≡ توپولوژی ≡

کتاب مرجع: توپولوژی عمومی: نیلفام - مصلحیان و هر کتاب توپولوژی دیگر.

هر جلسه درس می‌دهیم، فرض می‌کنیم که جلسه بعد، درس را دانشجویان یاد گرفته‌اند: توفیق اجباری

گاهی بدون خبر و عموماً با خبر قبلی، کوئیز گرفته می‌شود.

هیچ مطلبی را نفهمیده رد نشویم - کلی خواندن کافی نیست باید با "رنده" ریز درس بخوانیم یعنی جزئیات را کلمه به کلمه و سطر به سطر یاد بگیریم - مغزها باید از حالت آکبند خارج شود: به ویژه در کلاس باید، ذهن فعال داشته باشید. بر حتماً صبحانه بخورید و به کلاس بیایید.

کلاً از مغز شخص دیگری به خصوص من و دوستانتان استفاده نکنید بلکه از مغز خودتان یاری بجویید.

پیش‌نیاز درس: مبانی آنالیز ریاضی (که خوب گذرانده شده باشد)

هم‌نیاز: آنالیز ریاضی ۱

غیبت موجه یا غیر موجه: حداکثر ۲ جلسه

≡ جلسه اول ≡

Topology
مکان شناخت

تعریف. فرض کنیم $X\neq\emptyset$ یک مجموعه باشد. مجموعه $\tau\subseteq 2^X$ ($\mathcal{P}(X)$: مجموعه تمام زیرمجموعه‌های X) متشکل از بعضی از زیرمجموعه‌های X را یک توپولوژی روی X می‌گوییم هرگاه سه شرط زیر را داشته باشد:

الف) $\emptyset\in\tau$, $X\in\tau$

ب) اگر $A_1,\dots,A_n\in\tau$ آنگاه $\bigcap_{i=1}^{n}A_i\in\tau$ (τ نسبت به اشتراک "متناهی" بسته باشد)

ج) اگر $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ در τ باشند، آنگاه $\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha\in\tau$ (τ نسبت به اجتماع "دلخواه" بسته باشد).

در این صورت (X,τ) را یک فضای توپولوژی می‌گوییم.

امثله) ۱- $\tau=\{\emptyset,X\}$ یک توپولوژی روی X است که آن را توپولوژی ناگسسته می‌گویند.

۲- $\tau=\mathcal{P}(X)$ یک توپولوژی روی X (مجموعه مرجع) است. این توپولوژی را توپولوژی گسسته می‌گویند.

Scanned by CamScanner

۳) $X=\{a,b\}$ و $\tau=\{\emptyset,\{a\},X\}$. این Top را توپولوژی سرپینسکی می‌نامند.

۴) X یک مجموعه نامتناهی است و $\tau=\{A\subseteq X \mid X-A \text{ متناهی است}\}\cup\{\emptyset\}$ ($X-A=A^c$). این Top را توپولوژی متمم متناهی می‌نامند:

الف) $\emptyset\in\tau$ بنابه تعریف. $X\in\tau$ زیرا $X^c=\emptyset$ متناهی است.

ب) $A_1,\dots,A_n\in\tau \Rightarrow \underbrace{A_1^c,\dots,A_n^c}_{\text{متناهی}} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} A_i^c=\underbrace{\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)^c}_{\text{متناهی است}} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} A_i\in\tau$

ج) $A_\alpha\in\tau \Rightarrow \underbrace{A_\alpha^c}_{\text{متناهی}} \Rightarrow \bigcap_\alpha A_\alpha^c \subseteq \underbrace{A_{\alpha_0}^c}_{\text{متناهی}} \Rightarrow \underbrace{\bigcap_\alpha A_\alpha^c}_{\text{متناهی}}=\left(\bigcup_\alpha A_\alpha\right)^c \Rightarrow \bigcup_\alpha A_\alpha\in\tau$

$\alpha_0\in I$ عضو دلخواه

۵) X یک مجموعه ناشمارا است و $\tau=\{A\subseteq X \mid A^c \text{ شمارا است}\}\cup\{\emptyset\}$. τ را توپولوژی متمم شمارا گویند. یادآوری می‌شود که:

- D متناهی است هرگاه $\exists k;\ D\simeq \underbrace{\mathbb{N}_k}_{\{1,\dots,k\}}$
- D نامتناهی است هرگاه متناهی نباشد.
- D شمارای نامتناهی است هرگاه $D\simeq\mathbb{N}$
- D شمارا است هرگاه شمارا نامتناهی یا متناهی باشد.
- D ناشمارا است هرگاه شمارا نباشد.

