=\varphi(at)+\psi(-at)\Longrightarrow \psi(-at)=-\varphi(at)$$

لذا اگر در عبارت فوق $-at$ را به $x-at$ برای $x-at<0$ تبدیل کنیم داریم،

$$\psi(x-at)=-\varphi(at-x)$$

لذا جواب به صورت زیر است،

$$u(x,t)=\varphi(x+at)+\psi(x-at)$$

$$=\varphi(x+at)-\varphi(at-x)$$

$$=\frac{1}{2}f(x+at)+\frac{1}{2a}\int_0^{x+at}g(s)\,ds-\frac{1}{2}f(at-x)-\frac{1}{2a}\int_0^{at-x}g(s)\,ds$$

$$=\frac{1}{2}\big(f(x+at)-f(at-x)\big)+\frac{1}{2a}\int_{at-x}^{x+at}g(s)\,ds.$$

مثال، مسئله تار مرتعش نیمه متناهی زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} u_{tt}=\overset{a^2}{4}\,u_{xx} & x>0\\ u(0,t)=0 & \\ u(x,0)=|\sin x| =f & \\ u_t(x,0)=0=g & \end{cases}$$

حل، با استفاده از روابط بالا داریم،

اگر $x-2t>0$ آنگاه $u(x,t)=\frac{1}{2}\big(|\sin(x+2t)|+|\sin(x-2t)|\big)$

اگر $x-2t<0$ آنگاه $u(x,t)=\frac{1}{2}\big(|\sin(x+2t)|-|\sin(2t-x)|\big)$