

This file has been cleaned of potential threats.

If you confirm that the file is coming from a trusted source, you can send the following SHA-256 hash value to your admin for the original file.

52d141dfddf36cefb427cfcbc96b76de8246bec62e5ed7a88f7b93c01041cc06

To view the reconstructed contents, please SCROLL DOWN to next page.

بینهایت چیست؟



محمد صال مصلحیان
دانشگاه فردوسی مشهد



نماد بی نهایت معرفی شده توسط جان والیس
ریاضیدان انگلیسی در ۱۶۵۵

واژه بینهایت



بینهایت یعنی چیزی که محدود نیست

ریشه واژه بی‌نهایت کلمه لاتین finites به معنی محدود است

بینهایت فیزیکی



بینهایت، در ریاضیات با مفهوم بینهایت فیزیکی متفاوت است.

**در معاینات چشم پزشکی
بیشتر از 50 متر بینهایت
تلقی می شود**



می‌گوییم که اگر
جسمی در کانون یک
عدسی محدب قرار
گیرد، تصویر آن در
بینهایت تشکیل
می‌شود.





- اولین مفهوم ثبت شده از بینهایت متعلق به فیلسوف یونانی Anaximander است که از ۶۱۰ تا ۵۴۶ قبل از میلاد (قبل از سقراط) می زیست که اصطلاح Apeiron به معنای بیکران را وضع کرد.

دیدگاه ارسطو

(۳۵۰ قبل از میلاد)

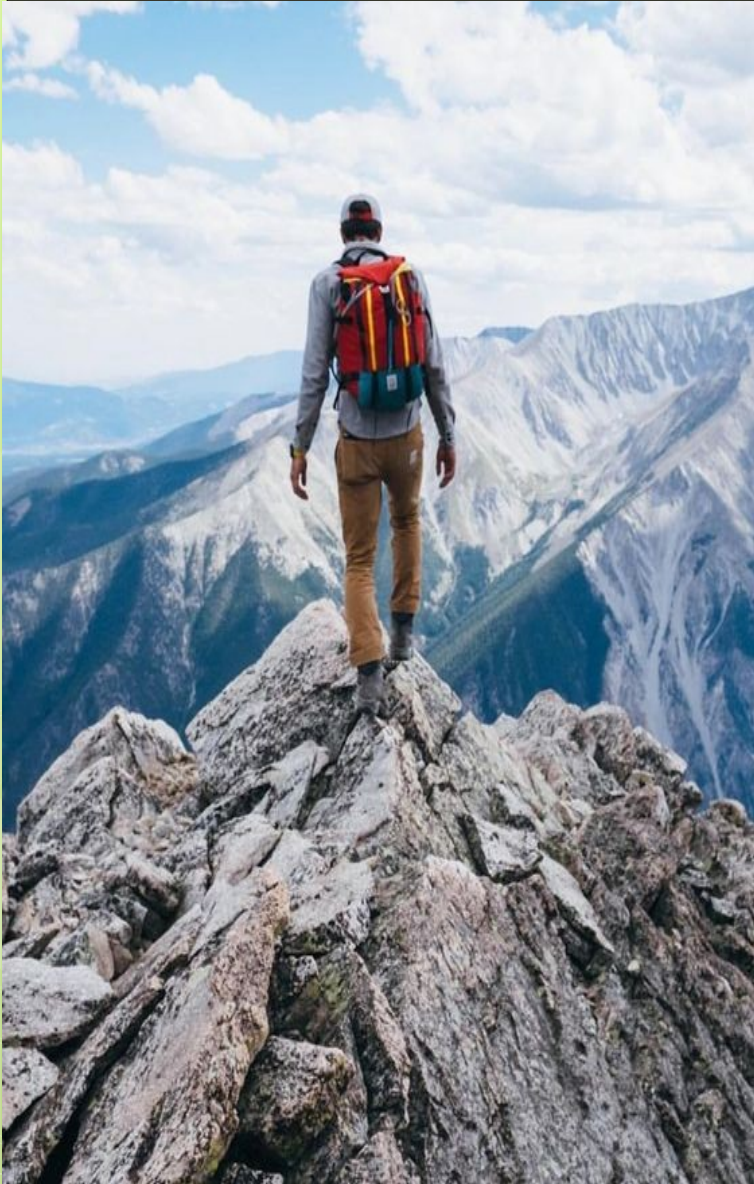


بی نهایت بالقوه

می توان به آن نزدیک و
نزدیک تر شد اما هیچ گاه
نمی توان به آن رسید.

برای مثال حد دنباله اعداد
طبیعی را می توان ذکر کرد.