۶) * مهم

فرض کنید (X,d) یک فضای متری باشد.

$\tau_d=\{G\subseteq X \mid \underbrace{G \text{ در } X \text{ باز است}}_{\text{هر نقطه } G \text{ درونی است}}\}$

در این صورت τ_d یک توپولوژی است که آن را توپولوژی "القا شده توسط متر d" می‌نامیم. پس به این اعتبار، هر فضای متریک می‌تواند به عنوان یک فضای توپولوژی تلقی شود.

یک سوال که یک سوال مهم این است که آیا هر فضای توپولوژی توسط یک متر القا می‌شود (متر پذیر است). جواب: منفی است و top سرپینسکی مثال آن است (چرا؟).

آیا شرایطی وجود دارد که اگر τ آن خواص را داشته باشد، متری یافت شود که $\tau=\tau_d$ ؟ جواب: مثبت است و این شرایط را "شرایط متر پذیری" یک فضای توپولوژی می‌گویند.

تعریف: هر عضو τ را یک مجموعه باز می‌گویند. یک مجموعه A را بسته می‌گوییم هرگاه $A^c\in\tau$ (متممش باز باشد).

Scanned by CamScanner

مفهوم همسایگی در توپولوژی دو نوع تعریف می‌شود:

تعریف ما: N یک همسایگی نقطهٔ x است هرگاه $N \in \tau$ (یعنی یک مجموعهٔ باز، همسایگی خود نقطه است).

تعریف اونا: N یک همسایگی نقطهٔ x است هرگاه $\exists G \in \tau;\ x \in G \subseteq N$

همسایگی ما، همسایگی اونا هم هست ولی همسایگی اونا، همسایگی ما نیست مگر آن N اونا باز باشد.

مثلاً در $\mathbb{R}$ با توپولوژی اقلیدسی (همان توپولوژی حاصل از متر اقلیدسی)،

در تعریف ما: $(0,1)$ یک همسایگی از $\frac{1}{3}$ است زیرا $(0,1)$ در فضای متریک $(\mathbb{R}, d_e)$ باز است.

در تعریف اونا: $(0,1]$ " " " " " " زیرا $\frac{1}{3} \in (0,1) \subseteq (0,1]$ (البته اونا

همسایگی $(0,1)$ ما را هم یک همسایگی $\frac{1}{3}$ تلقی می‌کنند و البته اونا، $(0,1)$ را همسایگی باز می‌گویند.

ما فقط با همسایگی‌های باز اونا کار می‌کنیم اما فکر نکنید که ما چیزی را از دست داده‌ایم.

تعریف. فرض کنیم $A \subseteq (X, \tau)$ و $p \in X$.

الف) p را نقطهٔ درونی A می‌گوییم هرگاه $\exists G \in \tau;\ x \in G \subseteq A$

ب) " " بیرونی A " " $\exists G \in \tau;\ x \in G \subseteq A^c$

ج) " " مرزی " " $\forall G \in \tau;\ G \cap A \neq \emptyset \ \& \ G \cap A^c \neq \emptyset$ ($\underset{x}{\underset{\cup}{G}}$)

د) مجموعهٔ نقاط درونی A را با $\underset{\mathrm{Int}(A)}{\underbrace{A^\circ}}$ نمایش می‌دهند.

" " " بیرونی " " " $Ext(A)$ " ".

" " " مرزی " " " $bd(A)$ یا $\partial(A)$ " ".

