درس آنالیز ریاضی (II) دانشگاه فردوسی مشهد

جلسه اول

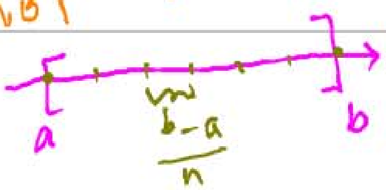
فصل ۱ انتگرال‌های ریمان-اشتیلیس (R-S)

تعریف. فرض کنیم $[a,b]$ یک بازه باشد. یک افراز $[a,b]$ یک مجموعه متناهی $P=\{x_0,\dots,x_n\}$ است به طوری که $a=x_0<x_1<x_2<\dots<x_n=b$

$[x_{i-1},x_i]$ را زیربازه i ام می‌نامیم و $\Delta x_i:=x_i-x_{i-1}$ را طول زیربازه i ام

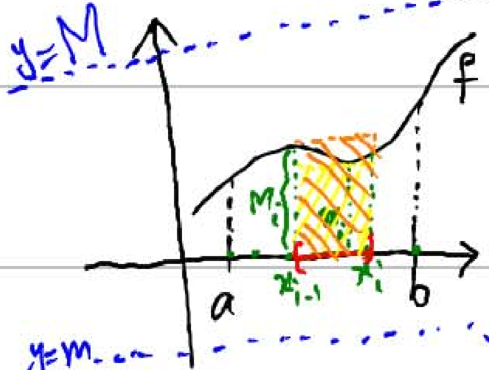
● اگر $P\subseteq Q$ دو افراز $[a,b]$ باشند، Q را تظریف P می‌گوییم.

اگر برای هر n داشته باشیم $\Delta x_i=\frac{b-a}{n}$ آنگاه $P_n=\{x_0,\dots,x_n\}$ را یک افراز منظم می‌گویند



$P_1=\{a,b\},\ P_2=\{a,\frac{a+b}{2},b\},\dots$

رده تمام افرازهای بازه $[a,b]$ را با $\mathcal{P}[a,b]$ نمایش می‌دهیم.



تعریف. تابع حقیقی f (تابع حقیقی مقدار) را روی $[a,b]$ کراندار می‌گوییم هرگاه

$$\exists M,m\ \forall x\in[a,b];\ m\le f(x)\le M$$

تمرین. f کراندار است اگر و فقط اگر $\exists K\ \forall x\in[a,b];\ |f(x)|\le K$

قرارداد: در سرتاسر این فصل همه توابع مورد بحث کراندارند.

در سرتاسر این فصل $\alpha, \beta, \dots$ و ... توابع صعودی‌اند مگر خلاف آن تصریح شود.

تعریف. فرض کنیم f روی $[a,b]$ کراندار و α روی این بازه صعودی باشد. قرار می‌دهیم

$$M_i:=\sup\{f(x): x_{i-1}\le x\le x_i\}=\sup_{x_{i-1}\le x\le x_i} f(x)\le \sup_{a\le x\le b} f(x)=:M \qquad A\subseteq B\Rightarrow \sup A\le\sup B$$

$$\vee|$$

$$m_i:=\inf_{x_{i-1}\le x\le x_i} f(x)\ge \inf_{a\le x\le b} f(x)=:m$$

$$\Delta\alpha_i:=\alpha(x_i)-\alpha(x_{i-1})\ge 0,\ 1\le i\le n$$

α صعودی است

اینطور قرار می‌دهیم

$$U(P,f,\alpha):=\sum_{i=1} M_i\Delta\alpha_i \quad \& \quad L(P,f,\alpha):=\sum_{i=1} m_i\Delta\alpha_i$$

یک مجموع بالایی

(اگر $\alpha(x)=x$، آنگاه همان تعریف‌های کلاسیک در انتگرال ریمان بوجود می‌آیند

$$\left(L(P,f)=\sum m_i\Delta x_i\ ,\ U(P,f)=\sum_i M_i\Delta x_i\right)$$

حال انتگرال‌های R-S بالایی و پایینی به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,d\alpha(x):=\inf_{P\in\mathcal{P}[a,b]} U(P,f,\alpha) \quad \& \quad \underline{\int_a^b} f\,d\alpha:=\sup_{P\in\mathcal{P}[a,b]} L(P,f,\alpha)$$

تعریف - می‌گوییم f روی $[a,b]$ نسبت به α انتگرال‌پذیر R-S است هرگاه $\underline{\int_a^b} f\,d\alpha=\overline{\int_a^b} f\,d\alpha$ و در این صورت این مقدار مشترک را انتگرال ریمان-استیلیس f نسبت به α روی $[a,b]$ می‌گوییم و آن را با $\int_a^b f\,d\alpha$ نمایش می‌دهیم و یا می‌نویسیم $f\in\mathcal{R}_{[a,b]}(\alpha)$ یا حتی $f\in\mathcal{R}(\alpha)$.

(در حالت ریمان یعنی وقتی که $\alpha(x)=x$، می‌نویسیم $f\in\mathcal{R}$)

نکته. همیشه $\overline{\int} f\,d\alpha$ و $\underline{\int} f\,d\alpha$ موجودند زیرا مثلاً

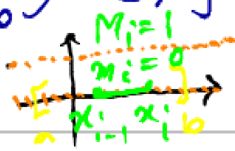
$$L(P,f,\alpha)=\sum_{i=1}^n m_i\Delta\alpha_i\le\sum_{i=1}^n M\,\Delta\alpha_i=M\sum_{i=1}^n\left(\alpha(x_i)-\alpha(x_{i-1})\right)=M\left(\alpha(b)-\alpha(a)\right)$$

خاصیت تلسکوپی

$$M=\sup_{x\in[a,b]} f(x)$$

پس $\underline{\int} f\,d\alpha$ که سوپریمم $L(P,f,\alpha)$ ها روی $\mathcal{P}[a,b]$ است موجود و یک عدد حقیقی است.

مثال) تابع $f(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ (تابع دیریکله) روی بازه دلخواه $[a,b]$ انتگرال‌پذیر نیست:



گیریم $P=\{x_0,\dots,x_n\}\in\mathcal{P}[a,b]$ دلخواه.

$$U(P,f)=\sum_{i=1}^n M_i\Delta x_i=\sum 1\,\Delta x_i=\sum_{i=1}^n(x_i-x_{i-1})=x_n-x_0=b-a\Rightarrow$$

$$\overline{\int} f=\inf_P U(P,f)=b-a \quad \& \quad L(P,f)=\sum_{1\le i\le n} m_i\Delta x_i=\sum_{i=1}^n 0=0\Rightarrow\underline{\int} f=\sup_P L(P,f)=0$$

$$b-a\neq 0$$

تمرین: مطلوبست $\int_a^b \alpha\, d\alpha$ و $\int_{-1}^{1} x\, d[x]$ را بیابید

لم. اگر Q تظریف P باشد آنگاه $L(P,f,\alpha) \leq L(Q,f,\alpha) \leq U(Q,f,\alpha) \leq U(P,f,\alpha)$

برهان. کافی است حالتی را در نظر بگیریم که Q فقط یک نقطه بیشتر از P دارد زیرا در این صورت حکم با استقرا تمام می‌شود. پس فرض کنیم $Q = P \cup \{x^*\}$.

$$= \{x_0, x_1, \dots, x_{j-1}, x^*, x_j, \dots, x_n\}$$

$$U(P,f,\alpha) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta\alpha_i = \sum_{i\neq j} M_i \Delta\alpha_i + M_j \Delta\alpha_j \quad \sup_{x_{j-1}\leq x\leq x_j} f(x)\,\left(\alpha(x_j)-\alpha(x_{j-1})\right)$$

$$U(Q,f,\alpha) = \sum_{\substack{i\neq j\\ 1\leq i\leq n}} M_i\Delta\alpha_i + \sup_{x_{j-1}\leq x\leq x^*} f(x)\left(\alpha(x^*)-\alpha(x_{j-1})\right) + \sup_{x^*\leq x\leq x_j} f(x)\left(\alpha(x_j)-\alpha(x^*)\right)$$

$$\leq \quad 〃 \quad + M_j\left(\alpha(x^*)-\alpha(x_{j-1})\right) + M_j\left(\alpha(x_j)-\alpha(x^*)\right)$$

$$= \quad 〃 \quad + M_j\left(\alpha(x_j)-\alpha(x_{j-1})\right)$$

$$= U(P,f,\alpha).$$

تمرین: $L(P,f,\alpha) \leq U(P,f,\alpha)$.

پایان جلسه اول ۱۳۹۰,۷,۹

جلسه دوم

یادآوری: $P\subseteq Q \Rightarrow L(P,f,\alpha)\le L(Q,f,\alpha)\le U(Q,f,\alpha)\le U(P,f,\alpha)$

$\inf A\le \sup A$ $\{x_0,\dots,x_n\}$ $\forall 1\le i\le n;\quad m_i\le M_i$

$A\neq\emptyset \Rightarrow \exists a_0;\ a_0\in A \Rightarrow \inf A\le a_0\le \sup A$

$\forall i \quad m_i\Delta\alpha_i\le M_i\Delta\alpha_i \quad (\alpha \nearrow \Rightarrow \Delta\alpha_i\ge 0)$

$$\underbrace{\sum m_i\Delta\alpha_i}_{L(Q,f,\alpha)} \le \underbrace{\sum M_i\Delta\alpha_i}_{U(Q,f,\alpha)}$$

قضیه (ریمان) ((۱)) $f\in R_{[a,b]}(\alpha)$ اگر و فقط اگر $\forall\varepsilon\ \exists P_0\ \forall P\supseteq P_0;\ U(P,f,\alpha)-L(P,f,\alpha)<\varepsilon$

شرط ریمان

برهان (⇐) فرض کنیم $f\in R_{[a,b]}(\alpha)$. گیریم $\varepsilon>0$ داده شده باشد.

$\exists P_1\in \mathcal{P}_{[a,b]};\ U(P_1,f,\alpha)<\overline{\int} f\,d\alpha+\frac{\varepsilon}{2}$ (1) (زیرا $\overline{\int} f\,d\alpha=\inf\limits_{P\in\mathcal{P}_{[a,b]}} U(P,f,\alpha)$)

$\int f\,d\alpha$

$\exists P_2\in \mathcal{P}_{[a,b]};\ \underline{\int} f\,d\alpha-\frac{\varepsilon}{2}<L(P_2,f,\alpha)$ (2) (زیرا $\underline{\int} f\,d\alpha=\sup\limits_{P\in\mathcal{P}_{[a,b]}} L(P,f,\alpha)$)

$\int f\,d\alpha$

قرار می‌دهیم $P_0=P_1\cup P_2$. اگر P ظریف‌تر از P_0 باشد، آنگاه ظریف‌تر از P_1 و P_2 نیز هست و بنابراین از روابط (1), (2) داریم

$$U(P,f,\alpha)\le U(P_1,f,\alpha)<\int f\,d\alpha+\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\vee\!\mid$$

$$L(P,f,\alpha)\ge L(P_2,f,\alpha)>\int f\,d\alpha-\frac{\varepsilon}{2}$$

قانون $abcd$

$a\quad c\quad d\quad b$

$d-c<b-a$

$$(U-L)(P,f,\alpha):=U(P,f,\alpha)-L(P,f,\alpha)<\left(\cancel{\int f\,d\alpha}+\frac{\varepsilon}{2}\right)-\left(\cancel{\int f\,d\alpha}-\frac{\varepsilon}{2}\right)=\varepsilon$$

$\alpha=\beta \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0;\ |\alpha-\beta|<\varepsilon$

(⇐) گیریم $\alpha\neq\beta$. پس $\varepsilon=|\alpha-\beta|>0$ بنابر فرض

$\cancel{|\alpha-\beta|}<\frac{\cancel{|\alpha-\beta|}}{2}$

$1<\frac{1}{2}$ ✗

بالعکس، فرض کنیم شرط ریمان برقرار باشد.

گیریم $\varepsilon>0$ داده شده باشد. بنا به شرط ریمان

$$\exists P_0 \; ; \quad (U-L)(P_0,f,\alpha) < \varepsilon$$

بنا به تعریف انتگرال های بالایی و پایینی، داریم

$$L(P_0,f,\alpha) \leq \underline{\int} f\,d\alpha \leq \overline{\int} f\,d\alpha \leq U(P_0,f,\alpha)$$

پس

$$\left|\overline{\int} f\,d\alpha - \underline{\int} f\,d\alpha\right| \leq U(P_0) - L(P_0) < \varepsilon$$

لذا

$$\overline{\int} f\,d\alpha = \underline{\int} f\,d\alpha$$

بنابراین f انتگرال پذیر است. $\square$

نکته. فرض کنیم P, Q دو افراز دلخواه از $[a,b]$ باشند. با در نظر گرفتن $P\cup Q$، داریم

$$L(P) \leq L(P\cup Q) \leq U(P\cup Q) \leq U(Q)$$

هر L از هر U کمتر است. اگر Q را ثابت نگه داریم، می توانیم بگوییم $U(Q)$ یک کران بالا برای $\{L(P) \mid P\in \mathcal{P}[a,b]\}$ است. پس

$$\underline{\int} f\,d\alpha = \sup_P L(P) \leq U(Q), \qquad \forall Q$$

دوباره نتیجه می‌شود که $\underline{\int} f\,d\alpha$ یک کران پایین برای $\{U(Q) \mid Q\in\mathcal{P}[a,b]\}$ است. پس

$$\underline{\int} f\,d\alpha \leq \inf_Q U(Q) = \overline{\int} f\,d\alpha. \quad ////$$

تمرین. فرض کنید B, A دو زیرمجموعه از $\mathbb{R}$ باشند. ثابت کنید

$$A\subseteq B \Rightarrow \sup A \leq \sup B \;\&\; \inf A \geq \inf B$$

$$(\forall x\in A\ \forall y\in B;\ x\leq y) \Rightarrow \sup A \leq \sup B \;\&\; \inf A \;?\; \inf B$$

$$\forall x;\ f(x)\leq g(x) \Rightarrow \sup_x f(x) \leq \sup_x g(x) \;\&\; \inf_x f(x) \;?\; \inf_x g(x)$$

قضیه. فرض کنیم $f,g\in\mathcal{R}_{[a,b]}(\alpha)$. در این صورت $f+g\in\mathcal{R}_{[a,b]}(\alpha)$ و

$$\int(f+g)\,d\alpha=\int f\,d\alpha+\int g\,d\alpha$$

برهان: فرض کنیم M_i^h، m_i^h به ترتیب سوپریمم و اینفیمم تابع h روی زیر بازه i ام $[x_{i-1},x_i]$ است.

$$M_i^{f+g}=\sup\{f(x)+g(x)\mid x\in[x_{i-1},x_i]\}\le M_i^f+M_i^g$$

$$f(x)+g(x)\le\underbrace{\sup_{x_{i-1}\le x\le x_i}f(x)}_{M_i^f}+\underbrace{\sup_{x_{i-1}\le x\le x_i}g(x)}_{M_i^g}$$

و به طور مشابه

$$m_i^{f+g}\ge m_i^f+m_i^g$$

بنابراین

$$(+_1)\quad U(P,f+g,\alpha)=\sum M_i^{f+g}\Delta\alpha_i\le\sum M_i^f\Delta\alpha_i+\sum M_i^g\Delta\alpha_i=U(P,f,\alpha)+U(P,g,\alpha)$$

و به طور مشابه

$$(+_2)\quad L(P,f+g,\alpha)\ge L(P,f,\alpha)+L(P,g,\alpha)$$

فرض کنیم $\varepsilon>0$. بنابر شرط ریمان برای توابع f,g -

$$\begin{cases}\exists P_1\ \forall P\supseteq P_1;\quad (U-L)(P,f,\alpha)<\frac{\varepsilon}{2}\\ \exists P_2\ \forall P\supseteq P_2;\quad (U-L)(P,g,\alpha)<\frac{\varepsilon}{2}\end{cases}$$

قرار می‌دهیم $P_0=P_1\cup P_2$ و P را تظریف دلخواهی از P_0 می‌گیریم،
اگر نامساوی $(+_2)$ را در ۱- ضرب و با $(+_1)$ جمع کنیم، خواهیم داشت:

$$(U-L)(P,f+g,\alpha)\le(U-L)(P,f,\alpha)+(U-L)(P,g,\alpha)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

پس $f+g\in\mathcal{R}_{[a,b]}(\alpha)$.