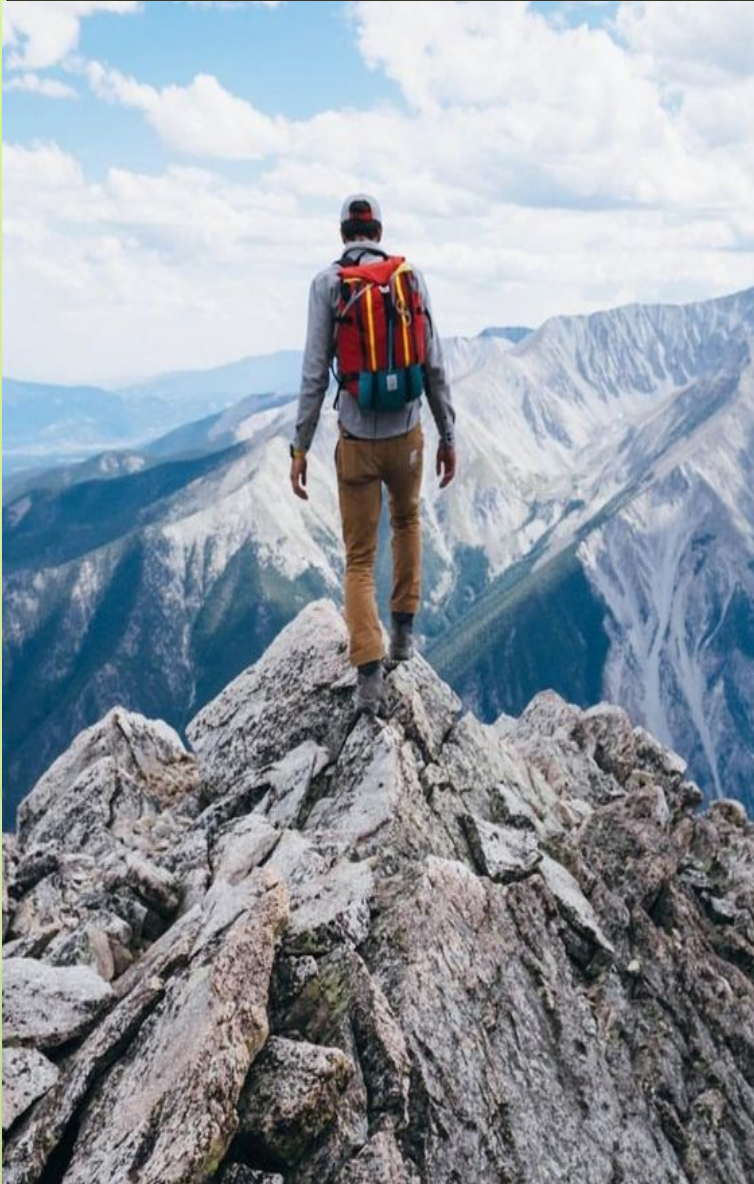




بی نهایت بالفعل

بی نهائیتی است که می توان
به آن رسید.

برای مثال مجموعه اعداد
طبیعی به عنوان یک شی.



بی نهایت بالفعل

بی نهایتی است که می
توان به آن رسید.

برای مثال مجموعه اعداد
طبیعی به عنوان یک شی.

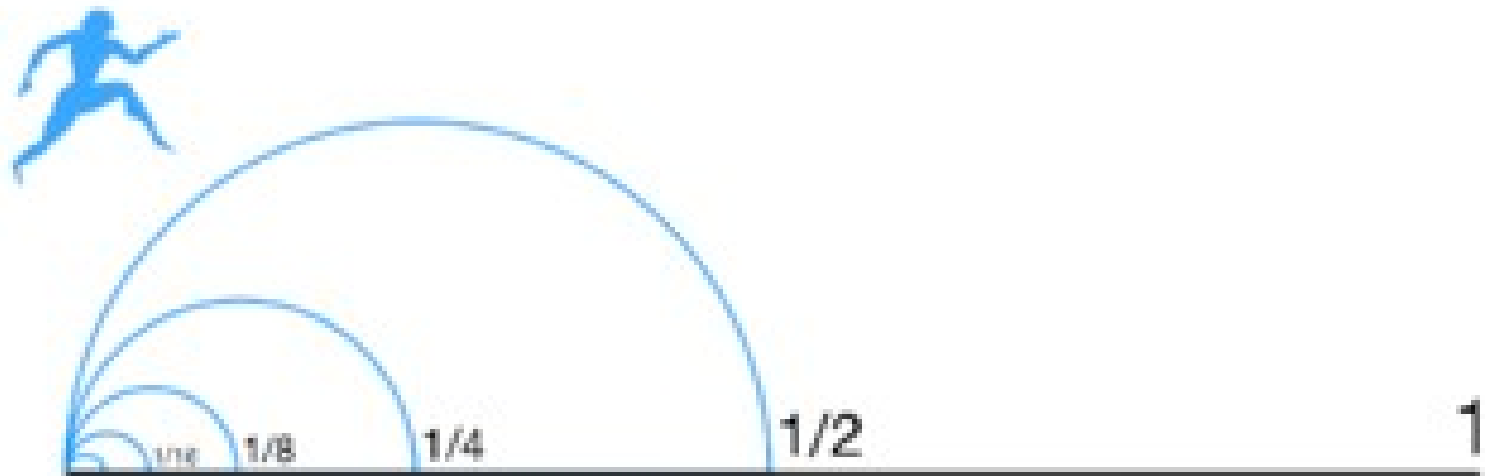
پارادوکس های زنون
(۴۹۵ تا ۴۳۰ قبل از

میلاد)
ZENON

PARADOXES

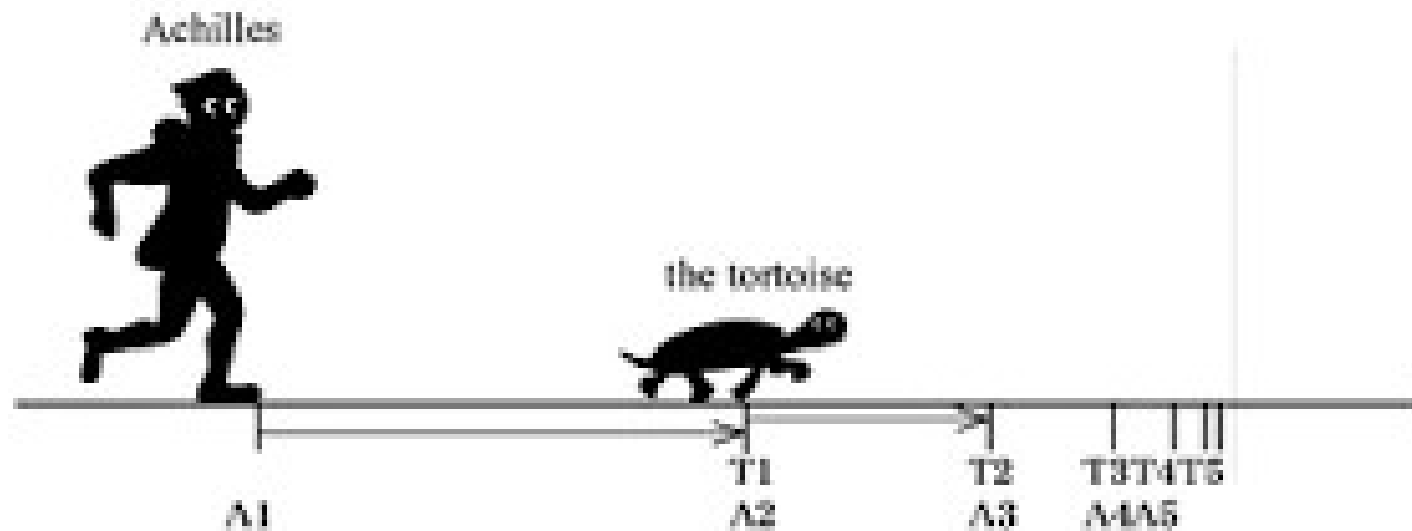


پارادوکس دوبخشی ۱



پارادوکس دو بخشی ۲





(The position A_n of Achilles is eternally just after the position T_n of the tortoise, namely, it is impossible for Achilles to catch up with the tortoise.)