ه) p را نقطهٔ چسبیدگی A می‌گوییم هرگاه $\forall \underset{x}{\underset{\cup}{G}} \in \tau;\ G \cap A \neq \emptyset$ — $\bar{A}$: مجموعهٔ نقاط چسبیدگی

و) " " حدی " " " " ; $G \cap (A - \{p\}) \neq \emptyset$ — A': مجموعهٔ نقاط حدی، $\acute{A}$ نقاط حدی $p \notin A$ است

ز) A را در X چگال گوییم هرگاه $\bar{A} = X$. A را در X هیچ‌جا چگال گوییم هرگاه $\bar{A}^\circ = \emptyset$. نقطهٔ $p \in A$ منزوی است هرگاه ...

Scanned by CamScanner

جلسه دوم

در حالت کلی اگر τ_1 و τ_2 دو توپولوژی روی X باشند، $\tau_1 \cup \tau_2$ ممکن است توپولوژی نباشد.

$\tau_1=\{\emptyset,\{a\},\{a,b,c\}\}$ $\quad$ $\tau_2=\{\emptyset,\{b\},\{a,b,c\}\}$

اما اشتراک هر تعداد توپولوژی $\{\tau_\alpha\}$ روی X، یک توپولوژی روی X است:

$X,\emptyset\in\bigcap\tau_\alpha$; $\quad A_1,\dots,A_n\in\bigcap\tau_\alpha \Rightarrow \forall\alpha;\ A_1,\dots,A_n\in\tau_\alpha \Rightarrow \forall\alpha;\ \bigcap_{i=1}^n A_i\in\tau_\alpha \Rightarrow \bigcap A_i\in\bigcap\tau_\alpha$

$A_\beta\in\bigcap\tau_\alpha,\ \beta\in I \Rightarrow \cdots \Rightarrow \bigcup_\beta A_\beta\in\bigcap\tau_\alpha$

به ویژه، اگر $S\subseteq 2^X$ آنگاه توپولوژی تولید شده توسط S عبارت است از $\underset{\substack{\tau \text{ توپولوژی} \\ S\subseteq\tau}}{\bigcap\tau}$. در واقع

این توپولوژی، کوچکترین توپولوژی شامل S است زیرا اگر ρ یک توپولوژی روی X باشد که $S\subseteq\rho$ آنگاه $\underset{\substack{\tau \text{ توپولوژی} \\ S\subseteq\tau}}{\bigcap\tau}\subseteq\rho$ (زیرا ρ یکی از توپولوژی‌های شامل S است).

مثلاً اگر $X=\{a,b,c\}$ و $S=\{\{a\},\{b\}\}$ آنگاه $\tau_S=\{\emptyset,X,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$

تعریف. اگر τ_1 و τ_2 دو توپولوژی روی X باشند و $\tau_1\subseteq\tau_2$، آنگاه τ_1 را کوچکتر (ضعیف‌تر، ضخیم‌تر) از τ_2 گوییم.

* **تعریف.** اگر (X,τ) یک فضای توپولوژی باشد و $A\subseteq X$ یک مجموعه دلخواه باشد، آنگاه $\tau|A=\{G\cap A \mid G\in\tau\}$ یک توپولوژی روی A است که آن را توپولوژی زیرفضایی روی A گویند.

$\emptyset=\emptyset\cap A\in\tau|A$

$A=X\cap A\in\tau|A$

$G_1\cap A,\dots,G_n\cap A\in\tau|A \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n(G_i\cap A)=(\underbrace{\bigcap_{i=1}^n G_i}_{\in\tau})\cap A\in\tau|A$

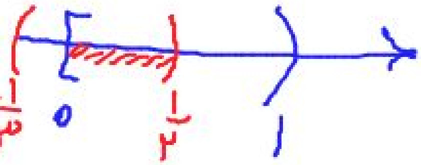
$(\forall\alpha;\ G_\alpha\cap A\in\tau|A)\Rightarrow \bigcup_\alpha(G_\alpha\cap A)=(\underbrace{\bigcup_\alpha G_\alpha}_{\in\tau})\cap A\in\tau|A$