حال داریم

$$L(P_0,f,\alpha) \leq \int f\,d\alpha \leq U(P_0,f,\alpha)$$

$$L(P_0,g,\alpha) \leq \int g\,d\alpha \leq U(P_0,g,\alpha)$$

جمع

$$L(P_0,f)+L(P_0,g) \leq \int f+\int g \leq U(P_0,f)+U(P_0,g)$$

از طرفی دیگر

$$L(P_0,f)+L(P_0,g) \leq L(P_0,f+g) \leq \int (f+g)\,d\alpha \leq U(P_0,f+g) \leq U(P_0,f)+U(P_0,g)$$

$(+_2)$ $(+_1)$

بنابه قانون abcd،

$$\left|\int(f+g)\,d\alpha-\int f\,d\alpha-\int g\,d\alpha\right| \leq (U-L)(P_0,f)+(U-L)(P_0,g)$$

$$< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

پس $\int f+g=\int f+\int g$. $\square$

تمرین. ثابت کنید

$$\int(-f)\,d\alpha=-\int f\,d\alpha, \quad \int cf\,d\alpha=c\int f\,d\alpha$$

$$\int f\,d(\alpha+\beta)=\int f\,d\alpha+\int f\,d\beta, \quad \int_a^b f\,d\alpha=\int_a^c f\,d\alpha+\int_c^b f\,d\alpha$$

$$f\leq g \Rightarrow \int f\,d\alpha \leq \int g\,d\alpha.$$

جلسه سوم / ۱۳۹۰/۷/۱۴

قضیه. فرض کنید $f,g\in \mathcal{R}_{[a,b]}(\alpha)$ و برای هر $x\in[a,b]$، $f(x)\le g(x)$. در این صورت $\int f d\alpha \le \int g d\alpha$.

برهان:

$$M_i^f = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) \le \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} g(x) = M_i^g \qquad \forall i$$

$$M_i^f \Delta\alpha_i \le M_i^g\Delta\alpha_i \qquad \forall i$$

$$U(P,f,\alpha)=\sum M_i^f \alpha_i \le \sum M_i^g\alpha_i = U(P,g,\alpha)$$

$$\inf_P U(P,f,\alpha)\le \inf_P U(P,g,\alpha)$$

$$\left(\int f d\alpha =\right) \overline{\int} f d\alpha \le \overline{\int} g d\alpha \left(=\int g d\alpha\right). \square$$

تمرین: اگر $\forall x\in[a,b];\ f(x)\le g(x)$ آنگاه $\sup_x f(x)\le \sup_t g(t)$.

حل: گیریم $x\in[a,b]$ دلخواه باشد. در این صورت $f(x)\le g(x)\le \underbrace{\sup_t g(t)}_{\text{کران بالا}}$ پس $\sup_x f(x)\le \sup_t g(t)$.

قضیه. $\int f d(\alpha+\beta) = \int f d\alpha + \int f d\beta$ هرگاه $f\in\mathcal{R}(\alpha)$، $f\in\mathcal{R}(\beta)$.

برهان:

$$U(P,f,\alpha+\beta)=\sum_{i=1}^n M_i \underbrace{\Delta(\alpha+\beta)_i} = \sum M_i(\Delta\alpha_i+\Delta\beta_i) = U(P,f,\alpha)+U(P,f,\beta)$$

$$(\alpha+\beta)(x_i)-(\alpha+\beta)(x_{i-1}) = (\alpha(x_i)-\alpha(x_{i-1}))+(\beta(x_i)-\beta(x_{i-1}))$$

به طور مشابه $L(P,f,\alpha+\beta)=L(P,f,\alpha)+L(P,f,\beta)$.

فرض کنیم $\varepsilon>0$ داده شده باشد.

$$\exists P_1\, \forall Q\supseteq P_1;\ (U-L)(Q,f,\alpha)<\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\exists P_2\, \forall Q\supseteq P_2;\ (U-L)(Q,f,\beta)<\frac{\varepsilon}{2}$$

چنین صح $P_\varepsilon = P_1\cup P_2$ آنگاه برای هر $P\supseteq P_\varepsilon$ داریم

$$(U-L)(P,f,\alpha+\beta) = (U-L)(P,f,\alpha)+(U-L)(P,f,\beta) < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

پس $f\in\mathcal{R}(\alpha+\beta)$، حال داریم

$$L(P,f,\alpha)+L(P,f,\beta) \le \int f\,d\alpha+\int f\,d\beta \le U(P,f,\alpha)+U(P,f,\beta)$$

$$L(P,f,\alpha+\beta) \le \int f\,d(\alpha+\beta) \le U(P,f,\alpha+\beta)$$

قانون abcd، ایجاب می کند که

$$\left|\int f\,d(\alpha+\beta)-\left(\int f\,d\alpha+\int f\,d\beta\right)\right| \le (U-L)(P,f,\alpha+\beta)$$

حال چون عبارت سمت راست را می توان از هر ε (البته به ازای یک P مناسب) کمتر کرد، پس سمت چپ برابر صفر است و لذا $\int f\,d(\alpha+\beta)=\int f\,d\alpha+\int f\,d\beta$. □

قضیه (مهم). اگر f روی $[a,b]$ پیوسته باشد آنگاه $f\in\mathcal{R}_{[a,b]}(\alpha)$.

برهان. فرض کنیم $\varepsilon>0$ داده شده باشد. بنا به پیوستگی یکنواخت تابع پیوسته f روی بازه فشرده $[a,b]$ داریم

$$\exists\delta\ \forall t,s;\quad |t-s|<\delta \Rightarrow |f(t)-f(s)|<\frac{\varepsilon}{2(\alpha(b)-\alpha(a))} \quad (\star)$$

گیریم P_ε افرازی باشد که $\forall i;\ |\Delta x_i|<\delta$ (چنین افرازی وجود دارد: کافی است افراز P_ε را افراز منظم با شرط $\delta>\frac{b-a}{n}$ بگیریم). پس برای هر t,s در زیربازه iام

از هر تظریف P^* از P_ε، $|t-s|<\Delta x_i<\delta$ پس بنا به $(\star)$ $|f(t)-f(s)|<\frac{\varepsilon}{2(\alpha(b)-\alpha(a))}$. بنابراین $M_i-m_i\le\frac{\varepsilon}{2(\alpha(b)-\alpha(a))}$ پس

$$(U-L)(P,f,\alpha)=\sum(M_i-m_i)\Delta\alpha_i \le \frac{\varepsilon}{2(\alpha(b)-\alpha(a))}\sum \Delta\alpha_i=\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$$

$\Delta\alpha_i=\alpha(x_i)-\alpha(x_{i-1})$

پس $f\in\mathcal{R}_{[a,b]}(\alpha)$. □

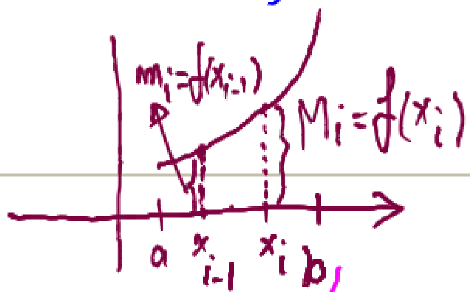
تبصره (جالب). اگر f همه جا روی $[a,b]$ به جز در یک تعداد متناهی نقطه پیوسته باشد و α در نقاط ناپیوستگی f پیوسته باشد آنگاه $f\in\mathcal{R}_{[a,b]}(\alpha)$. مثلاً $\int_1^5 [x]\,d(x^2)$ وجود دارد (تمرین: مقدار انتگرال را بیابید).

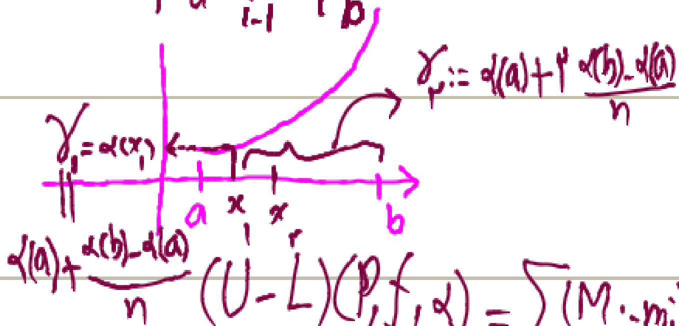
قضیه. اگر f در $[a,b]$ صعودی و α در $[a,b]$ پیوسته باشد آنگاه $f\in R(\alpha)[a,b]$.

برهان. گیریم $\varepsilon>0$ داده شده باشد. بنابر پیوستگی α، قضیه مقدار میانی

به ازای هر n، افراز P_n موجود است که

$$\Delta\alpha_i=\frac{\alpha(b)-\alpha(a)}{n}$$





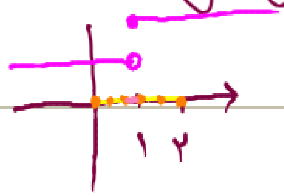
به ازای هر $P\supseteq P_n$ داریم

$$(U-L)(P,f,\alpha)=\sum(M_i-m_i)\Delta\alpha_i=\frac{\alpha(b)-\alpha(a)}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(f(x_i)-f(x_{i-1})\right)=\frac{\alpha(b)-\alpha(a)}{n}\left(f(b)-f(a)\right)<\varepsilon$$

(به ازای n به قدر کافی بزرگ)

جلسه چهارم ۱۳۹۰/۷/۱۹

تمرین. ثابت کنید تابع صعودی $f(x)=\begin{cases}1 & x<1\\ 2 & x\ge 1\end{cases}$ نسبت به خودش انتگرال‌پذیر نیست. روی $[0,2]$

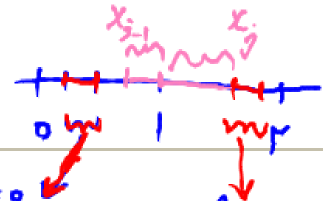


حل. بنا به شرط ریمان باید نشان دهیم

$$\exists \varepsilon\ \forall P\in\mathcal{P}[a,b]\ \exists Q\supseteq P;\ (U-L)(Q,f,f)\ge\varepsilon$$

$$U(Q,f,f)=\sum M_i\Delta f_i=2(\underbrace{f(1)-f(x_{j-1})}_{2-1})+2(\underbrace{f(x_j)-f(1)}_{2-2})=2$$

$$L(Q,f,f)=\sum m_i\Delta f_i=1(f(1)-f(x_{j-1}))+2(f(x_j)-f(1))=1$$



$\Delta f_i=0$, $M_i=1$, $m_i=1$ $\Delta f_i=0$, $M_i=2$, $m_i=2$

چنین $\varepsilon=\frac{1}{2}$ می‌دهیم که برای هر P، چنین $Q=P\cup\{1\}$، داریم

$$(U-L)(Q,f,f)=2-1=1\ge\frac{1}{2}$$

تبصره. چون $f\circ f=2$، پس ترکیب دو تابع انتگرال‌ناپذیر ممکن است انتگرال‌پذیر باشد. این مطلب نشان می‌دهد که عکس قضیه بعد درست نیست.

قضیه. اگر $f\in\mathcal{R}_{[a,b]}(\alpha)$ ، $m\le f\le M$ ، φ تابعی پیوسته بر $[m,M]$ باشد آنگاه $\varphi\circ f\in\mathcal{R}_{[a,b]}(\alpha)$.

تمرین. مثالی از یک تابع ~~پیوسته~~ انتگرال‌پذیر φ و یک تابع انتگرال‌پذیر f ارائه دهید به صورتی که $\varphi\circ f$ انتگرال‌پذیر نباشد.

قضیه و برهان. (i) اگر $f\in\mathcal{R}(\alpha)$ آنگاه $f^2\in\mathcal{R}(\alpha)$ زیرا اگر $\varphi(t)=t^2$ (تابع پیوسته)، آنگاه $\varphi\circ f=f^2$.

$f^2=f\cdot f$ ، $(f\cdot g)(x)=f(x)g(x)$

(ii) اگر $f,g\in\mathcal{R}(\alpha)$ آنگاه $fg\in\mathcal{R}(\alpha)$ (حاصل‌ضرب دو تابع) زیرا

$$fg=\frac{1}{4}\big[\underbrace{(f+g)^2}_{\in\mathcal{R}(\alpha)}-\underbrace{(f-g)^2}_{\in\mathcal{R}(\alpha)}\big]\in\mathcal{R}(\alpha)$$

iii) اگر $f\in\mathcal{R}(\alpha)$ آنگاه $|f|\in\mathcal{R}(\alpha)$ و $\left|\int f\,d\alpha\right|\le\int|f|\,d\alpha$

چون $|f|$ ترکیب $\underbrace{\phi(t)=|t|}_{\text{پیوسته}}$ با f است، پس $|f|\in\mathcal{R}(\alpha)$.

عدد حقیقی c وجود دارد که $\left|\int_a^b f\,d\alpha\right|=c\int_a^b f\,d\alpha$، توجه شود که $c=\pm1$،

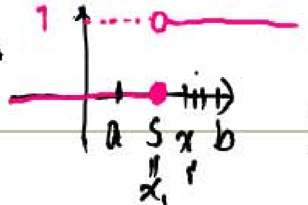
$$\left|\int f\,d\alpha\right|=c\int f\,d\alpha=\int cf\,d\alpha\le\int|f|\,d\alpha.\ \square$$

$$cf=\pm f\le|f|\Rightarrow\int cf\,d\alpha\le\int|f|\,d\alpha$$

قضیه. فرض کنید α صعودی باشد و $\alpha'\in\mathcal{R}_{[a,b]}$، در این صورت $f\in\mathcal{R}_{[a,b]}(\alpha)$ اگر و فقط اگر $f\alpha'\in\mathcal{R}_{[a,b]}$، و

$$\int_a^b f\,d\alpha=\int_a^b f\alpha'\,dx.$$

قضیه. فرض کنید $a<s<b$، f در s پیوسته باشد (تبصره 2)، $\alpha(x)=I(x-s)$ که در آن $I(x)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ 1 & x>0\end{cases}$، در این صورت $\int f\,d\alpha=f(s)$.