(Figure 2-1-1)

بینهایت در آنالیز ریاضی

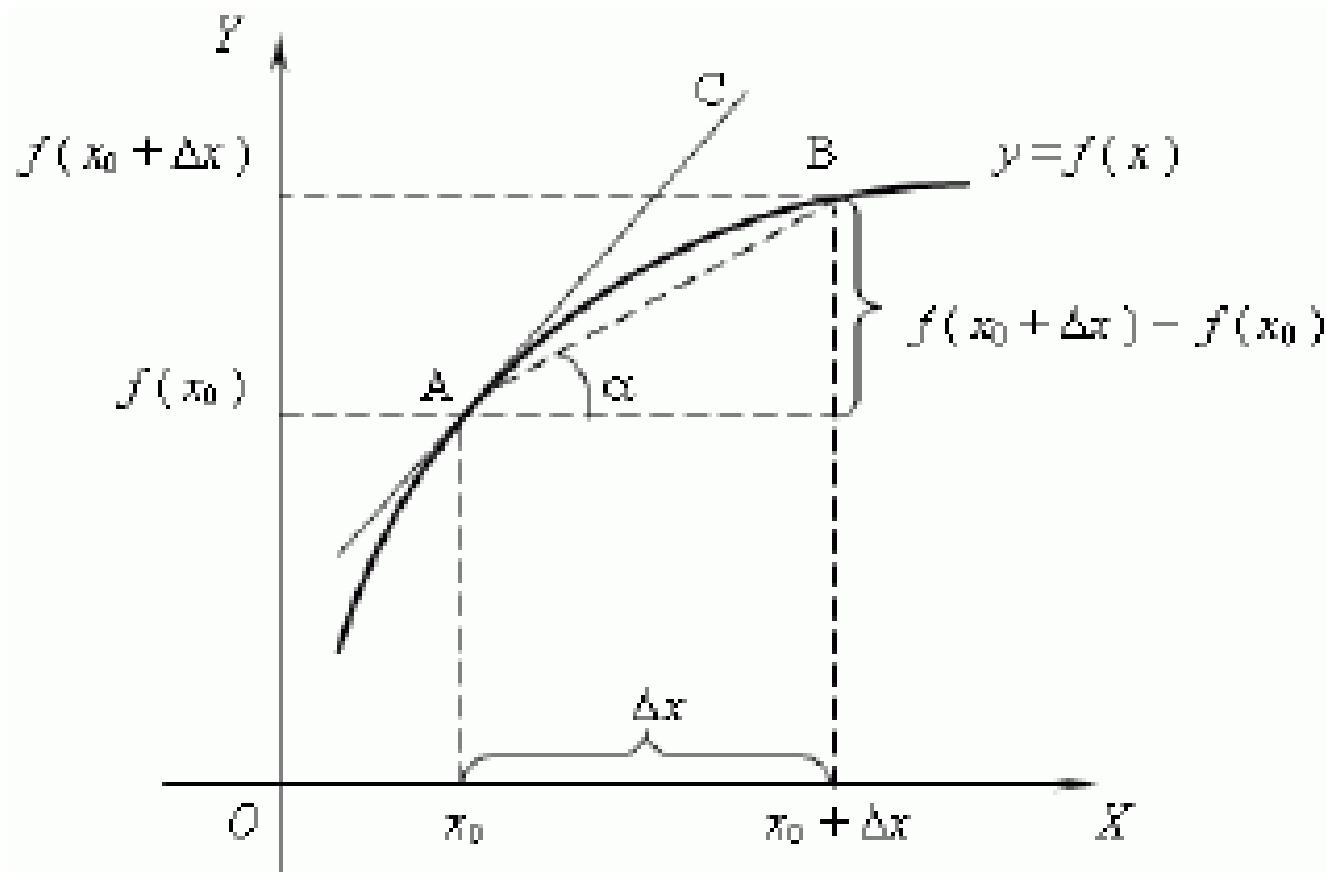
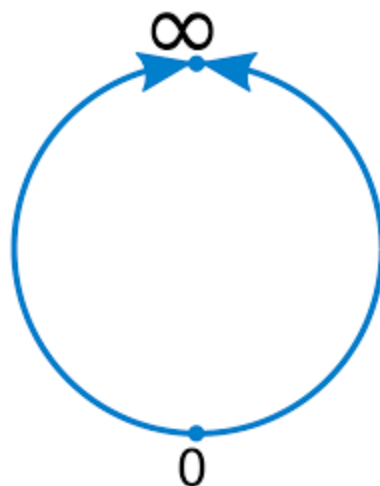
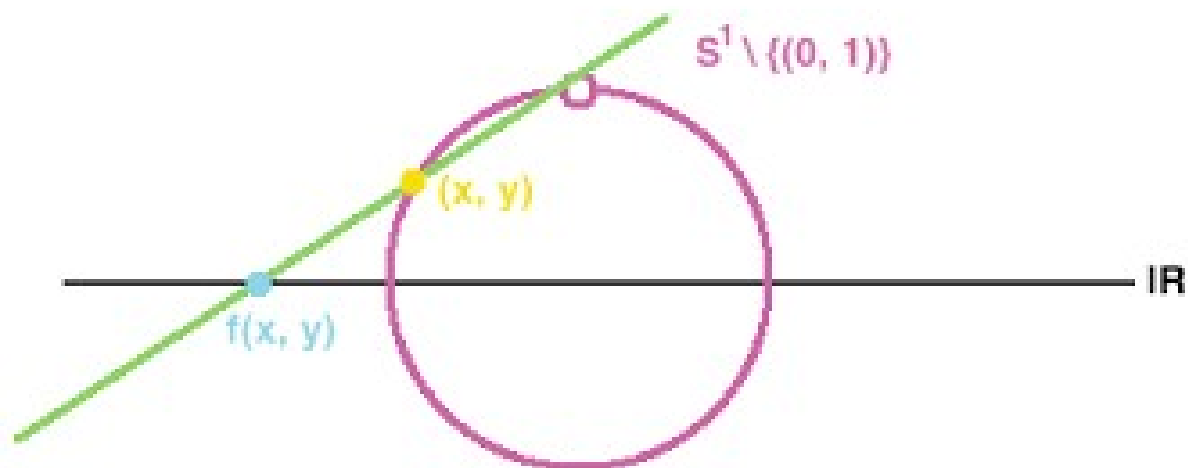