Scanned by CamScanner

مثال) در $[0,1)$ با توپولوژی نسبی القا شده توسط توپولوژی اقلیدسی $((\mathbb{R},\tau_e))$ مجموعه $[0,\frac{1}{2})$ باز است

متر اقلیدسی $\to d_e(r,s)=|r-s|$

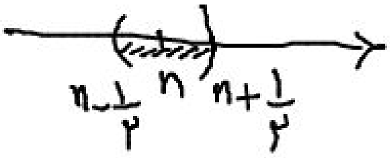
$$[0,\tfrac{1}{2}) = \underbrace{\underbrace{(-\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{2})}_{\text{در } \mathbb{R} \text{ باز}}}_{G} \cap \underbrace{[0,1)}_{A}$$



والبته $\tau_e|A=\{G\cap[0,1) \mid G\in\tau_e\}$.

مثال ۲) توپولوژی نسبی اقلیدسی روی $\mathbb{N}$ عبارت است از توپولوژی گسسته زیرا

$$\{n\} = \underbrace{(n-\tfrac{1}{2}, n+\tfrac{1}{2})}_{G} \cap \underbrace{\mathbb{N}}_{A}$$

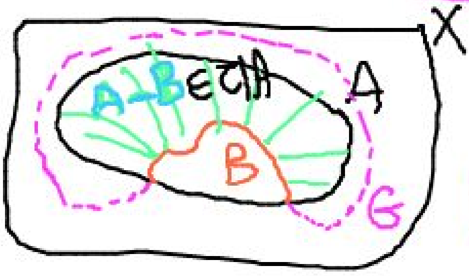


$$\forall A\subseteq\mathbb{N};\ A=\bigcup_{n\in A}\{n\}\in\tau_e|\mathbb{N} \Rightarrow \underbrace{\tau_e|\mathbb{N}}_{\text{توپولوژی گسسته}}$$

مثال ۳) $\tau_e|\mathbb{Q}=\{G\cap\mathbb{Q} \mid G\in\tau_e\}$

مثال ۴) اگر $B\subseteq A$ در $(A,\tau|A)$ بسته باشد، آنگاه $A-B\in\tau|A$ پس $\exists G\in\tau;\ A-B=G\cap A$

$\tau|A=\{G\cap A \mid G\in\tau\}$



لذا $B=G^c\cap A$ زیرا (G^c در X بسته است)

$$x\in B \Rightarrow \begin{cases} x\in A \\ x\notin A-B \end{cases} \Rightarrow x\notin G\cap A \Rightarrow x\notin G \text{ یا } x\notin A \Rightarrow x\notin G \Rightarrow x\in G^c$$

$$\Rightarrow x\in G^c\cap A$$

$$x\in G^c\cap A \Rightarrow \begin{cases} x\in A \\ x\notin G \end{cases} \Rightarrow x\notin G\cap A \Rightarrow x\notin A-B \xRightarrow{x\in A} x\in B.\ \square$$

پس هر زیرمجموعه بسته $(A,\tau|A)$ به صورت $F\cap A$ است که در آن F در (X,τ) بسته است.

تعریف: مجموعه بسته‌باز آن است که هم بسته باشد و هم باز.

Scanned by CamScanner

قضیه. $\bar{A}=\bigcap_{\substack{A\subseteq F\\ F^c\in\tau}} F$.

برهان. فرض کنیم $x\in\bar{A}$. گیریم F مجموعه بسته‌ای شامل A باشد. باید نشان دهیم $x\in F$. (برهان خلف) گیریم $x\notin F$. پس $x\in F^c$ (باز). لذا بنابه تعریف نقطه چسبیدگی $A\cap F^c\neq\emptyset$.

پس $y\in A\cap F^c$ وجود دارد. لذا $y\in A$ و $y\in F^c$. پس $y\notin F$. چون $A\subseteq F$، $y\notin A$. X

بنابراین $x\in F$. ////

فرض کنیم (1) $x\in\bigcap_{A\subseteq F} F$. می‌خواهیم ثابت کنیم $x\in\bar{A}$. گیریم $x\in G\in\tau$. پس (2) $x\notin G^c$.