برهان. فرض کنیم $\varepsilon>0$ داده شده باشد. بگیریم $P_\varepsilon=\{a=x_0, s=x_1, x_2,\dots, b=x_n\}$

$$(U-L)(P_\varepsilon,f,\alpha)=(M_1-m_1)\underbrace{\Delta\alpha_1}_{0}+(M_2-m_2)\underbrace{\Delta\alpha_2}_{1}+\sum_{i=3}^{n}(M_i-m_i)\underbrace{\Delta\alpha_i}_{0}=M_2-m_2$$

چون f در s از راست پیوسته است، وقتی $x_2\to s$، $M_2\to f(s)$, $m_2\to f(s)$

و لذا $M_2-m_2<\varepsilon$ با انتخاب x_2 که به قدر کافی به s نزدیک باشد (تبصره 2). $L(P,f,\alpha)\le\int f\,d\alpha,\ f(s)\le U(P,f,\alpha)$. $\square$

جلسه پنجم ۹۰/۷/۲۳

لم. اگر $f\in R_{[a,b]}(\alpha)$ ، $\exists M\ \forall x\in[a,b];\ |f(x)|\le M$ آنگاه $\left|\int_a^b f\,d\alpha\right|\le M(\alpha(b)-\alpha(a))$

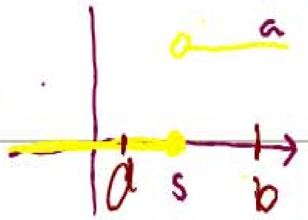
اثبات.
$$\left|\int_a^b f\,d\alpha\right| \le \int_a^b |f|\,d\alpha \le \int_a^b M\,d\alpha = M\int_a^b 1\,d\alpha = M(\alpha(b)-\alpha(a)).$$

$|f|\le M$ طبق فرض

تابع ثابت پیوسته است پس بنابر قضیه انتگرال‌پذیر است.

$$U(P,f,\alpha)=\sum_{i=1}^n 1\,\Delta\alpha_i = \alpha(b)-\alpha(a)\quad \forall P$$
$$\int_a^b 1\,d\alpha = \overline{\int_a^b} 1\,d\alpha = \inf_P U(P,f,\alpha) = \alpha(b)-\alpha(a)$$

قضیه. فرض کنید $c_n\ge 0\ (n=1,2,\dots)$ ، $\sum_{n=1}^\infty c_n$ همگرا باشد و $\{s_n\}$ دنباله‌ای از نقاط متمایز در $[a,b]$ باشد و $\alpha(x)=\sum_{n=1}^\infty c_n I(x-s_n)$ ↗. اگر f بر $[a,b]$ پیوسته باشد آنگاه
$$\int_a^b f\,d\alpha = \sum_{n=1}^\infty c_n f(s_n) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n c_k f(s_k).$$
(اگر فقط یک c_1 داشته باشیم این قضیه به قضیه آخر جلسه پیش تقلیل می‌یابد)



برهان. به سادگی دیده می‌شود که α صعودی است، $\alpha(a)=0$ و $\alpha(b)=\sum_{n=1}^\infty c_n$. فرض کنیم $\varepsilon>0$ داده شده باشد. بنابه همگرایی سری $\sum c_n$ داریم
$$\exists N\ \forall n\ge N;\ \underbrace{\left|\sum_{n=1}^\infty c_n - \sum_{k=1}^n c_k\right|}_{\sum_{k=n+1}^\infty c_k} < \frac{\varepsilon}{M}$$

فرض کنیم $n\ge N$. اکنون قرار می‌دهیم:
$$\alpha_1(x)=\sum_{k=1}^n c_k I(x-s_k),\quad \alpha_2(x)=\sum_{k=n+1}^\infty c_k I(x-s_k)$$

بنابه قضیه آخر در جلسه پیش و استقرا
$$\int_a^b f\,d\alpha_1 = \sum_{k=1}^n c_k f(s_k)$$

همچنین بنا به لم بالا داریم: اینک $\left|\int_a^b f\,d\alpha_2\right| \le M\left(\alpha_2(b)-\cancel{\alpha_2(a)}_{0}\right) < M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon$ ، $\alpha_2(b)=\sum_{k=n+1}^{\infty} c_k$

$$\left|\int_a^b f\,d\underbrace{\alpha}_{\alpha_1+\alpha_2} - \sum_{n=1}^{n} c_n f(s_n)\right| = \left|\int_a^b f\,d\alpha_2\right| < \varepsilon . \square$$

قضیه (اولین قضیه اساسی حسابان): فرض کنیم $f\in\mathcal{R}$ و به ازای هر $a\le x\le b$ ، $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$.
در این صورت F روی $[a,b]$ پیوسته است. به علاوه اگر f در x_0 در این بازه پیوسته باشد، F در x_0 مشتق‌پذیر است و $F'(x_0)=f(x_0)$.

اثبات:
$$|F(y)-F(x)| = \left|\int_x^y f(t)\,dt\right| \le M\,|y-x| , \quad M=\max_{a\le t\le b}|f(t)|$$

نشان می‌دهد که F در شرط لیپشیتز صدق می‌کند لذا F روی $[a,b]$ پیوسته است.
فرض کنیم $\varepsilon>0$ داده شده. چون f در x_0 پیوسته است پس δ موجود است که اگر $|t-x_0|<\delta$ آنگاه $|f(t)-f(x_0)|<\varepsilon$.
چون $|t-x_0|<\delta$ داریم:

$$\left|\frac{\overbrace{F(t)}^{\int_a^t f(u)du}-\overbrace{F(x_0)}^{\int_a^{x_0} f(u)du}}{t-x_0} - f(x_0)\right| = \left|\frac{1}{t-x_0}\int_{x_0}^t f(u)\,du - \frac{\int_{x_0}^t f(x_0)\,du}{t-x_0}\right| = \frac{\left|\int_{x_0}^t \left(f(u)-f(x_0)\right)du\right|}{|t-x_0|}$$

$$\le \frac{\varepsilon\,|t-x_0|}{|t-x_0|}=\varepsilon . \square$$

$$\lim_{t\to x_0}\frac{F(t)-F(x_0)}{t-x_0}=f(x_0)$$

قضیه (دومین قضیه اساسی حسابان): اگر $f\in\mathcal{R}[a,b]$ و G تابعی مشتق‌پذیر بر $[a,b]$ که $G'=f$ (G تابع اولیه f است)، در این صورت $\int_a^b f(x)\,dx = G(b)-G(a)$.

برهان. فرض کنیم $\varepsilon > 0$ داده شده باشد (بنابه شرط ب)

$$\exists P_\varepsilon \quad (U-L)(P_\varepsilon, f) < \varepsilon.$$

بنابه قضیه مقدار میانگین

پس. $\exists t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $G(x_i) - G(x_{i-1}) = \underbrace{G'(t_i)}_{f(t_i)} \Delta x_i$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(G(x_i) - G(x_{i-1}) \right) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i) \Delta x_i$$

$$L(P_\varepsilon, f) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \leq G(b) - G(a) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i) \Delta x_i \leq \sum M_i \Delta x_i = U(P_\varepsilon, f)$$

$$L(P_\varepsilon, f) \leq \int_a^b f \, dx \leq U(P_\varepsilon, f)$$

تمرین (abcd) نشان می‌دهد که

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \left(G(b) - G(a) \right) \right| \leq (U-L)(P_\varepsilon, f) < \varepsilon. \quad \square$$

جلسه ششم ۹۰/۷/۳۰

تعریف. فرض کنید $\underline{f}:[a,b]\to \mathbb{R}^k$، $\underline{f}(t)=(f_1(t),\dots,f_k(t))$ یک تابع برداری باشد (اگر $k=1$، f را تابع اسکالر یا حقیقی می‌گویند؛ اگر $k=2$، f را مختلط گویند چون $\mathbb{R}^2=\mathbb{C}$).

می‌گوییم تابع برداری $\underline{f}$ روی $[a,b]$ نسبت به α انتگرال‌پذیر است، هرگاه به ازای هر $1\le i\le k$، $f_i\in \mathcal{R}_{[a,b]}(\alpha)$. در این صورت

$$\int_a^b \underline{f}\,d\alpha=\left(\int_a^b f_1\,d\alpha,\dots,\int_a^b f_k\,d\alpha\right)$$

این وضعیت مشابه حد، پیوستگی و مشتق توابع برداری است.

قضیه. اگر $\underline{f}\in \mathcal{R}_{[a,b]}(\alpha)$ آنگاه $|\underline{f}|=\sqrt{f_1^2+\cdots+f_k^2}\in \mathcal{R}_{[a,b]}(\alpha)$ ،

$$\left\|\int_a^b \underline{f}\,d\alpha\right\|\le \int_a^b |\underline{f}|\,d\alpha$$

برهان. اگر $\underline{f}\in\mathcal{R}(\alpha)$ آن‌گاه همهٔ f_iها α-انتگرال‌پذیرند. پس مربع آنها ($\varphi(t)=t^2$)، مجموعشان، و جذر مجموعشان ($\varphi(t)=\sqrt{t}$) که همان $|\underline{f}|$ است α-انتگرال‌پذیر است.

اگر $\underline{y}=(y_1,\dots,y_k)=\int_a^b \underline{f}\,d\alpha$ در نظر بگیرید، $y_i:=\int_a^b f_i\,d\alpha\ (1\le i\le k)$

$$\left\|\int_a^b \underline{f}\,d\alpha\right\|^2=\|\underline{y}\|^2=\sum_{i=1}^k |y_i|^2=\sum y_i\int_a^b f_i\,d\alpha=\int_a^b \sum_{i=1}^k y_i f_i(t)\,d\alpha(t)\le \|\underline{y}\|\int_a^b |\underline{f}(t)|\,d\alpha(t)$$

بنا به نامساوی کوشی-شوارتز

$$\sum_{i=1}^k y_i f_i(t)\le \underbrace{\left(\sum |y_i|^2\right)^{\frac12}}_{\|\underline{y}\|}\underbrace{\left(\sum |f_i(t)|^2\right)^{\frac12}}_{|\underline{f}(t)|}$$

$$\therefore\ \left\|\int_a^b \underline{f}\,d\alpha\right\|\le \int_a^b |\underline{f}|\,d\alpha.\ \square$$

توابع با تغییر کراندار

تعریف. فرض کنید f روی $[a,b]$ تعریف شده باشد. می‌گوییم f روی $[a,b]$ با تغییر کراندار است هرگاه

$$V_f(a,b)=\sup\left\{\sum_{k=1}^n |\Delta f_k| : \Delta f_k=f(x_k)-f(x_{k-1}),\ \{x_0,x_1,\dots,x_n\}\in \mathcal{P}[a,b]\right\}<\infty$$

مثال ۱) هر تابع صعودی با تغییر کراندار است. زیرا

$$\sum_{k=1}^n |\Delta f_k|=\sum_{k=1}^n \overbrace{\left(f(x_k)-f(x_{k-1})\right)}^{\ge 0}=f(b)-f(a)\Rightarrow V_f(a,b)=f(b)-f(a)<+\infty$$

مثال ۲) اگر f روی $[a,b]$ مشتق‌پذیر و با مشتق کراندار باشد آنگاه با تغییر کراندار است زیرا

$$\sum_{k=1}^{n}|\Delta f_k| = \sum \underbrace{|f(x_k)-f(x_{k-1})|}_{f'(t_k)(x_k-x_{k-1})} = \sum_{k=1}^{n}|f'(t_k)|\Delta x_k \le M\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k = M(b-a)$$

بنا به قضیه — M کران بالای مشتق f

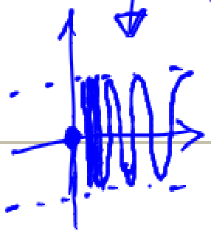
$$\therefore V_f(a,b) \le M(b-a) < \infty$$

مثال ۳) تابع پیوسته f روی $[0,1]$ (ولذا کراندار) که با ضابطه

$$f(x)=\begin{cases} x\cos\frac{\pi}{2x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

تعریف می‌شود با تغییر کراندار نیست (ر.ک. صفحه ۱۹۰ کتاب آنالیز ریاضی آپوستل)

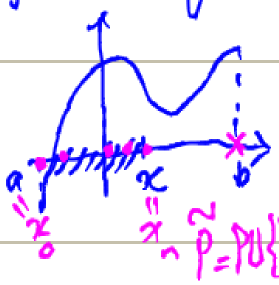
رفتار



تمرین. $V_f(a,b)=V_f(a,c)+V_f(c,b)$ (*) وقتی که $a<c<b$.

تعریف. فرض کنید f روی $[a,b]$ با تغییر کراندار باشد. تابع تغییر کل f بر $[a,b]$ به صورت ذیل تعریف می‌شود

$V_f(x)=V_f(a,x)$. بدیهی است که $V_f(a)=0$ ، $V_f(b)=V_f(a,b)$



نکته. چون f بر $[a,b]$ با تغییر کراندار است برای هر $x\in[a,b]$ ، $V_f(x)<\infty$. چرا؟ بنا به (*) $V_f(a,x)\le V_f(a,b)<\infty$. اما

دیدن این مطلب بدون (*): فرض کنیم P یک افراز دلخواه برای $[a,x]$ باشد. $\{x_0,\dots,x_n\}$ ، $\tilde{P}=P\cup\{b\}$ افراز برای $[a,b]$

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n}|\Delta f_k|}_{\text{برای } P} \le \underbrace{\sum_{k=1}^{n}|\Delta f_k| + |f(b)-f(x)|}_{\text{برای } \tilde{P}} \le V_f(a,b)$$

$$\therefore V_f(a,x)=\sup_{P}\sum_{k=1}^{n}|\Delta f_k| \le V_f(a,b)<\infty .$$

قضیه. اگر f روی $[a,b]$ با تغییر کراندار باشد آنگاه

(۱) V_f صعودی است.

(۲) $V_f - f$ صعودی است.

(۳) پروژه برای طلاب! V_f پیوسته است اگر و فقط اگر f پیوسته باشد.

برهان: ① فرض کنیم $a \le x \le y \le b$.

(تمرین *)

$$V_f(y) = \underbrace{V_f(x,y)}_{\geq 0} + V_f(x) \geq V_f(x). \quad ////$$

$$\left(V_f(y)-f(y)\right) - \left(V_f(x)-f(x)\right) = \left(\underbrace{\underbrace{V_f(y)-V_f(x)}_{V_f(x,y)}}_{\sup_P \sum_{i=1}^{n} |\Delta f_i|}\right) - \left(\underbrace{f(y)-f(x)}_{\sum^{n} |\Delta f_i|}\right) \geq 0 \quad ②$$

برای افراز دو نقطه‌ای $\{x,y\}$ از بازه $[x,y]$

تمرین. اگر f و g با تغییر کراندار باشند آنگاه $\alpha f + \beta g$ نیز با تغییر کراندار است که در آن α, β اعداد حقیقی هستند.

قضیه. تابع f با تغییر کراندار است اگر $f = \alpha_1 - \alpha_2$ که در آن α_1 و α_2 صعودی‌اند.

برهان: اگر f با تغییر کراندار باشد، بنا به قضیه قبل V_f و $V_f - f$ صعودی‌اند و به علاوه

$$f = \underbrace{V_f}_{\alpha_1} - \underbrace{(V_f - f)}_{\alpha_2}$$

اگر $f = \alpha_1 \nearrow - \alpha_2 \nearrow$ بنا به اولین مثال درس امروز، α_1 و α_2 با تغییر کراندارند و لذا بنا به تمرین بالا f نیز با تغییر کراندار است. $\square$

جلسه هفتم ۱۳۹۰/۸/۳

تعریف. فرض کنید ν یک تابع با تغییر کراندار باشد و لذا $\nu=\alpha_1^{\nearrow}-\alpha_2^{\nearrow}$. اگر f روی $[a,b]$ کراندار باشد، آنگاه $\int_a^b f d\nu$ برابر $\int f d\alpha_1-\int f d\alpha_2$ تعریف می‌شود.

این تعریف، خوش‌تعریف است زیرا اگر $\nu=\alpha_1-\alpha_2=\beta_1-\beta_2$ آنگاه

$$\alpha_1+\beta_2=\beta_1+\alpha_2 \Rightarrow \int f d(\alpha_1+\beta_2)=\int f d(\beta_1+\alpha_2) \Rightarrow$$

$$\int f d\alpha_1+\int f d\beta_2=\int f d\beta_1+\int f d\alpha_2 \Rightarrow \int f d\alpha_1-\int f d\alpha_2=\int f d\beta_1-\int f d\beta_2$$

پس مقدار $\int f d\nu$ مستقل از تجزیه $\nu=\alpha_1^{\nearrow}-\alpha_2^{\nearrow}$ است.

نکته. تقریباً تمام قضایای مربوط به انتگرال‌ها (در مورد انتگرال‌ها نسبت به توابع صعودی) نسبت به توابع با تغییر کراندار، درست است:

۱) اگر f پیوسته باشد، $\int f d\nu$ وجود دارد.

۲)

$$\int (f+g)\,d\nu=\int (f+g)\,d(\alpha_1-\alpha_2)=\underbrace{\int (f+g)\,d\alpha_1}_{\int f d\alpha_1+\int g d\alpha_1}-\underbrace{\int (f+g)\,d\alpha_2}_{\int f d\alpha_2+\int g d\alpha_2}$$

$$=\int f\,d\underbrace{(\alpha_1-\alpha_2)}_{\nu}+\int g\,d\underbrace{(\alpha_1-\alpha_2)}_{\nu}.\ \square$$

تمرین. هر تابع با تغییر کراندار، کراندار است.

حل. فرض کنیم $x\in[a,b]$. با در نظر گرفتن افراز $P=\{a,x\}$ برای بازه $[a,x]$ داریم

$$|f(x)|-|f(a)|\le |f(x)-f(a)|=\sum_{k=1}^{n}|\Delta f_k|\le V_f(a,x)\le V_f(a,b)$$

$$\therefore\ |f(x)|\le \underbrace{V_f(a,b)+|f(a)|}_{M}.\ \square$$

اینک در خاتمه این فصل، به معرفی روشی دیگر برای ارائه انتگرال ریمان - استیلتیس می‌پردازیم:

همچنان تابع f روی $[a,b]$ کراندار و تابع α روی این بازه صعودی در نظر گرفته می‌شود

تعریف.

