نگاهي به هندسه هاي نااقليدسي

فريدون رهبرنيا ومحمد صال مصلحيان
گروه رياضي دانشگاه فردوسي

۱. درآمد

باور مردم از زمان يونانيان باستان تا قرن نوزدهم اين بود كه هندسة اقليدسي حقيقت محض و بي كاستي است كه فضاي مادي را به طور كامل توجيه مي كند. حتي كانت اعتقاد داشت كه هندسة اقليدسي ذاتي ساختار ذهن انسان است اما هندسه دانان قرن نوزدهم نشان دادند كه اولا" هندسة اقليدسي تنها هندسة ممكن نيست، ثانيا اين كه هندسه فضاي مادي اقليدسي يا نااقليدسي است، امري تجربي است كه خارج از حيطة رياضيات محض مي باشد و ثالثا هندسة اقليدسي سازگار است اگر وفقط اگر هندسة نااقليدسي سازگار باشد يعني اين دو هندسه به بياني نادقيق " به يك نسبت درستند " در تاييد اين موضوع مي توان به كاربرد هندسه هذلولوي در نظرية نسبت عام انيشتين اشاره كرد.

نظرية نسبت عام انيشتين بيان مي كند:

۱. ماده وانرژي باعث تغيير شكل فضا مي شود.
۲. تغييرات شكل فضا بر حركت ماده و انرژي تاثير مي گذارد.

بسياري از كيهان شناسان معاصر احساس مي كنند كه ما در يك جهان سه بعدي زندگي مي كنيم كه به بعد چهارم خميده شده است. هيچكس نمي تواند به بعد چهارم اشاره كند گرچه اين بعد اطراف ما را فرا گرفته است. بعد چهارم، يك بعد متفاوت با همة جهات متعارف مانند پايين، راست، درون، برون و... است. بعضي از مردم زمان را بعد چهارم مي پندارند. اين مطلب به مفهومي درست است. با اين حال، زمان، آن "راستاي متفاوت"مورد نظر ما نيست. اگر زمان را به عنوان يك بعد در نظر بگيريم، بايد بگوييم كه ما در يك فضا- زمان چهاربعدي كه به بعد پنجم خميده شده است زندگي مي كنيم. پس آن راستاي متفاوت كجاست؟

تصور فضاي چهاربعدي براي ما مشكل است. براي درك اين وضعيت، جهاني موسوم به سرزمين مسطح (تخت آباد) را توصيف مي كنيم كه توسط ادوين ابوت(Edwin Abbott) درسال ۱۸۸٤ ميلادي در كتابي با همين نام به رشتة تحرير در آورده شده است. اين سرزمين دو بعدي است و

ساكنين آن مخلوقاتي دوبعدي مانند مثلث ، مربع ،.... مي باشند كه با حركت در يك سطح تخت و تماس با هم از وجود يكديگر مطلع مي شوند.

داستان روي ماجراهاي يك مربع و درك وي از بعد سوم متمركز شده است. با در نظر گرفتن مشكلاتي كه اين مربع براي درك بعد سوم روبرو شد مي توانيم مشكلات بعد چهارم خودمان را بهتر دريابيم.

داستان با اين مطلب كه مربع و همسرش با خيال راحت در محيط بستة دوبعدي خود زندگي مي كنند شروع مي شود. ناگهان صدايي از ناكجاآباد آنها را مورد خطاب قرار مي دهد و چند دقيقه بعد دايره اي در محدودة منزل آنها ظاهر مي شود. در واقع اين كره اي است كه براي ياد دادن بعد سوم به مربع نازل شده است:

"من يك شكل مسطح نيستم بلكه يك جسم صلب موسوم به كره هستم ، شما به من دايره مي گوييد ولي در حقيقت يك دايره نيستم، بلكه تعداد بيشماري دايره از اندازه هاي متفاوت هستم كه روي يكديگر قرار گرفته اند. وقتي كه سطح تخت شما را قطع مي كنم ، همان دايره اي مي شوم كه شما الان با آن مواجهيد. براي اين كه كره خودش را به اهالي تخت آباد معرفي كند بايد خودش را دايره بنامد و..."

لازم نيست كه تخت آباد مسطح باشد بلكه مي توان يك سطح خميده در فضاي سه بعدي (مانند شكل مقابل) باشد . در اين صورت اين فضا ، براي اهالي تخت آباد و تمام اشيايي كه روي آن قرار دارد مانند يك سطح دو بعدي تخت است .