Fig. 1

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

∞ , called the point at infinity, be an object not in X .
 Let $X_\infty = X \cup \{\infty\}$ and $\mathcal{T}_\infty = \mathcal{T} \cup \{X_\infty\}$
 $\cup \{O \subset X_\infty : X_\infty \setminus O \text{ is a closed compact subset of } X\}$
 $\mathcal{T}_\infty$ is a topology on X_∞

- (a) $(X_\infty, \mathcal{T}_\infty)$ is compact.
- (b) $(X, \mathcal{T})$ is a subspace of $(X_\infty, \mathcal{T}_\infty)$
- (c) X_∞ is Hausdorff iff X is Hausdorff & locally compact
- (d) X is dense in X_∞ iff X is not compact.



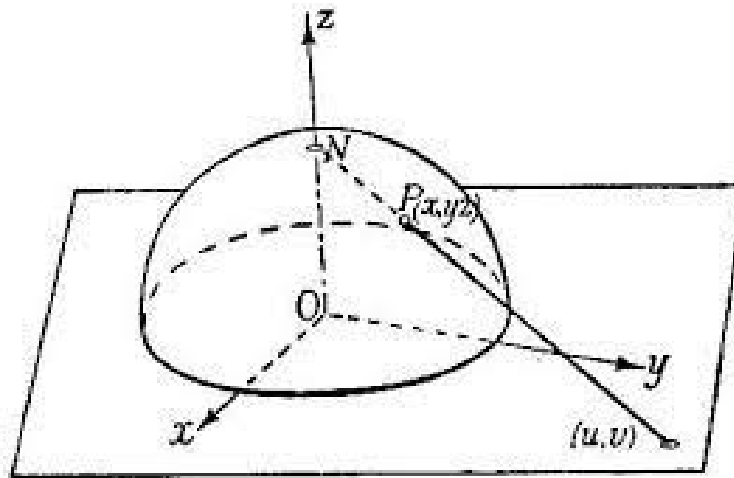


Fig. 14.—Stereographic projection of the sphere

نگاشت گنجنگاری $g : S \rightarrow \mathbb{R}^2$ از $(0, 0, 1)$ ، نگاشتی است که هر نقطه $(a, b, c) \in S$ را به محل برخورد خط گذرنده از نقاط (a, b, c) و $(0, 0, 1)$ با xy -صفحه می نگارد:

$$(a, b, c) \mapsto (u, v) = \left(\frac{a}{1 - \sqrt{1 - a^2 - b^2}}, \frac{b}{1 - \sqrt{1 - a^2 - b^2}} \right).$$

Let X be a (nonempty) Tychonoff space.

Let $\{f_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ be a list of all bounded continuous functions from X to $\mathbb{R}$.

For each λ , let $I_\lambda = [\inf \text{ran}(f_\lambda), \sup \text{ran}(f_\lambda)]$.

Let $Y = \prod_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$ be the Tychonoff product of the I_λ .

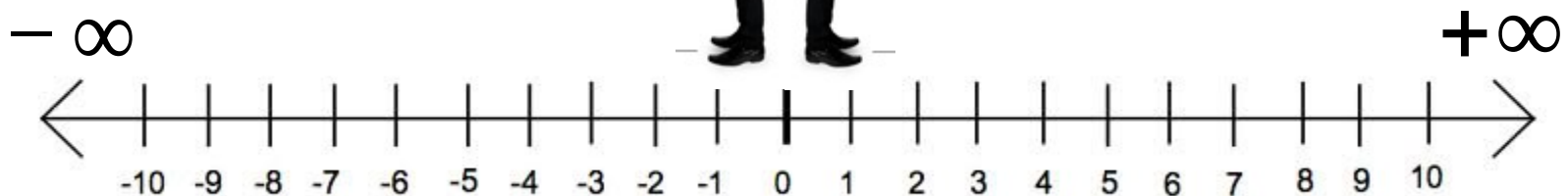
Define $h : X \rightarrow Y$ such that for each $\lambda \in \Lambda$, $h(x)(\lambda) = f_\lambda(x)$.