(برهان خلف) فرض کنیم $G\cap A=\emptyset$. پس $A\subseteq G^c$ (بسته). پس G^c یکی از اعضای $\{F: A\subseteq F,\ F \text{ بسته}\}$. پس $\bigcap_{A\subseteq F \text{ بسته}} F\subseteq G^c$. بنابر (1)، داریم $x\in G^c$ که با (2) تناقض دارد. پس $A\cap G\neq\emptyset$.

لذا $x\in\bar{A}$. □

Scanned by CamScanner

جلسه سوم

تعریف. مجموعه A را بی‌کاست می‌گوییم هرگاه $A'=A$. بلافاصله نتیجه می‌شود که یک مجموعه بی‌کاست بسته است. زیرا $\boxed{\bar{A}=A'\cup A}=A$. (چرا؟)

فرض کنیم $x\in\bar{A}$. دو حالت در نظر می‌گیریم:

الف) $x\in A$. پس $x\in A'\cup A$.

ب) $x\notin A$. فرض کنیم $x\in G\in\tau$. چون $x\in\bar{A}$، $G\cap A\neq\emptyset$. گیریم $y\in G\cap A$. چون $x\notin A$ پس $y\neq x$. بنابراین $y\in G\cap(A-\{x\})$. پس $G\cap(A-\{x\})\neq\emptyset$. لذا $x\in A'$. پس $x\in A'\cup A$.

بالعکس، فرض کنیم $x\in A'\cup A$. پس $x\in A$ یا $x\in A'$. دو حالت رخ می‌دهد:

i) $x\in A$. اگر $x\in G\in\tau$، آنگاه $\underbrace{A\cap G\neq\emptyset}_{x\in}$. پس $x\in\bar{A}$.

ii) $x\in A'$. فرض کنیم $x\in G\in\tau$. بنا بر تعریف نقطه حدی $G\cap \underbrace{A-\{x\}}_{\subseteq A}\neq\emptyset$ پس $G\cap A\neq\emptyset$. لذا $x\in\bar{A}$. $\square$

با تکنیک بالا می‌توانیم ثابت کنیم که $\bar{A}=\partial A\cup A$.

قضیه. $\partial A=\bar{A}\cap\overline{A^c}$.

برهان. **لم.** $\partial A=\partial(A^c)$.

برهان. $x\in\partial A\Leftrightarrow \forall G\underset{x}{\overset{\tau}{\ni}};\ G\cap \underbrace{A}_{(A^c)^c}\neq\emptyset \,\&\, G\cap A^c\neq\emptyset\Leftrightarrow x\in\partial(A^c)$. $\square$

$$\bar{A}\cap\overline{A^c}=(\partial A\cup A)\cap(\overset{\partial A}{\partial(A^c)}\cup A^c)=\partial A\cup(\underbrace{A\cap A^c}_{\emptyset})=\partial A.\ \square$$

تمرین. $\partial(\partial(A))\subseteq\partial(A)$ & $\partial(\partial(\partial(A)))=\partial(\partial(A))$

تمرین. $\partial A\cap A^\circ=\emptyset$ & $\partial A\cap \mathrm{Ext}(A)=\emptyset$

$x\in\partial A\cap A^\circ\Rightarrow\exists G\in\tau;\ x\in G\subseteq A\Rightarrow G\cap A^c=\emptyset$

$\Downarrow x\in G\in\tau$

$x\notin\partial(A)$. ×

Scanned by CamScanner

تعریف. مجموعه A را مانده می‌گوییم هرگاه، متممش در X چگال باشد.

قضیه. $\overset{\circ}{A} = X - \overline{A^c}$.

$(\lozenge)$ $\overset{\circ}{A^c} = X - \overline{A}$ با تعبیر نقش A و A^c

برهان.