۲. تاريخچة هندسه هاي نااقليدسي

در حدود ۳۰۰ قبل از ميلاد اقليدس كتاب اصول خود را به رشتة تحرير درآورد. اين كتاب يكي از مشهورترين كتب نوشته شده مي باشد. گفته شده است در اواخر قرون وسطي و پس از تكميل فن چاپ توسط گوتنبرگ اين كتاب پرتيراژ ترين كتاب پس از انجيل بوده است .

اقليدس بر اساس پنج اصل موضوع و تعدادي اصطلاح اوليه تمام هندسة شناخته شده تا زمان خود را به صورت دستگاهمند و به روش اصل موضوعي در كتابش ذكركرد . اصل پنجم (اصل توازي) كه مي گويد "اگر خطي دو خط را چنان قطع كند كه مجموع زواياي داخلي كمتر از دو قائمه باشد آنگاه دو خط همديگر را در همان طرف قطع مي كنند" با چهار اصل ديگر متفاوت بود زيرا اين اصل بر خلاف چهار اصل ديگر سرشتي تجربي نداشت. به نظر مي رسد اقليدس از اين موضوع آگاه بود چرا كه در اثبات ۲۸ گزاره اول از اصل پنجم (با وجود آن كه مي توانست) استفاده نكرد.

کار اقلیدس حدود ۲۰۰۰ سال تنها هندسه بلا منازع بود ولي به تدريج ايرادهاي كار او پيدا شد.مطالبي كه جزء اصول نبودند و اقليدس آنها را بدون اثبات بكار برده بود مثلا اين كه اگر خطي يكي از اضلاع مثلث را در نقطه اي ببرد، لااقل يكي از دو ضلع ديگر را نيز خواهد بريد. او همچنين بعضي عبارات مانند اين كه " دو نقطه Pو Qدر يك طرف خط واقعند" را كه در اثبات تساوي مثلثها بكار برده بود تعريف نكرد و به خصوص به اين مطلب نپرداخت كه چه لزومي دارد اشكال در اثر حركت تغيير شكل و تغيير اندازه ندهند.

در طول تاريخ رياضيات، تلاشهاي بسياري براي اثبات اصل توازي بر اساس چهار اصل اول انجام گرفته است كه گرچه هيچ يك قابل قبول نيست ولي توسط آنها راه دستيابي به هندسه هاي نااقليدسي هموار شد.

از افرادي كه به اثبات اصل پنجم از ساير اصول همت گماشته اند ميتوان از پروكلس، خواجه نصير الدين طوسي، خيام، لژاندر، ساكري، لامبرت و واليس نام برد. آنها اساسا" در اثبات خود از مطالبي معادل اصل پنجم استفاده كردند:

۱) پروكلوس(Proclus) (۴۸۵- ۴۱۰ ميلادي) شرحي بر كتاب اصول نوشت كه در آن تلاشهاي انجام شده تا آن زمان براي اثبات اصل پنجم بر اساس چهار اصل ديگر را مورد بررسي قرار داد. وي ضمن نشان دادن اشتباه برهان پتولمي(Ptolemy)، خود اثباتي اشتباه ارائه مي دهد. در عين حال وي گزاره "هر خط يا برهمة خطوط موازي عمود است يا بر هيچ كدام عمود نيست" را كه هم ارز با اصل پلي فير(Playfair)موسوم شد را ارائه داد. اصل پلي فير كه معادل اصل پنجم است بيان مي كند :

" از يك نقطة مفروض واقع در خارج يك خط داده شده، يك و فقط يك خط موازي آن خط مي گذرد."

(نام پلي فير از جان پلي فيركه براي اولين بار در ۱۷۹۵ در كتابش پيشنهاد جايگزيني صورت اوليه اصل پنجم با گزارة بالا را ارائه نمود گرفته شده است .)