فرض کنید $P=\{x_0,\dots,x_n\}$ یک افراز برای $[a,b]$ باشد و به ازای هر $1\le i\le n$، $t_i\in[x_{i-1},x_i]$.

در این صورت $S(P,f,\alpha)=\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta\alpha_i$ را یک مجموع ریمان - استیلتیس گوییم.

قضیه (۲۲). $f\in\mathcal{R}_{[a,b]}(\alpha)$ اگر و تنها اگر Aای باشد که

$$\forall\varepsilon\ \exists P_\varepsilon\ \forall P\supseteq P_\varepsilon\ \forall S(P,f,\alpha);\quad |S(P,f,\alpha)-A|<\varepsilon \qquad (*)$$

در این صورت $A=\int_a^b f\,d\alpha$.

برهان. فرض کنیم $f\in\mathcal{R}(\alpha)$. گیریم $\varepsilon>0$ داده شده باشد. بنا به محک (شرط) ریمان

$$\exists P_\varepsilon\ \forall P\supseteq P_\varepsilon;\quad (U-L)(P,f,\alpha)<\varepsilon.$$

اینک $P=\{x_0,\dots,x_n\}$ را ظریف‌تر از P_ε می‌گیریم. به ازای هر $1\le i\le n$، $m_i\le f(t_i)\le M_i$ که در آن $t_i\in[x_{i-1},x_i]$.

$$\Rightarrow \sum m_i\Delta\alpha_i\le \overbrace{\sum f(t_i)\Delta\alpha_i}^{S(P,f,\alpha)}\le \sum M_i\Delta\alpha_i \qquad (1)$$

abcd و عدد

$$〃 \le \int f\,d\alpha \le 〃 \qquad (2)$$

$$(1),(2)\Rightarrow \left|S(P,f,\alpha)-\int f\,d\alpha\right|\le (U-L)(P,f,\alpha)<\varepsilon. \quad ///$$

بالعکس، فرض کنیم Aای باشد که در $(*)$ صدق کند. فرض کنیم $\varepsilon>0$ داده شده باشد. بنا به $(*)$

$$\exists P_\varepsilon\ \forall P\supseteq P_\varepsilon\ \forall S(P,f,\alpha);\quad \underbrace{|S(P,f,\alpha)-A|<\frac{\varepsilon}{2}}$$

$$A-\frac{\varepsilon}{2}<S(P,f,\alpha)<A+\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\underbrace{f(t_1)\Delta\alpha_1+\sum_{i=2}^{n} f(t_i)\Delta\alpha_i}\ ;\quad t_1\in[x_0,x_1]$$

$$f(t_1)<\underbrace{\frac{1}{\Delta\alpha_1}\left(A+\frac{\varepsilon}{2}-\sum_{i=2}^{n} f(t_i)\Delta\alpha_i\right)}_{\text{کران بالا}}$$

$$f(t_2) \leq \frac{1}{\Delta\alpha_2}\left(A+\frac{\varepsilon}{4} - M_1\Delta\alpha_1 - \sum_{i=3}^{n} f(t_i)\Delta\alpha_i\right) \to \ ! \ldots$$

با گرفتن سوپرمم روی t_1 ها داریم $M_1 \leq \frac{1}{\Delta\alpha_1}\left(A+\frac{\varepsilon}{4}-\cdots\right)$ در زیربازه اول

با ادامه این روند داریم $\sum_{i=1}^{n} M_i \Delta\alpha_i \leq A+\frac{\varepsilon}{4}$ (۳)

و با تکرار آن‌ها با اینفیمم‌ها داریم $A-\frac{\varepsilon}{4} \leq \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta\alpha_i$ (۴)

$$(3),(4) \overset{\text{abcd } U_{\text{lg}}}{\Longrightarrow} (U-L)(P,f,\alpha) \leq A+\frac{\varepsilon}{4}-\left(A-\frac{\varepsilon}{4}\right)=\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.$$

پس $f\in\mathcal{R}(\alpha)$. $\square$

کاربرد مجموع ریمان

فرض کنیم f روی $[0,1]$ پیوسته باشد و $P_n=\{0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\ldots,1\}$ افراز منظم باشد. بگیرید $t_i=\frac{i-1}{n}$ $\left[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}\right]$

$$S(P_n,f)=\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i-1}{n}\right)\frac{1}{n}$$

قضیه بالا نشان می‌دهد $\lim_{n\to\infty} S(P_n,f)=\int_0^1 f(x)dx$. پس

$$\int_0^1 f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(f(0)+f\left(\frac{1}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right)$$

مثال: مطلوبست

$$L=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n-2}+\cdots+\frac{1}{2n-(n-1)}\right]$$

حل.

$$L=\lim_{n}\frac{1}{n}\left[\frac{1}{2-0}+\frac{1}{2-\frac{1}{n}}+\cdots+\frac{1}{2-\frac{n-1}{n}}\right]$$

$$=\int_0^1\frac{dx}{2-x}=-\ln|2-x|\Big]_0^1=\ln 2. \ \square$$

جلسه هشتم ۱۳۹۰/۸/۷

فصل ۲

دنباله‌ها و سری‌های توابع

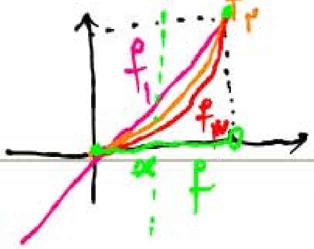
یادآوری: دنباله تابعی است بر $\mathbb{N}$. اگر $f: n \mapsto f(n) = a_n$ (یا x_n)، f را با $\{a_n\}$ یا (x_n) نمایش می‌دهند. می‌گوییم $\lim a_n = a$ هرگاه

$$\forall \varepsilon\ \exists N\ \forall n \geq N;\ d(a_n, a) < \varepsilon$$

: $\{a_n\}$ به a همگراست.

اگر $\{x_n\}$ یک دنباله در $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ باشد و $s_n = x_1 + \cdots + x_n$ آنگاه منظور از سری $\sum x_n$ همان دنباله جمع‌های جزئی آن $\{s_n\}$ است. اگر $s_n \to x$ آنگاه می‌گوییم سری $\sum x_n$ به x همگراست و می‌نویسیم $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x$ (مقدار سری). در غیر این صورت سری را واگرا می‌گویند.

تعریف: فرض کنید برای هر n، $f_n: E \subseteq X \to \mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ یک تابع باشد. در این صورت $\{f_n\}$ را یک دنباله توابع و $\sum f_n$ را سری توابع می‌گوییم.



مثال ۱) $f_n(x) = x^n,\ x \in [0,1]$. اگر $0 \leq x < 1$ (ثابت) آنگاه

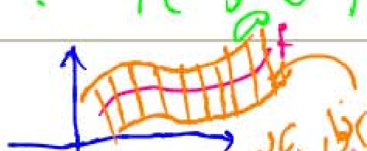
$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = 0$$

$$\lim_n f_n(1) = \lim_n 1^n = 1$$

Pointwise
نقطه‌وار

اگر $f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$ آنگاه می‌گوییم $\{f_n\}$ به طور نقطه‌ای به f همگراست و می‌نویسیم $f_n \xrightarrow{p} f$

توجه کنید که f_nها پیوسته‌اند ولی حد نقطه‌ای آنها f ناپیوسته است.



عرض نوار 2ε است

اگر به ازای هر ε، از مرتبه‌ای به بعد نمودار f_nها داخل نوار به عرض 2ε حول نمودار f واقع شود، می‌گوییم $\{f_n\}$ به طور یکنواخت به f همگراست و می‌نویسیم $f_n \xrightarrow{u} f$

uniformly
به طور یکنواخت

این نوع همگرایی توابع بیشتر خواص را حفظ می‌کند.

مثال ۲) فرض کنید $x\in\mathbb{R}$. $f_n(x)=\frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$. در این صورت $f'_n(x)=\sqrt{n}\cos(nx)$

$\lim_n f'_n(0)=\lim_n \sqrt{n}=+\infty$, $\lim_n f_n(x)=0$ $\qquad 0\le|f_n(x)|\le\frac{1}{\sqrt{n}}$

پس $\{f_n\}$ نقطه‌وار به تابع ثابت $f=0$ همگراست. ولی $\{f'_n(0)\}$ همگرا نیست چه رسد

به این که $f'_n(0)$ به $f'(0)=0$ همگرا باشد.

Counterexamples in Analysis

اولمستد و گلدبوم

کتاب مناسبی برای مثال نقض است.

تعریف. می‌گوییم $\{f_n\}$ همگرای نقطه‌ای به f است هرگاه

$$\forall x\forall\varepsilon\exists N\forall n\ge N;\ |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon \equiv \lim_n f_n(x)=f(x)$$

و می‌نویسیم $f_n\xrightarrow{p}f$.

تعریف. می‌گوییم $\{f_n\}$ همگرای یکنواخت به f است هرگاه

$$\forall\varepsilon\exists N\forall n\ge N\forall x;\ |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$

$\equiv$

و می‌نویسیم $f_n\xrightarrow{u}f$.

قضیه ۲۲. اگر به ازای هر n، f_n در x_0 پیوسته باشد و $f_n\xrightarrow{u}f$ آنگاه f در x_0 پیوسته است.

برهان: فرض کنیم $\varepsilon>0$ داده شده است. بنابه تعریف همگرایی یکنواخت

$$\exists N\forall n\ge N\forall x;\ |f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{3}$$

به خصوص به ازای $n=N$ داریم

$$\forall x;\ |f_N(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{3} \quad (1)$$

چون f_N در x_0 پیوسته است پس δ هست که

$$\forall x;\ d(x,x_0)<\delta\Rightarrow|f_N(x)-f_N(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3} \quad (2)$$

پس

$$\forall x;\ d(x,x_0)<\delta\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|\le|f(x)-f_N(x)|+|f_N(x)-f_N(x_0)|+|f_N(x_0)-f(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon. \qquad \square$$

تعریف. می‌گوییم $\{f_n\}$ کراندار نقطه‌ای است هرگاه $\forall x \exists M_x \forall n;\ |f_n(x)| \le M_x$

$$\equiv$$

تعریف. 〃 〃 〃 کراندار یکنواخت است 〃 $\exists M \forall x \forall n;\ |f_n(x)| \le M$

$$\equiv$$

تعریف. 〃 〃 دنباله‌ای از توابع کراندار 〃 $\forall n \exists M_n \underbrace{\forall x;\ |f_n(x)| \le M_n}_{\text{یعنی } f_n \text{ به عنوان یک تابع کراندار است}}$

قضیه. اگر $f_n \xrightarrow{u} f$ و f_nها کراندار (توابعی) باشند آنگاه f نیز کراندار است.

اثبات. با $\epsilon=1$، از تعریف همگرایی یکنواخت داریم $\exists N \forall n\ge N \forall x;\ |f_n(x)-f(x)|<1$

$|f(x)|-|f_n(x)| \le$

به ویژه، $\forall x;\ |f(x)| \le |f_N(x)|+1$

$\le M_N+1 =: M.\ \square$

جلسه نهم ۱۰/۸/۱۳۹۰

قضیه. دنباله $\{f_n\}$ همگرای یکنواخت به یک تابع مانند f است اگر و تنها اگر

$$\forall \varepsilon\, \exists N\, \forall n,m \ge N\, \forall x;\quad |f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon$$

(محک کوشی)

$P\Rightarrow(q\Rightarrow r)\equiv(P\wedge q)\Rightarrow r$

برهان. $(\Leftarrow)$ فرض کنیم $f_n\xrightarrow{u} f$ و $\varepsilon>0$ داده شده باشد.

بنا به تعریف همگرایی یکنواخت،

ف، خ، فخ

$$\exists N\, \forall k\ge N\, \forall x;\ |f_k(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\forall m,n\ge N\, \forall x;\ |f_n(x)-f_m(x)|\le |f_n(x)-f(x)|+|f_m(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

$(\Rightarrow)$ فرض کنیم محک کوشی برقرار باشد. گیریم x یک عنصر دلخواه از دامنه ثابت باشد. بنا به محک کوشی

$$\forall\varepsilon\, \exists N\, \forall n,m\ge N;\ |f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon$$

این رابطه نشان می‌دهد که دنباله عددی $\{f_n(x)\}$ کوشی است. چون $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ کامل هستند پس این دنباله همگرا است مثلاً به $f(x)$. به این ترتیب به یک تابع $x\xrightarrow{f} f(x)$ دست می‌یابیم. نشان می‌دهیم که $f_n\xrightarrow{u} f$:

فرض کنیم $\varepsilon>0$ داده شده باشد. بنا به محک کوشی N هست که به ازای هر x داریم

$$\forall n\left[\forall m;\ |f_n(x)-f_m(x)|<\frac{\varepsilon}{2}\right]$$

از طرفین حد می‌گیریم وقتی که $m\to\infty$ داریم

m مستقل از

$$|f_n(x)-f(x)|\le\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$$

پس $f_n\xrightarrow{u} f$. □

تذکر مهم: اگر $f_n\xrightarrow{u} f$ آنگاه $f_n\xrightarrow{p} f$ زیرا گیریم x_0 دلخواه باشد. فرض کنیم $\varepsilon>0$ داده شده باشد. بنا به

$\forall x_0;\ f_n(x_0)\to f(x_0)$

تعریف همگرایی یکنواخت،

$$\exists N\, \forall n\ge N\left[\forall x;\ |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon\right]$$

پس $|f_n(x_0)-f(x_0)|<\varepsilon$ پس $f_n(x_0)\to f(x_0)$. □

قضیه: (انتگرال‌گیری و همگرایی یکنواخت). فرض کنید $f_n \xrightarrow[{[a,b]}]{u} f$ روی $[a,b]$، f_nها کراندار باشند (این بنا به لم ۱ قضایا در قبل f نیز کراندار است). α صعودی باشد و $f_n \in \underset{[a,b]}{R(\alpha)}$. در این صورت $f \in \underset{[a,b]}{R(\alpha)}$، $\int_a^b f_n \, d\alpha \to \int_a^b f \, d\alpha$.

لم ۱: $f_n \xrightarrow{u} f$ اگر و تنها اگر $\lim_n \sup_x |f_n(x) - f(x)| = 0$.

برهان: $(\Leftarrow)$ $\forall \varepsilon \exists N \forall n \geq N \left[\forall x;\ |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}\right]$

$$\Downarrow$$

$$\sup_x |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

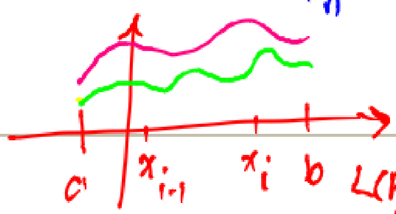
$(\Rightarrow)$ $\forall \varepsilon \exists N \forall n \geq N \ \underbrace{\sup_x |f_n(x) - f(x)|}_{\forall x;\ |f_n(x) - f(x)| <} < \varepsilon$

$$f \leq g \iff \forall x;\ f(x) \leq g(x)$$

برهان قضیه. فرض کنیم $\varepsilon_n = \sup_x |f_n(x) - f(x)|$. پس $\forall x$ $\underbrace{|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon_n}_{f_n(x) - \varepsilon_n \leq f(x) \leq f_n(x) + \varepsilon_n}$ و لذا

$$f_n - \varepsilon_n \leq f \leq f_n + \varepsilon_n$$

لم ۲. اگر $f \leq g$ آنگاه $\overline{\int} f \, d\alpha \leq \overline{\int} g \, d\alpha$، $\underline{\int} f \, d\alpha \leq \underline{\int} g \, d\alpha$.