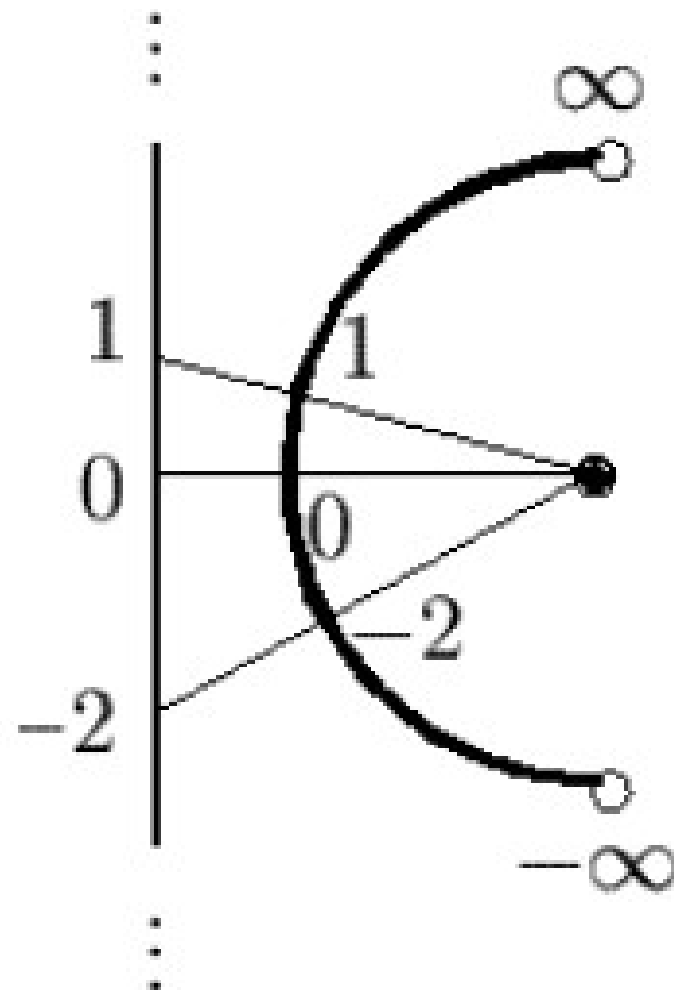
Let $\beta X = \text{cl}^Y(h(X))$.

*Define the **Stone-Čech compactification** of X to be $\langle h, \beta X \rangle$.*

بینهایت عددی است (نه از جنس اعداد حقیقی) که از هر عدد حقیقی بیشتر است.

مثبت بینهایت را می توان انتهای راست محور اعداد حقیقی و منفی بینهایت را انتهای چپ آن تلقی کرد.





دو نماد $+\infty$ و $-\infty$ (که عدد حقیقی نیستند، ولی می‌توانند هر شیء دلخواه دیگری نظیر میز و صندلی باشند) را در نظر می‌گیریم. آن‌ها را مثبت بی‌نهایت و منفی بی‌نهایت می‌نامیم و به عنوان دو عدد جدید به R اضافه می‌کنیم. مجموعه $R \cup \{-\infty, +\infty\}$ را مجموعه اعداد حقیقی وسعت یافته می‌خوانیم و آن را با R^* نمایش می‌دهیم.

حال برای این که بتوان دستور:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

را برای جميع حالات ذکر شده در بالا به کار برد،
قراردادهای زیر را در R^* می پذیریم:

$$-\infty + (-\infty) = -\infty, +\infty + (+\infty) = +\infty$$

$$r + (+\infty) = +\infty + r = +\infty$$

$$r + (-\infty) = -\infty + r = -\infty$$



قضیه:

اگر a, l و l' اعداد حقیقی باشند، $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ و
 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l'$ آنگاه $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = l + l'$

می توان تحقیق کرد که اگر $a \in R^*$ ، آنگاه قضایای
 زیر معتبر است:

(۱) اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$ ، آنگاه
 $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = +\infty$

(۲) اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$ ، آنگاه
 $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = -\infty$

(۳) اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \in R$ ، آنگاه
 $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = +\infty$

(۴) اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \in R$ ، آنگاه
 $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = -\infty$

(۵) اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \in R$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$ ، آنگاه
 $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = +\infty$

اعمال با بینهایت

(ب) فرض کنید $f(x) = \frac{2}{x^2}$ و $g(x) = \frac{1}{x^2}$ ، در این

$$\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^2} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty \text{ و}$$

(پ) فرض کنید $f(x) = \frac{1}{x^2} + 2$ و $g(x) = \frac{1}{x^2}$ ، در

این صورت

$$\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} + 2 - \frac{1}{x^2} \right) = 2$$

$$\text{و } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$$

بنابراین در حالتی که $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$ ، نمی‌توان گفت حد تفاضل دو تابع برابر تفاضل حدود آنها (و یا حتی هر عبارت دیگری بر حسب حدود دو تابع) است.

اما چرا $(+\infty) - (+\infty)$ را تعریف نمی‌کنیم و آن را مبهم می‌دانیم؟ دلیل آن این است که اگر $a \in \mathbb{R}^*$ و $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$ ، آنگاه در حالت کلی $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x))$ را نمی‌توان حتی پیش‌بینی کرد، بالاخص اینکه در این حالت بین $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ هیچ ارتباط مشخصی وجود ندارد.

به عنوان نمونه به سه مثال زیر که در آنها عبارت

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ به صورت $(+\infty) - (+\infty)$ است، توجه کنید:

(آ) فرض کنید $f(x) = g(x) = \frac{1}{x^2}$ ، در این صورت

$$\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0$$

$$\text{و } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$$

گاهی قادر هستیم تابعی از R به R را که در نقطه‌ای دارای ناپیوستگی از نوعی خاص است به گونه‌ای به یک تابع از R^* به R^* توسعه دهیم که در آن نقطه پیوسته گردد.

$$\begin{aligned} f : R &\longrightarrow R \\ f(x) &= \frac{1}{x^2} \end{aligned} \quad \text{تابع}$$

را که فقط در صفر ناپیوسته است و به علاوه $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ در نظر بگیرید.
این تابع را می‌توان به تابع همه‌جایپوسته

$$\begin{aligned} f^* : R^* &\longrightarrow R^* \\ f^*(x) &= \begin{cases} \frac{1}{x^2} & x \in R - \{0\} \\ 0 & x = \pm\infty \\ +\infty & x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

ترتیب با کمک بینهایت

هر زیرمجموعه از $\mathbb{R}^*$ دارای کران بالای $+\infty$ و کران پایین $-\infty$ است. پس همیشه هر زیرمجموعه R در $\mathbb{R}^*$ دارای کوچک‌ترین کران بالایی (سوپرمم) و بزرگ‌ترین کران پایینی (اینفیمم) است. همچنین سوپرمم و اینفیمم مجموعه تهی به ترتیب $+\infty$ و $-\infty$ است.

بینهایت در نظریه مجموعه ها

اقلیدس نشان داد که بی نهایت عدد
اول وجود دارد.