۲) جان واليس(Wallis) در سال ۱۶۶۳ در حالي كه فكر مي كرد اصل توازي را ثابت نموده است گزارة زير را كه در واقع هم ارز اصل پنجم است به دست آورد:

" به ازاي هر مثلث، مثلثي متشابه با آن و با اندازة متفاوت وجود دارد "

۳) يك راهب مسيحي بنام "جيرولامو ساكري"(Saccheri) در ۱۶۹۷ با فرض چهار اصل اول و غلط بودن اصل توازي سعي كرد تا به يك تناقض برسد. او با در نظر گرفتن يك چهار ضلعي ABCD كه در آن $\hat{A}=\hat{B}=90$ و AD=BC (موسوم به چهار ضلعي خيام- ساكري) نتيجه گرفت كه $\hat{D}=\hat{C}$ و در حالت $\hat{D}=\hat{C}>90$ به يك تناقض رسيد ولي نتوانست از فرض $\hat{B}=\hat{C}<90$ به

تناقض برسد، و در حقيقت ضمن اين كار، ناخودآگاه به چند گزارة بنيادي در هندسة نااقليدسي دست يافت.

۴) يوهان لامبرت(Lambert) در سال ۱۷۶۶ با دنبال كردن روشي شبيه به روش ساكري، به دنبال اثبات اصل توازي بود. وي با در نظر گرفتن يك چهارضلعي ABCD كه در آن $\hat{A}=\hat{B}=\hat{C}=$ ۹۰ (موسوم به چهار ضلعي لامبرت) با فرض $\hat{D}>$ ۹۰ به تناقض رسيد ولي در حالت $\hat{D}<$ ۹۰ به هيچ تناقضي دست نيافت. ضمن آن كه نشان داد در حالت اخير، وقتي مساحت يك مثلث كاهش مي يابد، مجموع زواياي آن زياد مي شود كه نشان مي دهد كران بالايي براي مساحت مثلثها وجود دارد. با وجود غير عادي بودن اين گزاره در آن زمان، لامبرت آن را به عنوان يك تناقض در نظر نگرفت.

۵) آدرين لژاندر(Legendre) طي سالها كار روي اصل توازي، به مجموعه اي از اثباتهاي اشتباه دست يافت كه از آنها در كلاسهاي هندسه اش استفاده مي كرد. روش تدريس او كه يكي از بهترين روشهاي تدريس رياضي شناخته شده است اين بود كه محصلينش را وادار مي كرد با مطالعة اثبات هاي اشتباه، به اشكالات موجود در آنها پي ببردند . دو گزارة مهم زير كه لژاندر ثابت كرد پايه گذار هندسة مطلق (يعني هندسة مبتني بر چهار اصل اول) بود:

۱. مجموع زواياي يك مثلث بزرگتر از دو قائمه نيست.

۲. اگر در يك مثلث، مجموع زوايا برابر دو قائمه شود، در همه مثلث ها مجمو ع زوايا برابربا دو قائمه مي شود.

او همچنين نشان داد اين كه "مجموع زواياي هر مثلث برابردو قائمه است" هم ارز اصل توازي اقليدسي است. وي در ضمن اثبات اين مطلب كه مجموع زواياي يك مثلث نمي تواند از ۱۸۰ درجه كمتر باشد، فرض كرد كه از هر نقطه داخل يك زاويه خطي مي گذرد كه امتداد هر دو ضلع زاويه را قطع مي كند. اما اين گزاره هم ارز اصل توازي است (ولي لژاندر از آن بي خبر بود) در واقع در هندسة هذلولوي گزارة ذيل برقرار است:

" به ازاي هر زاويه (غير نيم صفحه)، وجود دارد خطي كه موازي دو ضلع زاويه است."

يك نتيجة اين حكم اين است كه " نقطه اي در داخل يك زاويه مفروض وجود دارد كه از آن خطي نمي گذرد كه هر دو ضلع زاويه را قطع كند"

گؤس(Gauss) اولين شخصي بود كه بطور كامل موفق به درك هندسة نااقليدسي شد او در ۱۷۹۹ در نامه اي به يكي از دوستانش يعني فوكوش بويويي(Bolyai) نوشت: "راه من،تو و امثال ما براي اثبات اصل توازي راهي بي پايان مي باشد و موفقيتي در اين كار نصيبمان نخواهد شد. حتي مطالعات من باعث شك در مورد حقيقت خود هندسه شده است" در ادامه او نوشت:" اگر بتوان

ثابت كرد كه مساحت مثلث بي كران مي باشد، مي توان اصل توازي را ثابت كرد و بيشتر مردم اين را به عنوان يك اصل قبول دارند ولي من خير. حتي ممكن است مساحت مثلث كراندار باشد، با وجود اين كه سه ر س مثلث را تا حد ممكن از هم دور كرد."