برهان. لذا $M_i^f \leq M_i^g$ ، $m_i^f \leq m_i^g$، $L(P,f,\alpha) \leq L(P,g,\alpha)$ ، $U(P,f,\alpha) \leq U(P,g,\alpha)$. $\square$

$$\underline{\int} f_n \, d\alpha - \underline{\int} \varepsilon_n \, d\alpha \leq \underline{\int} f \, d\alpha \leq \overline{\int} f \, d\alpha \leq \overline{\int} f_n \, d\alpha + \overline{\int} \varepsilon_n \, d\alpha \quad (\text{بنا به لم ۲})$$

$$\int f_n \, d\alpha - \varepsilon_n (\alpha(b) - \alpha(a)) \leq \underline{\int} f \, d\alpha \leq \overline{\int} f \, d\alpha \leq \int f_n \, d\alpha + \varepsilon_n (\alpha(b) - \alpha(a)) \quad (f_n \text{ها انتگرال‌پذیرند})$$

بنا به قانون abcd، داریم

$$0 \leq \left|\overline{\int} f \, d\alpha - \underline{\int} f \, d\alpha\right| \leq 2\varepsilon_n (\alpha(b) - \alpha(a))$$

چون $f_n \xrightarrow{u} f$ پس بنا به لم ۱ $\varepsilon_n \to 0$. اینک بنا به قضیه فشردگی، $\lim_n \left(\overline{\int} f \, d\alpha - \underline{\int} f \, d\alpha\right) = 0$

پس $\overline{\int} f \, d\alpha = \underline{\int} f \, d\alpha$ و لذا f انتگرال‌پذیر است.

بنابه (●)، $\int f_n d\alpha - \varepsilon_n(\alpha(b)-\alpha(a)) \leq \int f d\alpha \leq \int f_n d\alpha + \varepsilon_n(\alpha(b)-\alpha(a))$ پس

$$\boxed{\begin{gathered} a-c \leq b \leq a+c \\ \Updownarrow \\ |b-a| \leq c \end{gathered}}$$

$$0 \leq \left|\int f_n d\alpha - \int f d\alpha\right| \leq \varepsilon_n(\alpha(b)-\alpha(a))$$

پس بنابه قضیه فشردگی و با توجه به اینکه $\varepsilon_n \to 0$، داریم $\int f_n d\alpha \to \int f d\alpha$. $\square$

جلسه دهم ۱۳۹۰/۸/۱۴

قضیه. اگر $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع مشتق‌پذیر بر $[a,b]$ باشد به طوری که x_0 ای موجود باشد که $\{f_n(x_0)\}$ همگرا باشد و ثانیاً دنباله $\{f'_n\}$ همگرای یکنواخت باشد، آنگاه f ای وجود دارد که $f_n \xrightarrow{u} f$ و به علاوه به ازای هر x، $\lim_{n\to\infty} f'_n(x) = f'(x)$.

برهان. فرض کنیم $\varepsilon>0$ داده شده باشد. بنابه اولاً و ثانیاً، N ای هست که برای هر $n,m>N$،

$$|f_n(x_0)-f_m(x_0)|<\frac{\varepsilon}{2} \quad (1)$$

و بنابه ثانیاً

$$\forall x;\ |f'_n(x)-f'_m(x)|<\frac{\varepsilon}{2(b-a)} \quad (2)$$

بنابه قضیه مقدار میانگین (لاگرانژ) برای f_n-f_m داریم

$$\forall x\in[a,b]\ \exists t\in(a,b);\ |(f_n(x)-f_m(x))-(f_n(x_0)-f_m(x_0))| \le |f'_n(t)-f'_m(t)||x-x_0| \underset{(2)}{<} \frac{\varepsilon|x-x_0|}{2(b-a)} < \frac{\varepsilon}{2} \quad (3)$$

اینک داریم:

$$\forall x;\ |f_n(x)-f_m(x)| \le |(f_n(x)-f_m(x))-(f_n(x_0)-f_m(x_0))| + |f_n(x_0)-f_m(x_0)| \underset{(3)}{\overset{(1)}{<}} \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

بنابراین $\{f_n\}$ همگرای یکنواخت به مثلاً تابع f است.

حال تعریف می‌کنیم $\varphi(t):=\frac{f(t)-f(x)}{t-x}$, $\varphi_n(t):=\frac{f_n(t)-f_n(x)}{t-x}$. از اینکه $f_n\xrightarrow{u} f$ نتیجه می‌شود که $\varphi_n \xrightarrow{u}\varphi$ (4). در واقع

$$\forall t\ |\varphi_n(t)-\varphi_m(t)| = \frac{|(f_n(t)-f_n(x))-(f_m(t)-f_m(x))|}{|t-x|} \overset{\text{قضیه}}{\le} \frac{|f'_n(u)-f'_m(u)|\,\cancel{|t-x|}}{\cancel{|t-x|}} \overset{(2)}{\le}\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

نکته. اگر $\overset{\text{پیوسته}}{f_n}$ و $f_n\xrightarrow{u} f$:

$$\lim_{t\to x}\lim_{n\to\infty} f_n(t) = \lim_{t\to x} f(t) = f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{t\to x} f_n(t)$$

در حالت کلی به جای پیوستگی می‌توان وجود $\lim_{t\to x} f_n(t)$ را فرض کرد و نشان داد که اگر $f_n\xrightarrow{u} f$ و برای هر n، $\lim_{t\to x} f_n(t)$ موجود باشد آنگاه

$$\lim_{t\to x}\lim_{n} f_n(t) = \lim_{n}\lim_{t\to x} f_n(t)$$

داریم

$$\forall x;\ \lim_{n\to\infty} f'_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{t\to x}\varphi_n(t) \overset{\text{نکته ۴}}{=} \lim_{t\to x}\lim_{n\to\infty}\varphi_n(t) \overset{(4)}{=} \lim_{t\to x}\varphi(t) = f'(x).\ \square$$

یکی از سوالات خوبی که پرسیده شد این بود که چه موقع همگرایی نقطه‌ای $\{f_n\}$ به یک تابع f همگرایی یکنواخت آن را نتیجه می‌دهد. قضیه ذیل پاسخی جزئی به این سوال فراهم می‌کند:

قضیه (دینی). اگر $\{f_n\}$ دنباله‌ای (نزولی) از توابع پیوسته باشد که نقطه‌وار به تابعی (پیوسته) مانند f همگرا باشد (روی یک مجموعه فشرده K)، آنگاه $f_n \xrightarrow{u} f$.

$\forall n\ f_{n+1} \le f_n$

$\forall n\ \forall x;\ f_{n+1}(x) \le f_n(x)$ (1) (زیرا $\{f_n\}$ نزولی است)

$\forall x;\ \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ (2)

برهان. قرار می‌دهیم $g_n := f_n - f \ge 0$. در این صورت g_nها پیوسته‌اند، $\forall n\ g_{n+1} \le g_n$ و $g_n \xrightarrow{p} 0$. اگر نشان دهیم $\boxed{g_n \xrightarrow{u} 0}$ به حکم تمام است (زیرا در این صورت $\begin{cases} g_n \xrightarrow{u} 0 \\ f \xrightarrow{u} f \text{ (دنباله ثابت)}\end{cases}$ نتیجه می‌دهد که $f_n = g_n + f \to 0 + f = f$):

اکنون به اثبات $g_n \xrightarrow{u} 0$ می‌پردازیم:

گیریم $\varepsilon > 0$ داده شده باشد. قرار می‌دهیم $K_n = \{x \in K \mid g_n(x) \ge \varepsilon\} = \underset{\text{پیوسته}}{g_n^{-1}}(\underbrace{[\varepsilon, \infty)}_{\text{بسته}})$. پس K_n زیرمجموعه بسته فشرده است.

$K_n \subseteq K$ پس K_n فشرده است.

چون $g_{n+1} \le g_n$ پس $K_{n+1} \subseteq K_n$ (زیرا $x \in K_{n+1} \Rightarrow g_{n+1}(x) \ge \varepsilon \Rightarrow g_n(x) \ge g_{n+1}(x) \ge \varepsilon \Rightarrow x \in K_n$)

خلف: فرض اگر همه K_nها ناتهی باشند، بنابه قضیه «اشتراک هر دنباله تودرتو از مجموعه فشرده ناتهی، ناتهی است» داریم $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \ne \emptyset$ و لذا اگر $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ آنگاه به ازای هر n، $g_n(x) \ge \varepsilon$ و با گرفتن حد از طرفین وقتی که $n \to \infty$ داریم $0 \ge \varepsilon$ ✗.

پس N هست که $K_N = \emptyset$. چون به ازای هر $n \ge N$، $K_n \subseteq K_N$، پس به ازای هر $n \ge N$، $\underbrace{K_n = \emptyset}$

$\forall x;\ |g_n(x)| = g_n(x) < \varepsilon$. $\square$

مثال) دنباله توابع $f_n(x) = \frac{1}{nx+1}$، $x \in (0,1]$ همگرای نقطه‌ای و نه یکنواخت به $f = 0$ است.

زیرا

$$\sim \forall \varepsilon \exists N \forall n \geq N \forall x \in (0,1] \; ; \; |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{nx+1} < \varepsilon$$

$$\exists \varepsilon \forall N \exists n \geq N \exists x \in (0,1] ; \; \frac{1}{nx+1} \geqslant \varepsilon$$

چنان که $\varepsilon = \frac{1}{2}$ اختیار شود، به ازای هر N، چنان که $n=N$ ، $x=\frac{1}{N}$ اختیار شود، خواهیم داشت:

$$\frac{1}{nx+1} = \frac{1}{2} \geqslant \frac{1}{2} . \; \square$$

جلسه یازدهم ۹۰/۸/۱۷

تعریف. فرض کنید E یک فضای برداری باشد. تابع $\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}$ را یک نرم روی V می‌گویند هرگاه

(i) $\|x\|=0 \Leftrightarrow x=0$; (ii) $\|\lambda x\|=|\lambda|\,\|x\|$; (iii) $\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|$

(λ اسکالر)

و در این صورت $(E,\|\cdot\|)$ را یک فضای نرم‌دار می‌گویند. اگر $\|x-y\|=d(x,y)$، به وضوح d یک متر است. اگر E همراه این متر یک فضای متری کامل باشد آنگاه آن را فضای باناخ می‌گویند.

زندگی‌نامه باناخ: http://www.um.ac.ir/~moslehian

مثال ۱) $\mathbb{R}^n$ همراه با نرم اقلیدسی $\|(x_1,\dots,x_n)\|=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ و اعمال مؤلفه‌ای (از فضای باناخ)

۲) $c_0 \subseteq c \subseteq \ell^\infty$ همراه نرم $\|\{x_n\}\|=\sup_n |x_n|$ و اعمال جمع دنباله‌ای، ضرب عدد در دنباله

(c_0: فضای دنباله‌های همگرا به صفر؛ c: فضای دنباله‌های همگرا؛ ℓ^∞: فضای دنباله‌های کراندار)

$$\ell^p=\left\{\{x_n\} \;\middle|\; \underbrace{\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}}_{\|\{x_n\}\|_p}<\infty\right\} \quad (1\le p<\infty)$$

۳) $M_{m\times n}(\mathbb{C})$ همراه اعمال ماتریسی و هر یک از نرم‌های روبرو: $\|[a_{ij}]\|_{\infty}=\sum_{i,j}|a_{ij}|$، $\|[a_{ij}]\|_m=\max_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}|a_{ij}|$

۴) مهم: اگر X یک فضای متری فشرده باشد، آنگاه $C(X):=\{f:X\to\mathbb{C} \mid f \text{ پیوسته است}\}$ همراه اعمال توابع

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x) \qquad (\lambda f)(x)=\lambda f(x)$$

$$\|f\|_\infty=\underset{x\in X}{\overset{\max}{\sup}}|f(x)|$$

(X فشرده، f پیوسته)

یک فضای باناخ است. توضیح مهم:

$$\|f\|_\infty=0 \Leftrightarrow \sup_x|f(x)|=0 \Leftrightarrow \forall x;\ f(x)=0 \Leftrightarrow f=0;$$

$$\|\lambda f\|_\infty=\sup_x \underbrace{|(\lambda f)(x)|}_{|\lambda|\,|f(x)|}=|\lambda|\sup_x|f(x)|=|\lambda|\,\|f\|_\infty;$$

$$\|f+g\|_\infty = \sup_x |f(x)+g(x)| \leq \sup_x |f(x)| + \sup_x |g(x)| = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty .$$

$$|f(x)+g(x)| \leq |f(x)|+|g(x)| \leq \underbrace{\sup_x|f(x)| + \sup_x|g(x)|}_{\text{یک کران بالا}}$$

$$\therefore \sup_x|f(x)+g(x)| \leq \sup_x|f(x)| + \sup_x|g(x)|$$

پس $C(X)$ همراه نرم سوپریمم بالا یک فضای نرمدار است. اثبات اینکه در قضیه بعد نشان می‌دهیم که این فضا کامل است. همچنین ناتمام

قضیه. $(C(X), \|\cdot\|_\infty)$ یک فضای باناخ است.

برهان. فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله کوشی در $C(X)$ باشد. پس

$$\forall \varepsilon\ \exists N\ \forall m,n\geq N;\ d(f_n,f_m)=\underbrace{\|f_n-f_m\|_\infty}_{\sup_x|f_n(x)-f_m(x)|} < \varepsilon$$

$$\forall x;\ |f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon$$

بنابه محک کوشی، $\{f_n\}$ همگرای یکنواخت به یک تابع مثل f است. اما f_nها پیوسته‌اند، لذا بنابه قضیه «پیوستگی حد همگرای یکنواخت» f پیوسته است لذا $f\in C(X)$. گیریم $\varepsilon>0$ داده شده باشد. بنابه تعریف همگرایی یکنواخت

$$\exists N\ \forall n\geq N\ \forall x;\ |f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\underbrace{\sup_x |f_n(x)-f(x)|}_{\|f_n-f\|_\infty} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

پس $\{f_n\}$ در $(C(X),\|\cdot\|_\infty)$ به f همگرا است. □

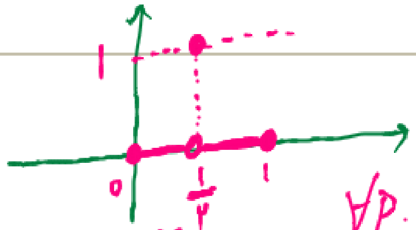
نکته. همگرایی یکنواخت معادل همگرایی در $(C(X),\|\cdot\|_\infty)$ است.

تعریف. یک نیم‌نرم روی فضای برداری E یک تابع $P: E\to\mathbb{R}$ است که در همه شرایط نرم به جز $\|x\|=0 \Rightarrow x=0$ صدق کند.

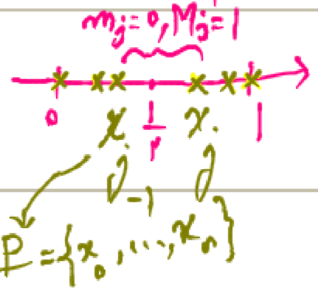
مثال) اگر $\mathcal{L}^1_R[a,b]$ فضای تمام توابع f باشد به طوری که $|f|\in R[a,b]$، آنگاه $\|f\|=\int_a^b|f(x)|\,dx$ یک نیم‌نرم است. اگر $f(x)=\begin{cases}1 & x=\frac{a+b}{2}\\ 0 & \text{در غیر این صورت}\end{cases}$ آنگاه $f\neq0$ ولی $\|f\|=\int_a^b|f(x)|\,dx=0$.

تمرین: تابع $f(x)=\begin{cases}1 & x=\frac{1}{2}\\ 0 & x\neq\frac{1}{2}\end{cases}$ در $[0,1]$ ریمان انتگرال‌پذیر است.