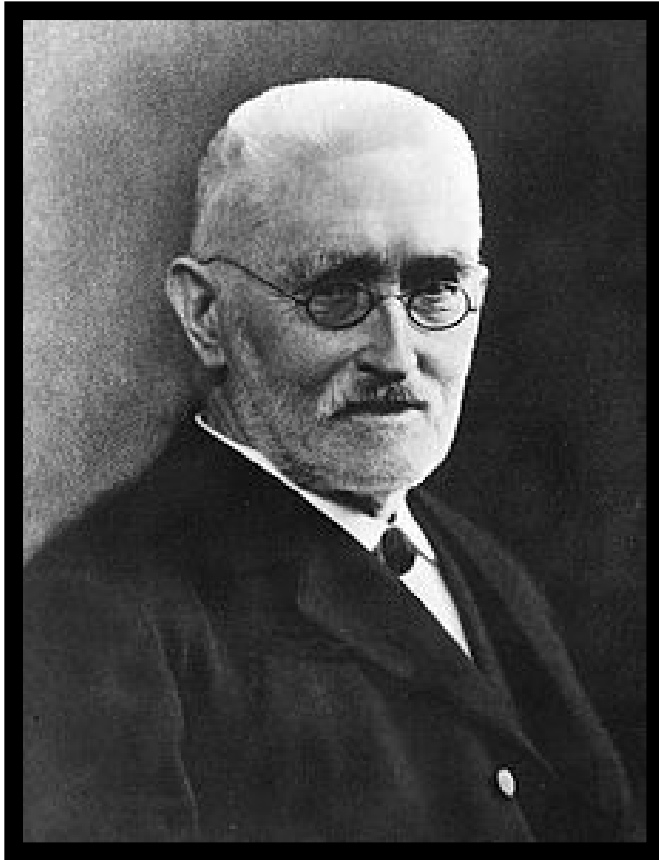
بینهایت در نظریه مجموعه ها



اصل موضوع اقلیدس:

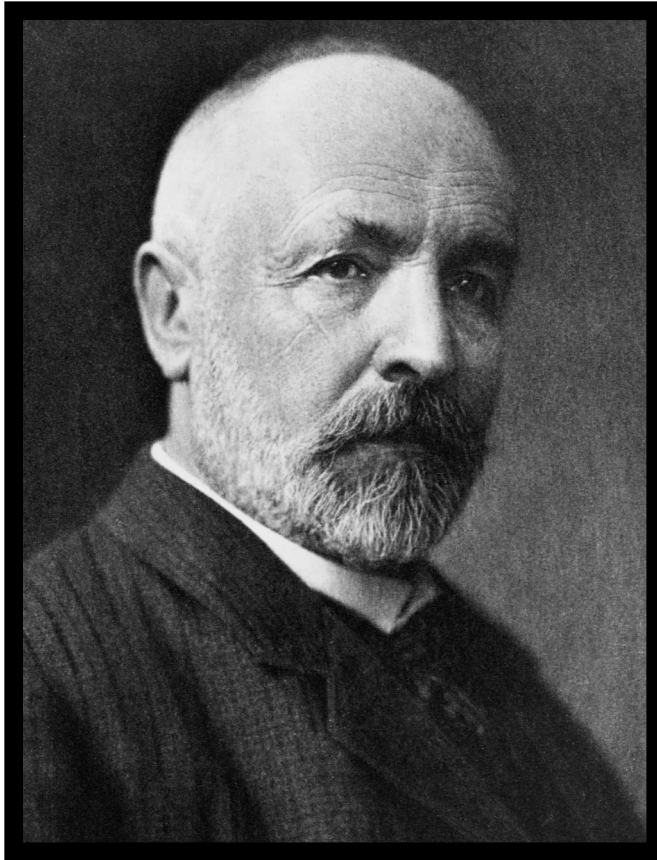
کل از جزء خود اکیداً بزرگ تر است

اگرچه در دنیای فیزیکی این اصل درست است، اما در نظریه مجموعه ها درست نیست. مثلاً تعداد اعداد طبیعی با تعداد اعداد طبیعی زوج برابر است، در حالی که اعداد طبیعی زوج جزئی از همه اعداد طبیعی هستند.



Richard Dedekind
(1831-1916)

ریچارد ددکیند تعریفی از مفهوم
بینهایت ارائه داد:
او گفت هر چیزی را که اصل
موضوع اقلیدس برای آن صادق
نباشد، بینهایت است. پس
بینهایت چیزی است که با
جزئی از خود هم اندازه باشد.
به زبان نظریه مجموعه ها، یک
مجموعه را نامتناهی گویند اگر
با یک زیرمجموعه سره اش
در تناظر یک به یک باشد.
مجموعه ای که نامتناهی
نباشد، متناهی خوانده می شود.