در اين زمان لباچفسكي شش ساله بود. در زمان گؤس فيلسوفاني مانند كانت اجتماع را تحت شعاع خود قرار داده بودند. از طرفي گؤس به دليل موقعيت اجتماعي خود از رودررويي با صاحب نظران اجتناب مي كرد و لذا هيچ زمان كشفياتش را منتشر نكرد.

فوكوش بويويي نظرية اصل توازي را مورد بررسي قرار داد و چندين اثبات اشتباه براي اين اصل ارائه كرد. گؤس در نامه هايي اشتباهات اثباتهاي وي را به او متذكر شد. از جمله در اثباتي، بويويي از جمله " از سه نقطه اي كه روي يك خط نباشند مي توان دايره اي گذراند" استفاده كرده بود كه در واقع هم ارز با اصل توازي است.

يانوش بويويي، پسر فوكوش، ضميمه اي به كتاب هندسة پدرش افزود. در اين ضميمه موسوم بهAppendix او بنيان هندسة مطلق (هندسه اي بر اساس چهار اصل اول اقليدس) را پي ريزي كرد و در واقع امكان هندسه اي متفاوت با هندسة اقليدسي را نشان داد. او در نامه اي به پدرش نوشت:" من چيزهاي بسيار شگفت انگيزي كشف كرده ام كه مرا متحير كرده است... از هيچ، دنياي جديد عجيبي خلق كرده ام."

گؤس ضمن تمجيد از هوش بويويي جوان، به اطلاع او رساند كه تمام اين موضوعات قبلا توسط خود گؤس كشف شده است. اين موضوع طوري باعث رنجش يانوش شد كه بعد از آن ديگر هيچ مطلبي به چاپ نرساند.

نيكولاي لباچفسكي(Lobachevsky) در ١٨٢٦ در دانشگاه غازان(kasan) روسيه سخنراني ايراد كرد كه ضمن آن شالودة هندسة هذلولوي را ارائه نمود، ولي متن سخنراني دزديده شد. اما او در ١٨٢٩ محتواي كامل هندسة هذلولوي را درKazan Messenger كه يك نشرية دانشگاهي محلي روسي زبان بود منتشركرد. اين مقاله تحت عنوان Geometric Researches on the Theory of Parallels در سال ١٨٤٠ به آلماني ترجمه شد و در دسترس رياضيداناني مانند گؤس و بويويي قرار گرفت.

لباچفسكي در اين هندسة جديد،به چهار اصل اول اقليدس ،نقيض اصل پنجم يعني " از نقطه اي واقع در خارج يك خط، دو خط مي گذرد كه با خط اول موازي است " را اضافه نمود.

ريمان كه رسالة دكتريش را تحت راهنمايي گؤس به نگارش درآورد در يك سخنراني در ١٠ ژوئن ١٨٥٤ مفهوم هندسه را كاملا تغيير داد. او هندسه را ساختاري متريك تلقي كرد. همچنين وي اساس هندسه اي كروي را كه در آن خطوط موازي وجود ندارند تدوين نمود.

يك مطلب مهم اين است كه بويويي و لباچفسكي سازگاري هندسه اي را كه ارائه دادند ثابت نكردند. در واقع در ١٨٦٨ بلترامي(Belterami) در مقاله اي تحت عنوان

"An Essay on the Interpretation of non-Euclidean Geometry"

الگوي دو بعدي در فضاي سه بعدي اقليدسي براي اثبات سازگاري هندسة هذلولوي (لباچفسكي) ارائه داد.

كلاين در ١٨٧١ با ارائة تعريفي مناسب از فاصله، الگوي بلترامي را تكميل نمود و نيز چند الگوي ديگر براي هندسه هاي نااقليدسي (از جمله هندسة كروي ريماني) عرضه كرد. از اين زمان به بعد هندسه هاي نااقليدسي جايگاه خاصي در رياضيات پيدا نمود.

كار اقليدس بعدها توسط رياضيدانان دقيق و تصحيح شد كه يكي از بهترين آنها ، كار هيلبرت بود كه با ارائه ٨ اصل موضوع براي وقوع، ٤ اصل موضوع براي نسبيت، ٥ اصل موضوع براي قابليت انطباق، اصل پيوستگي، اصل ارشميدس و اصل توازي به تنقيح كار اقليدس پرداخت.