حل. f انتگرال‌پذیر است چرا تعداد شمارا نقطه ناپیوستگی دارد.



$$\forall P;\ L(P,f)=\sum_{i=1}^{j-1}\underbrace{m_i}_{0}\Delta x_i+\underbrace{m_j}_{0}\Delta x_j+\sum_{i=j+1}^{n}\underbrace{m_i}_{0}\Delta x_i=0$$



$$\therefore \int_0^1 f(x)\,dx=\sup_P L(P,f)=0.$$

$$\forall n;\ U(P_n,f)=\sum_{i=1}^{j-1}0\underbrace{\Delta x_i}_{\frac{1}{n}}+1\underbrace{\Delta x_j}_{\frac{1}{n}}+\sum_{i=j+1}^{n}0\underbrace{\Delta x_i}_{\frac{1}{n}}=\frac{1}{n}$$

P_n افراز منتظم باشد. را درنظر بگیریم

$f\geq0$

$$0\leq\int_0^1 f(x)\,dx=\overline{\int_0^1} f(x)\,dx=\inf_P U(P,f)\leq\inf_n U(P_n,f)=0$$

تعریف: فرض کنیم $\mathcal{F}$ یک خانواده از توابع باشد ($\{f_\alpha\}_{\alpha\in I}$). $\mathcal{F}$ را خانواده‌ای از توابع همپیوسته می‌گوییم هرگاه

$$\cancel{\forall f}\ \forall\varepsilon\ \exists\delta\ \forall x,y\ \forall f\in\mathcal{F};\ d(x,y)<\delta\Rightarrow d(f(x),f(y))<\varepsilon$$

نکته: نتیجه فوری این است که هر یک از اعضای $\mathcal{F}$ پیوسته یکنواخت هستند.

قضیه. اگر $f_n\in C(X)$ و $\{f_n\}$ دنباله‌ای همگرای یکنواخت باشد، آنگاه خانواده $\{f_n\}$ همپیوسته است.

فشرده

برهان. فرض کنیم $\varepsilon>0$ داده شده باشد. بنا به کوشی بودن همگرایی یکنواخت

$$\exists N\ \forall m,n\geq N\ \forall x;\quad |f_n(x)-f_m(x)|<\frac{\varepsilon}{3} \quad (1)$$

چون $f_1, \dots, f_N$ بر فضای فشرده X پیوسته‌اند، پس پیوسته یکنواخت‌اند، لذا

$$\forall 1\leq i\leq N\ \exists \delta_i\ \forall x,y;\quad d(x,y)<\delta_i \Rightarrow |f_i(x)-f_i(y)|<\frac{\varepsilon}{3} \quad (2)$$

همچنین با $\delta=\min\limits_{1\leq i\leq N}\delta_i$، داریم

$$\forall x,y\ \forall n;\quad |f_n(x)-f_n(y)|\leq |f_n(x)-f_N(x)|+|f_N(x)-f_N(y)|+|f_N(y)-f_n(y)|$$

$$\begin{cases} \leq \frac{\varepsilon}{3}<\varepsilon & n<N \\ < \underset{(1)}{\frac{\varepsilon}{3}}+\underset{(2)}{\frac{\varepsilon}{3}}+\underset{(1)}{\frac{\varepsilon}{3}}=\varepsilon. \ \square & n\geq N \end{cases}$$

جلسه دوازدهم و سیزدهم ۱۳۹۰/۸/۲۱ ، ۱۳۹۰/۹/۱

یادآوری. دنباله‌ی $\{f_n\}$ از توابع مختلط‌مقدار روی X را همپیوسته می‌نامیم هرگاه

$$\forall \varepsilon\ \exists \delta\ \forall n\ \forall x,y\ ;\ d(x,y)<\delta \Rightarrow |f_n(x)-f_n(y)|<\varepsilon$$

قضیه. اگر $\{f_n\}$ کراندار نقطه‌ای بر مجموعه‌ی شمارای E باشد آنگاه $\{f_n\}$ زیردنباله‌ای همگرا دارد.

لم : اگر $\{x_n\}$ دنباله‌ای کراندار از اعداد مختلط باشد آنگاه زیردنباله همگرا دارد (زیرا $\{x_n\}$ مشمول در یک حجره دو بعدی است و لذا دارای زیردنباله همگراست) فشرده

برهان. فرض کنیم $E=\{x_1,x_2,x_3,\dots\}$ شمارا. دنباله $\{f_n(x_1)\}$ کراندار است پس بنابه لم بالا دارای زیردنباله همگرایی است که آن را $\{f_{1,k}(x_1)\}_{k=1}^{\infty}$ می‌نامیم. دنباله $\{f_{1,k}(x_2)\}$ زیردنباله دنباله کراندار $\{f_n(x_2)\}$ است و لذا خودش کراندار است پس بنابه لم بالا دارای زیردنباله همگراست که آن را با $\{f_{2,k}(x_2)\}$ نمایش می‌دهیم. با ادامه این روند به یک دنباله از دنباله‌ها دست می‌یابیم:

$a_1, a_2, a_3, \dots$
با حذف تعداد متناهی یا نامتناهی a (مثلاً شمارش) و بدون تغییر ترتیب به یک زیردنباله دست می‌یابیم
$a_{n_1}, a_{n_2}, \dots$
توجه کنید که الزاماً $n_1<n_2<\dots$

$$\begin{matrix} f_{1,1}, & f_{1,2}, & f_{1,3}, & \dots \\ f_{2,1}, & f_{2,2}, & f_{2,3}, & \dots \\ f_{3,1}, & f_{3,2}, & f_{3,3}, & \dots \end{matrix}$$

ویژگی مهم ترتیب بالا این است که هر سطر، زیردنباله سطر بالایی است و به علاوه به ازای هر i، $\{f_{i,k}(x_i)\}_{k\in\mathbb{N}}$ همگراست.

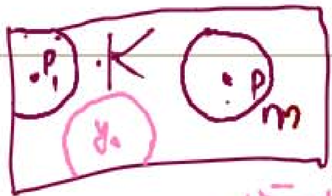
اگر $\{f_{n,n}\}$ را در نظر بگیریم، اولاً زیردنباله $\{f_n\}$ است ثانیاً به ازای هر x_i، زیردنباله $\{f_{n,n}(x_i)\}$ (با حذف احیاناً $i-1$ جمله اول) زیردنباله $\{f_{i,n}(x_i)\}$ است پس همگراست. $\square$

اثبات بالا موسوم به اثبات به روش قطری کانتور است.

قضیه. فرض کنید K فشرده باشد، $\forall n,\ f_n\in C(K)$ و $\{f_n\}$ بر K کراندار نقطه‌ای و همپیوسته باشد

آنگاه (i) دنباله $\{f_n\}$ کراندار یکنواخت است

(ii) دنباله $\{f_n\}$ زیردنباله همگرای یکنواخت دارد.



برهان. (i). بنابه تعریف همپیوستگی

$$\exists \delta\ \forall n\ \forall x,y;\ d(x,y)<\delta \Rightarrow |f_n(x)-f_n(y)|<1 \quad (\square)$$

گردآیه $\{N_\delta(y)\}_{y\in K}$ یک پوشش باز K است چون K فشرده است پس

$$\exists p_1,\dots,p_m\in K;\quad K\subseteq N_\delta(p_1)\cup\dots\cup N_\delta(p_m) \quad (*)$$

گیریم $x\in K$ (دلخواه)، بنابه $(*)$، p_j ای هست که $x\in N_\delta(p_j)$. پس $d(x,p_j)<\delta$. بنابه $(\square)$،

$\forall n,\quad \big(|f_n(x)|-|f_n(p_j)|\le\big)\ |f_n(x)-f_n(p_j)|<1$

بنابراین $\forall n,\ |f_n(x)|<1+|f_n(p_j)|\le 1+M_j\le 1+\max_{1\le j\le m}M_j$ ///

$\{f_n\}$ کراندار نقطه‌ای است: $\forall j\ \exists M_j\ \forall n;\ |f_n(p_j)|\le M_j$

(ii) چون K فشرده است، پس دارای یک زیرمجموعه چگال شماراست:

$\{N_1(x)\}_{x\in K}$ یک پوشش باز K است پس دارای زیرپوشش متناهی $\{N_1(x_{1,i})\}_{1\le i\le n_1}$ است.

$\{N_{\frac12}(x)\}_{x\in K}$ " " " " " " " " " $\{N_{\frac12}(x_{2,i})\}_{1\le i\le n_2}$ " "

در این صورت به فهرست (شمارای) زیر روبرو می‌شویم:

$x_{1,1},\ x_{1,2},\ \dots,\ x_{1,n_1}$ متناهی

$x_{2,1},\ x_{2,2},\ \dots,\ x_{2,n_2}$

فرض کنیم $x\in K$ و $N_\varepsilon(x)$ دلخواه باشد. m هست که $\frac1m<\varepsilon$. بنابه ساخت بالا،

$\exists j,\ x\in N_{\frac1m}(x_{m,j})$

$\downarrow$

$d(x_{m,j},x)<\frac1m<\varepsilon$ در این صورت $x_{m,j}\in N_\varepsilon(x)$

پس $N_\varepsilon(x)\cap E\neq\emptyset$

$$\begin{matrix} \frac11 & \frac12 & \frac13 & \frac14 & \frac15 & \cdots \\ \frac21 & \frac22 & \frac23 & \frac24 & \frac25 & \cdots \\ \frac31 & \frac32 & \frac33 & \frac34 & \frac35 & \cdots \\ \vdots \end{matrix}$$

مجموعه اعداد گویا مثبت شماراست

می‌توان نشان داد $E=\{x_{1,1},\dots,x_{1,n_1},x_{2,1},\dots\}$ که شماراست در K چگال نیز هست.

شرحی بر اثبات اولین قضیه این اسلاید:

$\{f_n(x)\}$ در هر نقطه E کراندار است. نشان می‌دهیم زیردنباله‌ای نقطه‌وار همگرا دارد.
$E = \{x_1, x_2, \dots\}$

کراندار $\{f_n(x_1)\} \curvearrowright f_2(x_1), f_4(x_1), f_6(x_1), f_8(x_1), \dots$ → $f_2, f_6, f_8, \dots$ ($f_{1,1}, f_{1,2}, f_{1,3}$)

کراندار $\{f_{2n}(x_2)\} \curvearrowright f_4(x_2), f_8(x_2), f_{12}(x_2), \dots$ → $f_4, f_8, f_{12}, \dots$ ($f_{2,1}, f_{2,2}, f_{2,3}$)

کراندار $\{f_{4n}(x_3)\} \curvearrowright f_8(x_3), f_{16}(x_3), f_{24}(x_3), \dots$ → $f_8, f_{16}, f_{24}, \dots$

$\vdots$ → $f_{16}, f_{32}, f_{48}, f_{64}, \dots$ $f_{n,n}$

ثابت می‌شود که $\{f_{n,n}\}$ زیردنباله $\{f_n\}$ است. نشان دهید $\{f_{n,n}(x_i)\}$ زیردنباله $\{f_{i,n}(x_i)\}$ از جمله $i-1$ به بعد است.

بنا به اولین قضیه این اسلاید، $\{f_n\}$ دارای زیردنباله $\{f_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ ($f_{n_i} = g_i$) است که روی E همگرای نقطه‌ای است.

نشان می‌دهیم همین $\{g_i\}$ همگرای یکنواخت است:

گیریم $\varepsilon>0$ داده شده باشد. بنا به همپیوستگی $\{f_n\}$:
$\exists\delta\ \forall n\ \forall x,y;\ d(x,y)<\delta \Rightarrow |f_n(x)-f_n(y)|<\varepsilon/3$ (1)

چون E در K چگال، K فشرده است:

$\exists x_1,\dots,x_m\in E;\quad K\subseteq N_\delta(x_1)\cup\dots\cup N_\delta(x_m)$ (2)

$\forall 1\le s\le m\ \exists N_s\ \forall i,j\ge N_s;\quad |g_i(x_s)-g_j(x_s)|<\varepsilon/3$ (3)

گیریم $N=\max_{1\le s\le m} N_s$. گیریم $x\in K$ دلخواه، و $i,j\ge N$ دلخواه باشند. بنا به (2) $1\le s\le m$ موجود است که $x\in N_\delta(x_s)$. پس بنا به (1)
$\forall i,\ |f_{n_i}(x)-f_{n_i}(x_s)|<\varepsilon/3$ (4) ($f_{n_i}=g_i$)

$$|g_i(x)-g_j(x)|\le|g_i(x)-g_i(x_s)|+|g_i(x_s)-g_j(x_s)|+|g_j(x_s)-g_j(x)| < \underset{(4)}{\varepsilon/3} + \underset{(3)}{\varepsilon/3} + \underset{(4)}{\varepsilon/3} = \varepsilon.\ \square$$

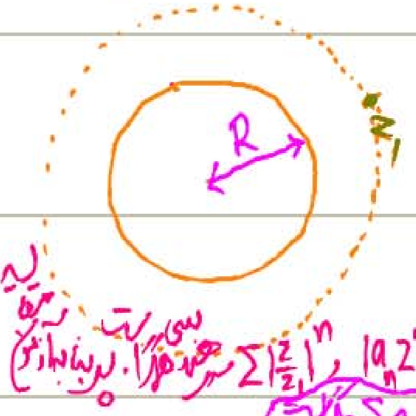
سری‌های توابع: اگر $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ یک سری توابع باشد آن را همگرای یکنواخت (یا نقطه‌ای) [همگرای] گوییم هرگاه دنباله‌ی جمع‌های جزئی آن $\left\{\sum_{k=1}^{n} f_k\right\}_{n=1}^{\infty}$ همگرای یکنواخت (یا همگرای نقطه‌ای) باشد. تقریباً همه قضایای مربوط به دنباله‌ی توابع در مورد سری‌های توابع (با حفظ دقت!) برقرار است.

سری‌های توانی: یک سری به صورت $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ که در آن a_nها و z_0 معلوم‌اند، سری توانی خوانده می‌شود. چون با انتقال $z \mapsto z-z_0$ سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ به سری $\sum a_n (z-z_0)^n$ تبدیل می‌شود پس می‌توان خود را به سری‌های از نوع $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ (با حفظ دقت!) محدود کنیم. ه

تعریف. بزرگترین دایره حول مبدأ که داخل آن سری $\sum a_n z^n$ همگرا است، دایره‌ی تقارب (همگرایی) سری توانی و شعاع آن را شعاع همگرایی (تقارب) می‌نامیم (راجع به نقاط روی دایره تقارب در حالت کلی چیزی نمی‌توان گفت).

قضیه. سری توانی $\sum a_n z^n$ داخل دایره حول مبدأ به شعاع $R = 1/\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}$ همگرا و خارج این دایره واگرا است (راجع به نقاط روی دایره در حالت کلی چیزی نمی‌توان گفت).

برهان. بنابه آزمون ریشه یک سری عددی $\sum x_n$ همگرا است (واگرا است) هرگاه $\limsup_n \sqrt[n]{|x_n|} < 1$ (>1). پس سری $\sum a_n z^n$ همگرا است هرگاه $\limsup_n \sqrt[n]{|a_n z^n|} = |z| \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ یا به طور معادل هرگاه $|z| < \underbrace{1/\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}}_{R}$.



$\cancel{\frac{1}{\mu} = 0}$

قضیه. اگر $\sum a_n z^n$ در نقطه $z = z_1$ همگرا باشد آنگاه در هر نقطه z که $|z| < |z_1|$ نیز [مطلقاً] همگرا است.

برهان. $\sum a_n z_1^n$ همگرا $\Rightarrow \lim_n (a_n z_1^n) = 0 \Rightarrow \exists M\, \forall n \; |a_n z_1^n| \le M$

$|a_n z^n| = |a_n z_1^n| \left|\frac{z}{z_1}\right|^n \le M \left|\frac{z}{z_1}\right|^n$ $\left(\left|\frac{z}{z_1}\right| < 1\right)$، سری هندسی $\sum \left|\frac{z}{z_1}\right|^n$ همگرا. پس بنابه آزمون مقایسه سری $\sum |a_n z^n|$ همگرا است. □

* ریشه‌ی نامیدن این نوع M که در برابرش مدفون است.

قضیه (M-وایرشتراس). اگر به ازای هر x و n، عدد M_n که $|f_n(x)| \le M_n$ و $\sum M_n$ همگرا باشد، آنگاه $\sum f_n(x)$ همگرای یکنواخت است.

برهان. فرض کنیم $S_n=\sum_{k=1}^{n} f_k$ و $t_n=\sum_{k=1}^{n} M_k$. در این صورت

$$\forall x;\ |S_n(x)-S_m(x)| = \left|\sum_{k=m+1}^{n} f_k(x)\right| \le \sum_{k=m+1}^{n} |f_k(x)| \le \sum_{k=m+1}^{n} M_k = |t_n-t_m|$$

همگرایی $\sum M_n$ کوشی بودن $\{t_n\}$ و این نامساوی خود محک کوشی برای همگرایی یکنواخت S_n را می‌دهد.