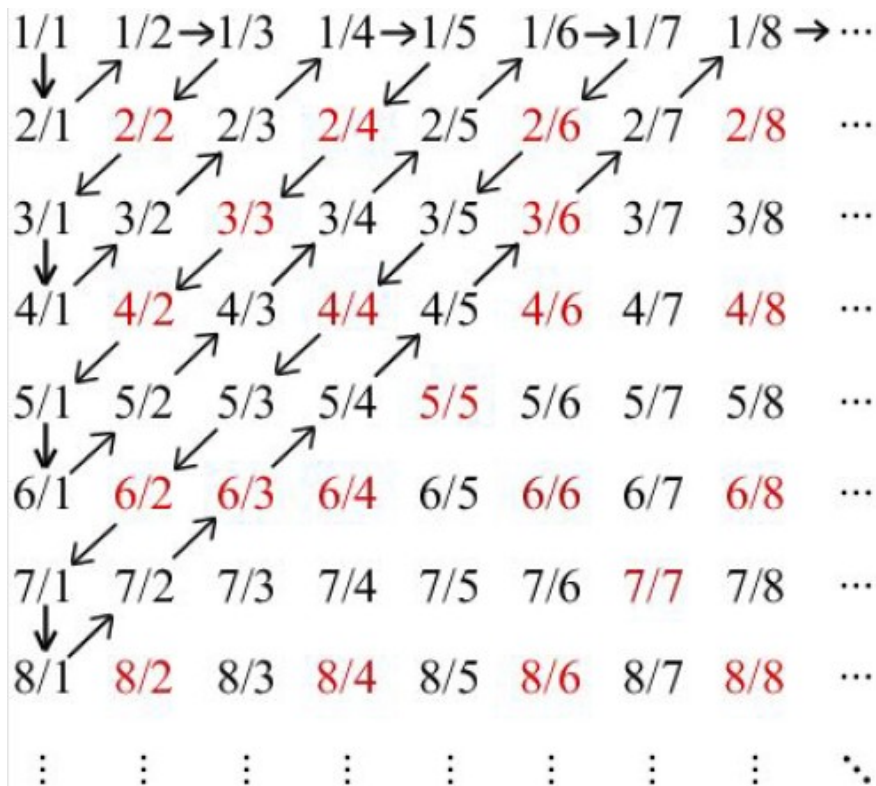


Georg Cantor
1845 - 1918

جرج کانتور این سوال را مطرح کرد که اگر یک جعبه سیب و یک جعبه پرتقال داشته باشیم، چگونه می توان فهمید در کدام جعبه میوه بیشتری وجود دارد؟

یک روش، شمردن میوه های دو جعبه و سپس مقایسه اعداد حاصل است. اما اگر یکی از جعبه ها بی نهایت میوه داشته باشد هرگز کار شمارش آن جعبه به انتها نمی رسد. روش کانتور تناظر یک به یک بود، یعنی به ازای برداشتن یک سیب از جعبه اول یک پرتقال از جعبه دوم بر میداشت و کار را ادامه می داد تا یک جعبه تمام شود.

مجموعه اعداد گویا



این روش در مقایسه
مجموعه های نامتناهی
نیز قابل اعمال بود.
کانتور نشان داد
مجموعه اعداد طبیعی
و مجموعه اعداد گویا
یک تعداد عضو دارند:

○ کانتور مجموعه ای را متناهی نامید که با قطعه ای از مجموعه اعداد طبیعی $\{1, 2, \dots, n\}$ در تناظر یک به یک باشد و مجموعه نامتناهی مجموعه ای است که متناهی نباشد. پس مجموعه نامتناهی آن است که نتوان آن را شمرد.

○ البته تعریف های ددکیند و کانتور از مفهوم مجموعه نامتناهی با هم معادل اند.

آیا زیر مجموعه ای از اعداد حقیقی وجود دارد که تعداد
اعضای آن اکیدا " بین تعداد اعضای مجموعه اعداد طبیعی و
تعداد اعضای مجموعه اعداد حقیقی باشد؟