٣. فوايد آموزش هندسه هاي نااقليدسي

NCTM* *چارچوب اصلاح مواد درسي براي دانش آموزاني كه قصد ادامه تحصيل در دانشگاه دارند را به صورت زير پيشنهاد نموده است:

" گسترش درك دستگاه اصل موضوعي با بررسي و مقايسه هندسه هاي اقليدسي و نااقليدسي "

فراگيري هندسه هاي نااقليدسي در كنار هندسه هاي اقليدسي صرف نظر از ارضاء حس زيبايي شناختي آدمي داراي فوايدي از جمله موارد ذيل است:

- مطالعة هندسة نااقليدسي مشخص مي كند كه هندسه در زمان يونانيان كامل نشده است و همچون ساير علوم يك حوزة تحقيقاتي فعال است.
- گسترش نگرش و ديد فلسفي دانش آموزان
- آشنايي با نقش هندسة نااقليدسي در علوم و فناوري
- واژه " تعريف" داراي معناي دقيقي در هندسه مي باشد كه كاملا" متفاوت با معني آن در زبان محاوره اي است. ابهام روي اين مفهوم، سرچشمه مشكلات زيادي در درك فرآيند برهان هاي هندسي است. عجيب بودن و خلاف شهود بودن هندسة نااقليدسي به دانش آموزان كمك مي كند كه به طور مستقيم و محكم اختلاف بين تعاريف و قضايا را آنگونه كه در هندسه به كار مي روند، درك كنند.
- هندسه هاي نااقليدسي به درك بهتر هندسه هاي اقليدسي كمك مي كند.

فراگيري هندسة هذلولوي كمك مي كند كه دانش آموزان هندسة اقليدسي را بهتر درك كنند. اين موضوع را با مثال زير نشان مي دهيم:

تعريف خطوط موازي (در هر دو هندسة اقليدسي و هندسة هذلولوي) را به ياد آوريد:

" خطوط موازي ، خطوطي هستند كه يكديگر را قطع نمي كنند "

در هندسة اقليدسي با استفاده از اين تعريف ثابت مي كنيم كه " خطوط موازي در سرتاسر طولشان داراي فاصلة يكسان از يكديگر هستند." وقتي به دانش آموزان مي گوييم كه اين مطلب را اثبات كنند، آنها معمولا اعتراض مي كنند كه " ما مي توانيم ببينيم كه آن خطوط داراي فاصلة يكسان هستند، چه چيز را بايد ثابت كنيم ؟ "

اين به اين دليل است كه بيشتر اشخاص خطوط موازي را در كودكي فرا گرفته اند، به اين ترتيب كه تصويري به آنها نشان داده شده است و گفته شده است كه اينها خطوط موازي اند. ما تصاوير ذهني را براي خطوط موازي، مربعها، دواير و ... را بعنوان تعاريفمان استفاده مي كنيم. اين در هندسه اشتباه به نظر مي رسد. در زبان متعارف، با يك شيئ و يا ايده شروع مي كنيم. تعريف چيزي نيست جز تلاشي براي توصيف ايده يا شئ از قبل موجود، به زبان لغات.

براي مثال سگ چيزي است كه در جهان واقعي وجود دارد. وقتي كه كلمه سگ را در لغتنامه مي بينيم، ما يك گروهي از لغات را مي يابيم كه سعي در توصيف دقيق سگ را دارد. وجود يك سگ (و همة اشياء در زبان متعارف) ، مقدم به تعريفش است. در هندسه تعريف، مقدم بر وجود است.

هندسه با تعريف اشياء غير بصري و مجرد شروع مي شود. خواص يك شئ مجرد موسوم به قضايا، محصول تعريف آنند. هندسة نااقليدسي با ارائة جهاني كه در آن همة اشكال تغيير يافته اند ولي معناي واژه هاي به كار رفته در تعاريف بدون تغيير باقي مانده اند به ما در جدا شدن از تعاريف بصري و تمركز بر اهميت واژه ها كمك مي كند.

نرم افزارهاي كامپيوتري به دانش آموزان اجازه مي دهند الگوهاي هندسي و قضاياي كه در برنامة درسي معمولي وجود ندارند را كشف كنند.

مراجع:

1. Moise E.E Moise/ Elementary Geometry from an advanced standpoint/ Addison- Wesley/ Readiny/MA/1974.

2. British Society for research into learning Maths, http://www.soton.ac.uk

3. Hyperbolic Geometry, http://math.rice.edu/~joel/NonEuclid/