پس $\sum f_n$ همگرای یکنواخت است. □

جلسه چهاردهم ۱۳۹۰/۲/۵

قضیه. سری توانی $\sum a_n(z-z_0)^n$ روی هر زیرمجموعه فشرده K داخل دایره تقارب، همگرای یکنواخت است.

برهان. تابع $\varphi: K\longrightarrow \mathbb{R}$، $\varphi(z)=|z-z_0|$ پیوسته است:

$$|\varphi(z)-\varphi(w)| = \big||z-z_0|-|w-z_0|\big| \le |z-w| \quad (\text{شرط لیپشیتز})$$

نامساوی مثلث

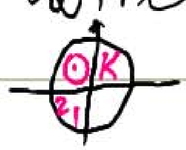
چون K فشرده و φ پیوسته است، پس φ ماکزیمم خود را در نقطه‌ای مانند $z_1\in K$ اختیار می‌کند:

دایره تقارب

$$\forall z\in K;\ \varphi(z)=|z-z_0|\le |z_1-z_0| = \varphi(z_1) \Rightarrow |a_n(z-z_0)^n|\le |a_n(z_1-z_0)^n| \quad (1)$$

چون z_1 داخل دایره تقارب است پس $\sum |a_n(z_1-z_0)^n| < \infty$ (2). از (1)، (2) و قضیه M-وایراشتراس نتیجه می‌شود که $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ روی K همگرای یکنواخت است. □

نتیجه. اگر سری $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ داخل دایره تقارب سری تعریف شده باشد، آنگاه f در هر نقطه داخل دایره تقارب پیوسته است.



$K=\{z_1\}$

برهان. فرض کنیم z_1 نقطه‌ای داخل دایره تقارب سری باشد. واضح است که $N_r(z_1)=\{z;\ |z-z_1|\le r\}=K$ (فشرده) زیرمجموعه دایره تقارب است.

بنابه قضیه بالا $\sum a_n z^n \xrightarrow[K \text{ روی}]{u} f(z)$. اما a_nz^nها توابع چندجمله‌ای پیوسته‌اند (در z_1)، پس f نیز در z_1 پیوسته است.

مثال) شعاع تقارب $\sum \frac{z^n}{n}$ چیست؟

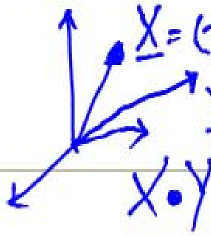
$$R=\frac{1}{\limsup\sqrt[n]{\left|\frac{1}{n}\right|}}=\limsup\sqrt[n]{n}=1$$

$$\lim_n \sqrt[n]{n}=\lim_n n^{\frac{1}{n}}=\lim_n e^{\frac{\ln n}{n}} = e^{\lim_n \frac{\ln n}{n}} = e^{\lim_n \frac{\frac{1}{n}}{1}} = e^0=1$$

توجه کنید روی دایره تقارب، رفتار سری متفاوت است، مثلاً در $z=1$ سری واگرا است ولی در $z=-1$ سری همگرا است.

$$\boxed{\cancel{\int \ln x^2\,dx = \ln\int} x^2\,dx}$$

≡ فضاهای هیلبرت ≡



$\underline{X}=(x_1,x_2,x_3)$

$\underline{Y}=(y_1,y_2,y_3)$

$$X\cdot Y=\sum_{i=1}^{3}x_i y_i \longrightarrow (X\cdot X)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{|x_1|^2+|x_2|^2+|x_3|^2}$$

$$|X\cdot Y|\leq \|X\|\,\|Y\|$$

$\mathbb{R}^3$ دارای یک ضرب داخلی است. هدف ما در این فصل توسیع این مفهوم به فضاهای برداری است.

تعریف. فرض کنید H یک فضای برداری (حقیقی یا مختلط) باشد. تابع

$$\left.\begin{array}{l}\langle\cdot,\cdot\rangle : H\times H\to\mathbb{C}\\ (x,y)\mapsto\langle x,y\rangle\end{array}\right\}$$

را یک ضرب داخلی روی H می‌گوییم هرگاه برای هر $x,y,z\in H$ و $\lambda\in\mathbb{C}$،

1. $\langle x,x\rangle\geq 0$
2. $\langle x,x\rangle=0 \iff x=0$
3. $\langle\lambda x+y,\ z\rangle=\lambda\langle x,z\rangle+\langle y,z\rangle$
4. $\langle y,x\rangle=\overline{\langle x,y\rangle}$ مزدوج در اعداد مختلط

در این صورت $(H,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ را یک فضای ضرب داخلی می‌گوییم. اگر به جای شرط (2) $\langle x,x\rangle=0 \Leftarrow x=0$ (لازم) شود، آن را نیم ضرب داخلی می‌گوییم.

مثال 1. $\mathbb{C}^n$ (یا $\mathbb{R}^n$) همراه ضرب $\langle(z_1,\dots,z_n),(w_1,\dots,w_n)\rangle=\sum_{i=1}^{n}z_i\overline{w_i}$

1. $\langle(z_1,\dots,z_n),(z_1,\dots,z_n)\rangle=\sum_{i=1}^{n}z_i\overline{z_i}=\sum_{i=1}^{n}|z_i|^2\geq 0$
2. $\langle(z_1,\dots,z_n),(z_1,\dots,z_n)\rangle=\sum_{i=1}^{n}|z_i|^2=0 \iff \forall i;\ z_i=0 \iff (z_1,\dots,z_n)=0$
3. $\langle\underbrace{\lambda(z_1,\dots,z_n)+(z_1',\dots,z_n')}_{(\lambda z_1+z_1',\ \dots,\ \lambda z_n+z_n')},(w_1,\dots,w_n)\rangle=\sum_{i=1}^{n}(\lambda z_i+z_i')\overline{w_i}=\lambda\sum z_i\overline{w_i}+\sum z_i'\overline{w_i}$
$=\lambda\langle(z_1,\dots,z_n),(w_1,\dots,w_n)\rangle+\langle(z_1',\dots,z_n'),(w_1,\dots,w_n)\rangle$
4. $\langle(w_1,\dots,w_n),(z_1,\dots,z_n)\rangle=\sum_{i=1}^{n}w_i\overline{z_i}=\overline{\sum_{i=1}^{n}z_i\overline{w_i}}=\overline{\langle(z_1,\dots,z_n),(w_1,\dots,w_n)\rangle}$

(2) $\ell^2=\left\{\{x_n\}\ \middle|\ x_n\in\mathbb{C},\ \sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2<\infty\right\}$ همراه

$$\langle\{x_n\},\{y_n\}\rangle=\sum_{n=1}^{\infty}x_n\overline{y_n}$$

(3) $C([0,1])$ همراه

$$\langle f,g\rangle=\int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\,dt$$

جلسه پانزدهم ۱۳۹۰/۹/۸

قضیه (نامساوی کوشی شوارتز). اگر $(H,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ یک فضای ضرب داخلی باشد آنگاه

$$|\langle x,y\rangle| \le \underbrace{\langle x,x\rangle^{\frac{1}{2}}}_{\|x\|}\underbrace{\langle y,y\rangle^{\frac{1}{2}}}_{\|y\|}$$

با قرارداد: $\|x\|=\langle x,x\rangle^{\frac{1}{2}}$

برهان. اگر $y=0$ آنگاه

$$\cancel{\langle x,0\rangle=\langle x,0+0\rangle=\langle x,0\rangle+\langle x,0\rangle\Rightarrow\langle x,0\rangle=0}$$

$$|\langle x,y\rangle|=|\langle x,0\rangle|=0\le\langle x,x\rangle^{\frac{1}{2}}\underbrace{\langle 0,0\rangle^{\frac{1}{2}}}_{0}=\langle x,x\rangle^{\frac{1}{2}}\langle y,y\rangle^{\frac{1}{2}}$$

اگر $y\neq 0$، به ازای هر $\lambda\in\mathbb{C}$ داریم

$$0\le\langle x-\lambda y,x-\lambda y\rangle=\langle x,x\rangle-\bar{\lambda}\langle x,y\rangle-\lambda\langle y,x\rangle+\lambda\bar{\lambda}\langle y,y\rangle$$

با فرض $\lambda=\frac{\langle x,y\rangle}{\|y\|^2}$ داریم

$$0\le\|x\|^2-\frac{\langle y,x\rangle}{\|y\|^2}\langle x,y\rangle-\cancel{\frac{\langle x,y\rangle}{\|y\|^2}\langle y,x\rangle}+\cancel{\frac{\langle x,y\rangle\langle y,x\rangle\|y\|^2}{\|y\|^4}}$$

$$0\le\|x\|^2-\frac{\overline{\langle x,y\rangle}\langle x,y\rangle}{\|y\|^2}$$ یا $$\frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\|y\|^2}\le\|x\|^2$$ یا $$|\langle x,y\rangle|\le\|x\|\,\|y\|.\ \square$$

قضیه. $\|x\|=\langle x,x\rangle^{\frac{1}{2}}$ یک نرم روی H است.

$\|x\|^2=\langle x,x\rangle$

برهان.

1) $\|x\|=0\overset{\text{تعریف نرم}}{\Longleftrightarrow}\langle x,x\rangle=0\overset{\text{تعریف ضرب داخلی}}{\Longleftrightarrow}x=0$

2) $\|\lambda x\|=\langle\lambda x,\lambda x\rangle^{\frac{1}{2}}=(\lambda\bar{\lambda}\langle x,x\rangle)^{\frac{1}{2}}=|\lambda|\,\|x\|$

3) $\|x+y\|^2=\langle x+y,x+y\rangle=\|x\|^2+\langle x,y\rangle+\underbrace{\langle y,x\rangle}_{\overline{\langle x,y\rangle}}+\|y\|^2$

$$\langle x,y\rangle+\overline{\langle x,y\rangle}=2\,\mathrm{Re}(\langle x,y\rangle)\le 2\,|\mathrm{Re}(\langle x,y\rangle)|\le 2\,|\langle x,y\rangle|\le 2\,\|x\|\,\|y\|$$

$z+\bar{z}=2\,\mathrm{Re}\,z$

$x\le|x|$

$|\mathrm{Re}\,z|\le|z|$

بنابه نامساوی کوشی شوارتز

$\le(\|x\|+\|y\|)^2.\ \square$

بدین ترتیب، هر فضای ضرب داخلی H، یک فضای نرم‌دار (و لذا یک فضای متریک با $d(x,y)=\|x-y\|$) است.

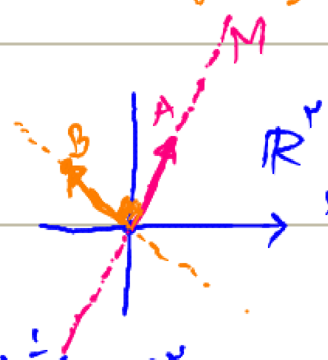
به خصوص اگر متر حاصل کامل باشد، H را فضای هیلبرت می‌نامند.

تعریف. فرض کنید H یک فضای ضرب داخلی باشد. می‌گوییم x بر y عمود است و می‌نویسیم $x\perp y$ هرگاه $\langle x,y\rangle=0$.

اگر M زیرمجموعه H باشد، $M^{\perp}=\{x\in H \mid \langle x,y\rangle=0 \ \forall y\in M\}$

perp

زیرفضای عمود بر M



مثال) زیرفضاهای $\mathbb{R}^2$ عبارتند از: $\{0\}$ ، خطوط گذرا از مبدأ ، $\mathbb{R}^2$

بعد صفر — بعد ۱ — بعد ۲

اگر M یک زیرفضای یک بعدی $\mathbb{R}^2$ باشد، معنایش این است که توسط یک نقطه (بردار) از $\mathbb{R}^2$ تولید می‌شود

یعنی $\exists A=(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2:\ M=\langle A\rangle=\{\lambda(x_0,y_0)\mid \lambda\in\mathbb{R}\}$

از نظر هندسی $M^{\perp}$ خط مار بر مبدأ است که عمود بر M است.

$$M^{\perp}=\{x\in H \mid \underbrace{\langle x,y\rangle=0}_{\langle y,x\rangle=0}\ \forall y\in M\}$$

قضیه. اگر M زیرمجموعه H باشد آنگاه

1. $M^{\perp}$ زیرفضا است.
2. $M\subseteq M^{\perp\perp}$
3. $M^{\perp}$ بسته است.
4. $M=M^{\perp\perp}$ آنگاه M بسته است و برعکس.
5. $M^{\perp\perp\perp}=M^{\perp}$

اثبات. (1)

$$x,x'\in M^{\perp},\ \lambda\in\mathbb{C}\Rightarrow \forall y\in M;\ \langle \lambda x+x',y\rangle=\lambda\underbrace{\cancel{\langle x,y\rangle}}_{0}+\underbrace{\cancel{\langle x',y\rangle}}_{0}=0\Rightarrow \lambda x+x'\in M^{\perp}$$

(2)

$$x\in M \xRightarrow{\text{تعریف } M^{\perp}} \forall y\in M^{\perp};\ \langle x,y\rangle=0 \xRightarrow{\text{تعریف } \perp} x\in (M^{\perp})^{\perp}$$

(3)

$$\boxed{x\in\bar{A}\Leftrightarrow \exists\{x_n\}\subseteq A;\ x_n\xrightarrow{\text{قضیه}} x}$$

برهان

$(\Rightarrow)$ $x\in\bar{A}\Rightarrow \forall r;\ N_r(x)\cap A\neq\emptyset\Rightarrow \forall n;\ \underbrace{N_{\frac{1}{n}}(x)\cap A\neq\emptyset}_{x_n\in}\Rightarrow \exists\, d(x_n,x)<\frac{1}{n} \xRightarrow{\text{فشردگی}} \lim_n x_n=x$

$(\Leftarrow)$ $\exists \{x_n\} \subseteq A;\ x_n \to x \overset{\text{تعریف}}{\Longrightarrow} \forall r\, \exists N\, \forall n \geq N;\ x_n \in N_r(x) \overset{\forall r \exists N;}{\Longrightarrow} x_N \in \underbrace{N_r(x) \cap A}_{\neq \varnothing} \Rightarrow x \in \bar{A}.\ \square$

قضیه. A بسته است اگر و تنها اگر هر گاه $x_n \in A$، $x_n \to x$ آنگاه داشته باشیم $x \in A$.

برهان. $(\Leftarrow)$ گیریم A بسته باشد، $x_n \in A$ و $x_n \to x$. بنا به قضیه بالا $x \in \bar{A}$. چون A بسته است پس $x \in \bar{A} = A$.

$(\Rightarrow)$ می‌دانیم همیشه $A \subseteq \bar{A}$. گیریم $x \in \bar{A}$. بنا به قضیه بالا دنباله $\{x_n\}$ در A وجود دارد که $x_n \to x$. بنا به فرض‌مان $x \in A$ پس $\bar{A} \subseteq A$. $\square$

فرض کنیم $y_n \in M^\perp$ و $y_n \to y$. داریم:

$\forall x;\ \langle x, y_n \rangle = 0$

$\lim_n \langle x, y_n \rangle = \lim_n 0 = 0$

$\langle x, \lim_n y_n \rangle = 0$

$\langle x, y \rangle = 0$

$y \in M^\perp.$

قضیه‌طلب. ضرب داخلی با ثابت نگه داشتن هر متغیر پیوسته است. مثلاً: $\overbrace{\langle x, \cdot \rangle}^{\varphi}: H \to \mathbb{C}$, $y \mapsto \langle x, y \rangle = \varphi(y)$ پیوسته است زیرا

$|\varphi(y) - \varphi(y')| = |\langle x, y \rangle - \langle x, y' \rangle| = |\langle x, y - y' \rangle| \leq \underbrace{\|x\|}_{\text{عدد معلوم}} \|y - y'\|$ (شرط لیپشیتز). $\square$

وبرهان آن

۴) اگر $M = (M^\perp)^\perp$ آنگاه M بسته است زیرا (بنابر ۳) متعامد هر فضا، بسته است.