$$\aleph_0 < \alpha < \mathfrak{C}$$

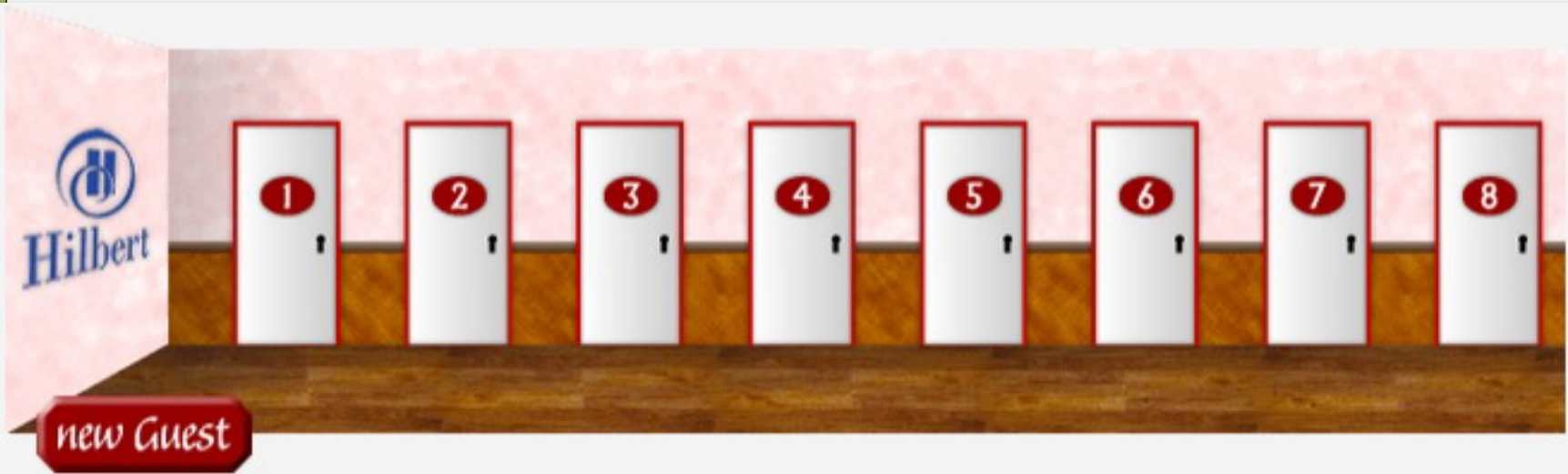


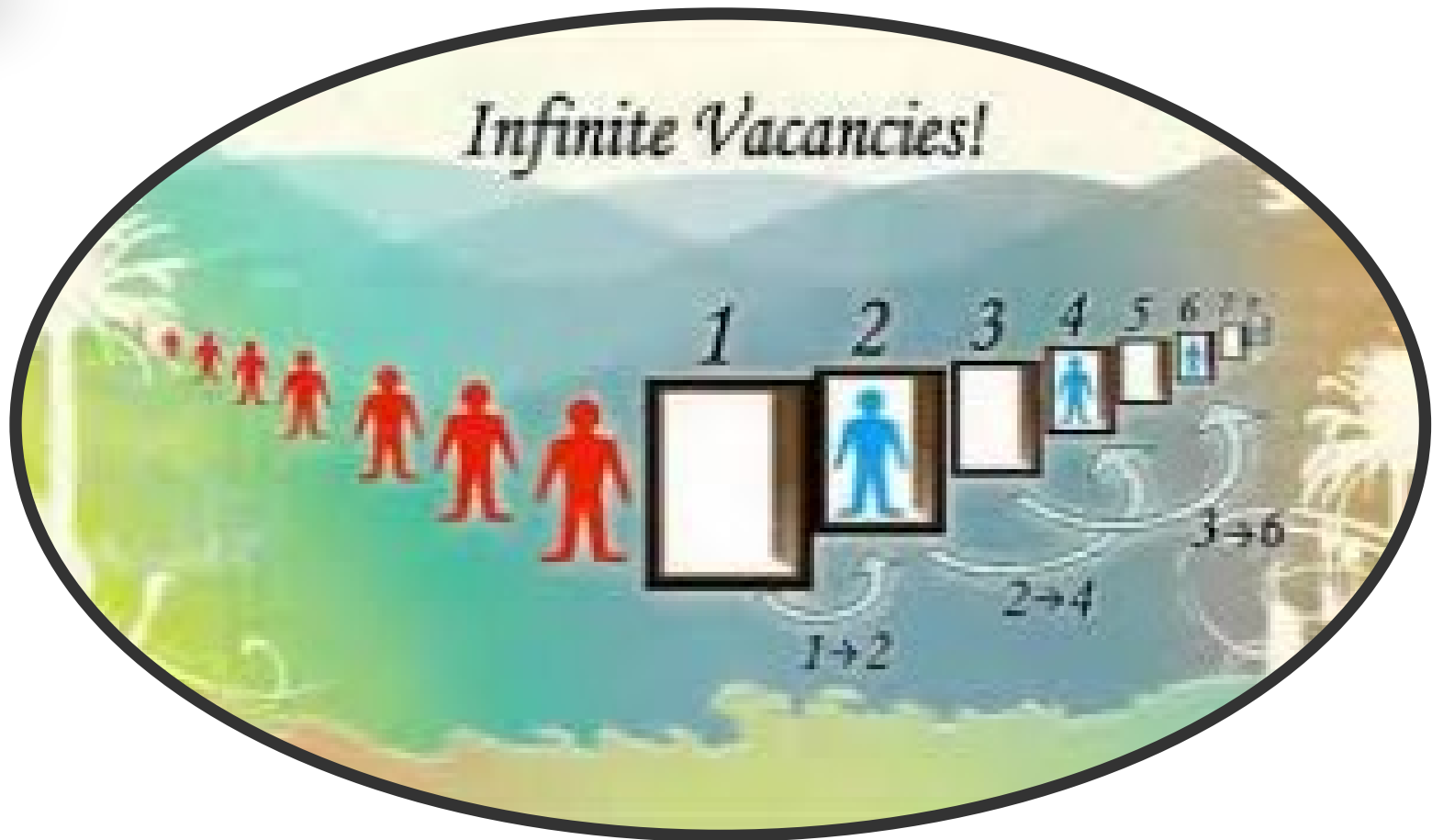
Paul Cohen (1934-2007)



Kurt Gödel (1906-1978)

هتل هیلبرت





فيلم هتل هيلبرت

<https://mathigon.org/world/Infinity>



Luitzen Egbertus Jan Brouwer
(1881-1966)

بروئر در ۱۹۰۸ این مطلب را که «قوانین منطق ارسطویی بدان گونه که به ما رسیده‌اند اعتبار مطلق دارند» مورد تردید قرار داد. به ویژه قانون طرد شق وسط (ثالث) (که می‌گوید برای هر گزاره p ، یا p یا $\neg p$) را معتبر ندانست. البته شهود گرایان قائل به شق سوم نیستند آن‌ها فقط می‌گویند: «چنین نیست که شق سوم وجود ندارد.» وی همچنین کاربرد بینهایت بالفعل (به مثابه یک کمیت نامتناهی) را مورد شک قرار داد و اشیای ریاضی را ساختمان‌های معین ذهنی دانست.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$$

واگرا بودن آن بیش تر به خاطر وجود اعداد اول است، چراکه $\sum_p \frac{1}{p}$ (عدد اول) واگراست.

اگر در سری همساز جملاتی را که در مخرج آن ها یک

رقم معین (مثلاً ۹) ظاهر شده است (مانند ۹، ۱۹، ۲۹ و ...) حذف کنیم، یک سری همگرا به دست می آید^[۳]:

$$\begin{aligned} \sum_{9 \nmid n} \frac{1}{n} &= \left(1 + \dots + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{88}\right) + \dots + \left(\frac{1}{10^k} + \dots + \frac{1}{\underbrace{88\dots8}_k}\right) + \dots \\ &< \underbrace{\left(1 + \dots + 1\right)}_{8 \times 9^0} + \underbrace{\left(\frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{10}\right)}_{8 \times 9^1} + \dots + \underbrace{\left(\frac{1}{10^k} + \dots + \frac{1}{10^k}\right)}_{8 \times 9^k} + \dots \\ &= \left(8 \times 9^0 \times \frac{1}{10^0}\right) + \left(8 \times 9^1 \times \frac{1}{10^1}\right) + \dots + \left(8 \times 9^k \times \frac{1}{10^k}\right) + \dots \\ &= 8 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^k \\ &= 80. \end{aligned}$$

توجه نمایید که $\sum_{9 \in n} \frac{1}{n} = \frac{1}{9} + \frac{1}{19} + \frac{1}{29} + \dots$ واگراست زیرا این سری بزرگ‌تر از سری واگرای $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{10^k + 9}$ است.

• اثبات Honsberger. بنا به بسط مک لورن، برای هر عدد حقیقی نامنفی

x ، $e^x > 1 + x$ پس

$$e^{S_n} = e^1 e^{\frac{1}{2}} \dots e^{\frac{1}{n}} \geq (1 + 1)(1 + \frac{1}{2}) \dots (1 + \frac{1}{n}) = n + 1$$

پس $\{e^{S_n}\}$ و در نتیجه $\{S_n\}$ واگراست.

• اثبات Gillman. اگر سری همساز همگرا به S باشد، آن گاه

$$\begin{aligned} S &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \\ &= \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) + \dots \\ &> \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right) + \dots \\ &= S \end{aligned}$$

که ممکن نیست.

• حسن ختام.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \left(\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16}\right) + \dots > 1 + 1 + 1 + 1 + \dots$$

با تشکر از توجه شما