عکس مطلب به عنوان تمرین به دانشجو واگذار می‌شود.

$A \subseteq B \Rightarrow B^\perp \subseteq A^\perp$

۵) بنابر (۳) $M^\perp$ بسته است پس بنابر (۴)، $M^\perp = (M^\perp)^{\perp\perp}$. $\square$

جلسه نوزدهم ۹۵,۹,۱۹

دلتای کرونکر

$$\delta_{nm}=\begin{cases}1 & n=m\\ 0 & n\neq m\end{cases}$$

فرمول قسمتی از سوالات. لطفاً سوال بپرسید

تعریف: در یک فضای هیلبرت H دنباله $\{e_n\}$ را یک پایه متعامد یکه می‌گوییم هرگاه.

اولاً $\forall n,m;\ \langle e_n,e_m\rangle=\delta_{nm}$ ثانیاً هر $x\in H$ به صورت $\sum_n \lambda_n e_n$ که در آن $\lambda_n\in\mathbb{C}$ (یا $\mathbb{R}$) قابل نوشتن باشد.

مثال ۱) $\mathbb{R}^3$ با ضرب داخلی معمولی دارای پایه متعامد یکه $B=\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ است زیرا

$$i\perp j,\ j\perp k,\ k\perp i,\ \langle i,i\rangle=\|i\|^2=1,\ \langle j,j\rangle=1,\ \langle k,k\rangle=1$$

$$(a,b,c)=(a,0,0)+(0,b,0)+(0,0,c)=ai+bj+ck$$

مثال ۲) ℓ^2 با ضرب داخلی $\langle\{x_n\},\{y_n\}\rangle=\sum_{n=1}^{\infty}x_n\bar{y}_n$ دارای پایه متعامد یکه $\{e_1,e_2,\cdots\}$ که در آن $e_n=(\underbrace{0,\cdots,0}_{n-1},1,0,\cdots)$. مشاهده می‌شود که

$$\langle e_n,e_m\rangle=\langle(\underbrace{0,\cdots,0}_{n-1},1,0,\cdots),(\underbrace{0,\cdots,0}_{m-1},1,0,\cdots)\rangle=\begin{cases}0 & n\neq m\\ 1 & n=m\end{cases}$$

$$\ell^2\ni\{x_n\}=(x_1,0,\cdots)+(0,x_2,0,\cdots)+\cdots=x_1e_1+x_2e_2+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}x_ne_n$$

نکته مهم: اگر $\{e_n\}$ یک پایه متعامد یکه برای H باشد آنگاه

$$\forall x\in H\ \exists\{\lambda_n\};\ x=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_ne_n$$

$$\forall m;\ \langle x,e_m\rangle=\langle\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_ke_k,e_m\rangle=\sum_{k=1}^{\infty}\langle\lambda_ke_k,e_m\rangle=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\underbrace{\langle e_k,e_m\rangle}_{\delta_{km}}$$

$$=\lambda_m$$

$$\therefore\ \forall x\in H;\ x=\sum_{n=1}^{\infty}\langle x,e_n\rangle e_n$$

$$\|x\|^2=\langle x,x\rangle=\langle\sum_{n=1}^{\infty}\langle x,e_n\rangle e_n,\sum_{m=1}^{\infty}\langle x,e_m\rangle e_m\rangle=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\langle\langle x,e_n\rangle e_n,\langle x,e_m\rangle e_m\rangle$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{m=1}^{\infty}\langle x,e_n\rangle\overline{\langle x,e_m\rangle}\langle e_n,e_m\rangle\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\langle x,e_n\rangle\overline{\langle x,e_n\rangle}=\sum_{n=1}^{\infty}|\langle x,e_n\rangle|^2$$

در واقع در حالت $H=\mathbb{R}^3$ با فرض $\vec{i}=e_1,\ \vec{j}=e_2,\ \vec{k}=e_3$ داریم

$$\mathbb{R}^3 \ni \underline{x}=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=\sum_{i=1}^{3}\lambda_i e_i=\sum_{i=1}^{3}\langle \underline{x},e_i\rangle e_i \Rightarrow \|\underline{x}\|^2=\sum_{i=1}^{3}|\langle x,e_i\rangle|^2=\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2$$

همچنین

$$\forall x,y\in H,\quad \langle x,y\rangle=\left\langle\sum_{i=1}^{\infty}\langle x,e_i\rangle e_i\,,\ \sum_{j=1}^{\infty}\langle y,e_j\rangle e_j\right\rangle=\sum_{i}\sum_{j}\langle x,e_i\rangle\overline{\langle y,e_j\rangle}\underbrace{\langle e_i,e_j\rangle}_{\delta_{ij}}$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}\langle x,e_i\rangle\overline{\langle y,e_i\rangle}$$

$$\cancel{\sum_{i=1}^{3}a_i\sum_{i=1}^{3}b_i=\sum_{i=1}^{3}a_ib_i}\qquad\qquad \sum_{i=1}^{3}a_i\sum_{j=1}^{3}b_j=\sum_{i,j=1}^{3}a_ib_j\ \checkmark$$

جلسه هفدهم ۹۰/۹/۲۲

یادآوری: کلیه فضاهای برداری مورد بحث در این درس روی میدان $\mathbb{C}$ یا $\mathbb{R}$ هستند

اگر $(H, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ یک فضای ضرب داخلی باشد و $\{e_n\}$ یک خانواده متعامد یکه باشد (در این صورت لزوماً $\{e_n\}$ پایه نباشد). به ازای هر $x \in H$، فرض می‌کنیم $c_n = \langle x, e_n \rangle$ که ضریب فوریه — $\langle e_n, e_m \rangle = \delta_{nm}$ در این صورت — $\sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n$ را سری فوریه x می‌گویند و فقط و فقط $\forall x;\ x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n$ اگر $\{e_n\}$ پایه باشد.

اهمیت سری فوریه در قضیه ذیل (والبته فضای بعدی) است

توجه کنید $\forall n \neq m;\ \langle e_n, e_m \rangle = 0 \Rightarrow e_n \neq e_m$

قضیه. فرض کنید $\{e_n\}$ یک مجموعه متعامد یکه باشد، c_nها ضرایب فوریه و λ_nها ضرایب دلخواه باشند. فرض کنید $s_n = \sum_{k=1}^{n} c_k e_k$ ، $t_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$. در این صورت $\|x - s_n\|^2 \leq \|x - t_n\|^2$ و تساوی برقرار است اگر و فقط اگر $\forall i \leq n;\ c_i = \lambda_i$

برهان،

$$0 \leq \|x - t_n\|^2 = \langle x - \underbrace{t_n}_{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i}, x - \underbrace{t_n}_{\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j} \rangle = \langle x, x \rangle - \sum_j \bar{\lambda}_j \underbrace{\langle x, e_j \rangle}_{c_j} - \sum \lambda_i \underbrace{\langle e_i, x \rangle}_{\bar{c}_i}$$

$$+ \sum_{i,j} \lambda_i \bar{\lambda}_j \underbrace{\langle e_i, e_j \rangle}_{\delta_{ij}} = \|x\|^2 - \sum_{j=1}^{n} c_j \bar{\lambda}_j - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \bar{c}_i + \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 \quad (1)$$

اگر در (1)، $\forall i\ \lambda_i = c_i$ انتخاب شود خواهیم داشت:

$$0 \leq \|x - s_n\|^2 = \|x\|^2 - \cancel{\sum_{j=1}^{n} \underbrace{c_j \bar{c}_j}_{|c_j|^2}} - \sum_{i=1}^{n} \underbrace{c_i \bar{c}_i}_{|c_i|^2} + \cancel{\sum_{i=1}^{n} |c_i|^2} = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |c_i|^2 \quad (2)$$

پس

$$(1) \Rightarrow 0 \leq \|x - t_n\|^2 = \left(\|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |c_i|^2\right) + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} |c_i|^2 - \sum_{i=1}^{n} c_i \bar{\lambda}_i - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \bar{c}_i + \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2}_{\sum_{i=1}^{n} \underbrace{\|c_i - \lambda_i\|^2}_{\langle c_i - \lambda_i,\, c_i - \lambda_i \rangle} = A \geq 0}$$

در ضرب داخلی $\mathbb{C}^n$

$$\overset{(2)}{=} \|x - s_n\|^2 + A \quad (3)$$

اینک مشاهده می‌شود که $\|x - s_n\|^2 \leq \|x - t_n\|^2$ ، اگر تساوی برقرار باشد $A = 0$ و لذا $\forall i \leq n;\ c_i = \lambda_i$ □

نتیجه. اگر $\{c_n\}$ ضرایب فوریه $x \in H$ باشند آنگاه

الف) $\forall n;\ \sum_{i=1}^{n} |c_i|^2 \le \|x\|^2$

ب) $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$ همگراست، $\sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2 \le \|x\|^2$ (نامساوی بسل)

ج) $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$

برهان. الف) بنا به (*) در رابطه (۲) بالا داریم $0 \le \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |c_i|^2$.

ب) $\left\{\sum_{i=1}^{n} |c_i|^2\right\}$ یک دنباله صعودی است $\left(\sum_{i=1}^{n} |c_i|^2 + |c_{n+1}|^2 = \sum_{i=1}^{n+1} |c_i|^2\right)$. بنا به (الف)

این دنباله کراندار (از بالا) است. پس $\sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2$ همگراست. پس می‌توان از طرفین رابطه (الف) حد گرفت وقتی که $n \to \infty$. لذا $\sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2 \le \|x\|^2$.

ج) شرط لازم همگرایی برای $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$ نتیجه می‌دهد که $\lim_{n\to\infty} |c_n|^2 = 0$ پس $\lim c_n = 0$.

فرض کنیم $\varepsilon > 0$ داده شده باشد. بنا به $\lim_{n\to\infty} |c_n|^2 = 0$

$\exists N\ \forall n \ge N;\ \left| |c_n|^2 - 0 \right| < \varepsilon^2$

پس $\forall n \ge N;\ |c_n - 0| < \varepsilon$

لذا $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$. □

جلسه هجدهم ۱۳۹۰,۹,۲۶

مثال. فرض کنید $H=\{f:[a,b]\to\mathbb{C} \mid \int_a^b |f(t)|^2dt<\infty\}$ در این صورت H با ضرب داخلی $\langle f,g\rangle=\int_a^b f(t)\overline{g(t)}\,dt$ یک فضای هیلبرت است. به خصوص نامساوی کوشی شوارتز به صورت ذیل قابل بیان است:

$$\left|\int_a^b f(t)\overline{g(t)}\,dt\right| \leq \left(\int_a^b |f(t)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b |g(t)|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

(۱) اگر $[a,b]=[0,2\pi]$ آنگاه $\Big\{\underbrace{\frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}}}_{e_n}\Big\}_{n=-\infty}^{\infty}$ یک پایه متعامد یکه است:

$$\langle e_n,e_m\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\underbrace{e^{int}e^{-imt}}_{e^{i(n-m)t}}\,dt=\begin{cases}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}1\,dt=1 & n=m\\ \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{i(n-m)}e^{i(n-m)t}\right]_0^{2\pi}=0 & n\neq m\end{cases}$$

(۲) اگر $[a,b]=[0,2\pi]$ آنگاه $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{\cos(nt)}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin(nt)}{\sqrt{\pi}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ یک پایه متعامد یکه است. این پایه در واقع همان پایه بالا است اگر پایه‌ها را ترکیب کنیم: $\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ ، $\sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$.

سری فوریه یک تابع f نسبت به پایه معرفی شده در

حالت (۱) عبارتست از: $\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}}$ که در آن $c_n=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int f(t)\frac{e^{-int}}{\sqrt{2\pi}}\,dt$

حالت (۲) عبارتست از: $a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ که در آن $a_0=\int_0^{2\pi}f(t)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,dt$

$$a_n=\int_0^{2\pi}f(t)\frac{\cos(nt)}{\sqrt{\pi}}\,dt,\qquad b_n=\int_0^{2\pi}f(t)\frac{\sin(nt)}{\sqrt{\pi}}\,dt$$

نکته. $\|1\|^2=\langle 1,1\rangle=\int_0^{2\pi}1.1\,dt=2\pi$ (تابع ثابت ۱). اما در کاربردها مناسب است که $\|1\|=1$ باشد. پس

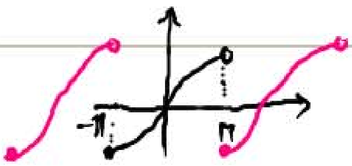
اگر قرار دهیم $\langle f,g\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\overline{g(t)}\,dt$ آنگاه $\|1\|=1$ فهو المطلوب.

جلسه نوزدهم ۹۰٫۹٫۲۹

در جلسه قبل بر حسب سلسلی فضای اسکوئر و ... را ثابت نمود. در این جلسه به فضای هیلبرت و سریهای فوریه بر می‌گردیم و سری فوریه چند تابع را حساب می‌کنیم و سپس امتحان می‌گیریم.

دیدیم که $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(nt)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(nt)}{\sqrt{\pi}}\right\}$ پایه‌ای برای فضای هیلبرت $\{f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R} \mid \int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^2dt<\infty\}$ است.

تابع متناوب



ضرایب سری فوریه یک تابع f نسبت به دستگاه بالا قابل محاسبه است. سری فوریه هر تابع قطعه‌ای پیوسته به خود تابع (تقریباً همه جا) همگرا است.

مجموعه نقاطی که سری فوریه تابع همگرا نیست، اندازه‌اش صفر است.

$$f \xrightarrow{\text{سری فوریه}} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\cos(nt)}{\sqrt{\pi}}dt\right)\frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}}+\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\sin(nt)}{\sqrt{\pi}}dt\right)\frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}}\right]$$

$$=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos nt+b_n\sin nt\right]$$

$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt$, $\quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)dt$, $\quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)dt$

مثال ۱) سری فوریه تابع $f(x)=\begin{cases}-\frac{\pi}{4} & -\pi<x<0\\ \frac{\pi}{4} & 0<x<\pi\end{cases}$ را بیابید و نشان دهید

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}-\frac{\pi}{4}dt+\int_{0}^{\pi}\frac{\pi}{4}dt\right)=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{4}(0+\pi)+\frac{\pi}{4}(\pi-0)\right)=0$$

(به طور مشابه به ازای تابع‌های فرد)

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)dt=0$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}\frac{-\pi}{4}\sin(nt)dt+\int_{0}^{\pi}\frac{\pi}{4}\sin(nt)dt\right)=\frac{1}{\pi}\left[\frac{-\pi}{4}\,\frac{-1}{n}\cos(nt)\right]_{-\pi}^{0}+$$

$$\left.\frac{\pi}{4}\,\frac{-1}{n}\cos(nt)\right]_{0}^{\pi}\Bigg]=\frac{1}{4n}\Big(\big(1-\cos(n\pi)\big)-\big(\cos(n\pi)-1\big)\Big)=\frac{1}{2n}\left((-1)^{n+1}+1\right)$$

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nt) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}+1}{2n} \sin(nt)$$

سری فوریه در جاهایی که تابع پیوسته است به خود تابع همگراست:

$$f(\tfrac{\pi}{2}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}+1}{2n} \sin \frac{n\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$$

قضیه فجر. اگر f یک تابع پیوسته با دوره تناوب 2π باشد و S_n جمع nام سری فوریه f باشد و $\sigma_n = \frac{S_1 + \cdots + S_n}{n}$ میانگین حسابی جمع‌های nام باشد آنگاه $\sigma_n \xrightarrow{u} f$.

نکته: دنباله $\{\underbrace{(-1)^n}_{a_n}\}$ همگرا نیست ولی دنباله میانگین‌های حسابی آن

$$\sigma_n = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = \begin{cases} 0 & n \text{ زوج} \\ \frac{-1}{n} & n \text{ فرد} \end{cases}$$

به صفر همگراست.

قضیه. اگر f روی $[-\pi,\pi]$ با تغییر کراندار باشد، $f(x_0+)$ و $f(x_0-)$ موجود باشند، آنگاه سری فوریه f در x_0 به $\frac{f(x_0+)+f(x_0-)}{2}$ همگراست.

اگر f در x_0 پیوسته باشد ← $f(x_0)$