$x \in \overset{\circ}{A} \Rightarrow \exists G \in \tau,\ x \in G \subseteq A \Rightarrow \left.\begin{array}{l} G \cap A^c = \emptyset \\ x \in G \end{array}\right\} \Rightarrow x \notin \overline{A^c} \Rightarrow x \in X - \overline{A^c}$

$x \in X - \overline{A^c} \Rightarrow x \notin \overline{A^c} \Rightarrow \exists \underset{x}{\overset{}{G}} \in \tau;\ \underbrace{G \cap A^c = \emptyset}_{G \subseteq A} \Rightarrow x \in \overset{\circ}{A}.$

تمرین. A باز است اگر و فقط اگر $A = \overset{\circ}{A}$.

حل. $(\Leftarrow)$ فرض کنیم A باز باشد. بنابه تعریف درون، $\overset{\circ}{A} \subseteq A$. فرض کنیم $x \in A$. چون $x \in A \subseteq A$ پس $x \in \overset{\circ}{A}$. لذا $A \subseteq \overset{\circ}{A}$.

$(\Rightarrow)$ فرض کنیم $A = \overset{\circ}{A}$. چون $\overset{\circ}{A} = \bigcup\limits_{\substack{G \subseteq A \\ G \in \tau}} G$ ابر $\overset{\circ}{A}$ اجتماعی از مجموعه‌ی باز است ولذا $\overset{\circ}{A}$ باز است. بنابراین A باز است.

ورزش. A بسته است اگر و فقط اگر $\overline{A} = A$.

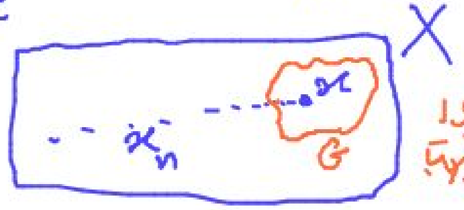
قضیه. A چگال است اگر و فقط اگر $\overset{\circ}{A^c} = \emptyset$.

برهان.

$$\overline{A} = X \underset{\overline{A} \subseteq X}{\Leftrightarrow} X - \overline{A} = \emptyset \underset{(\lozenge)}{\Longleftrightarrow} \overset{\circ}{A^c} = \emptyset. \ \square$$

تعریف. یک فضای توپولوژی (X, τ) را متری‌پذیر گوییم هرگاه یک متر d روی X وجود داشته باشد که $\tau_d = \tau$.

تعریف. دنباله $\{x_n\}$ از نقاط X را در توپولوژی τ همگرا به x گوییم $\forall \underset{x}{G} \in \tau\ \exists N\ \forall n \geq N;\ x_n \in G$



مثال) $x_n = a$ $(n = 1, 2, \ldots)$ در فضای سرپینسکی $\{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}$ هم به a و هم به b همگراست.

نتیجه. فضای سرپینسکی هاسدورف نیست زیرا در هر فضای هاسدورف حد هر دنباله در صورت وجود منحصر به فرد است.

=جلسه چهارم=

مثال) $\mathcal{T}=\{\emptyset,\mathbb{R}\}\cup\{(a,\infty)\mid a\in\mathbb{R}\}$ یک توپولوژی روی $\mathbb{R}$ است:

$$\bigcap_{i=1}^{n}(a_i,\infty)=(\max_{1\le i\le n} a_i,\infty)\in\mathcal{T} \qquad \bigcup_{\lambda}(a_\lambda,\infty)=(\inf_{\lambda} a_\lambda,\infty)$$

$y\in\bigcup_\lambda(a_\lambda,\infty)$

$$\inf_\lambda a_\lambda=-\infty \Rightarrow \bigcup_\lambda(a_\lambda,\infty)\overset{?}{=}\mathbb{R}\in\mathcal{T}$$ ($y\in\mathbb{R}\Rightarrow$ y کران پایین مجموعه $\{a_\lambda:\lambda\}$ نیست $\Rightarrow \exists\lambda';\ a_{\lambda'}<y\Rightarrow y\in(a_{\lambda'},\infty)$

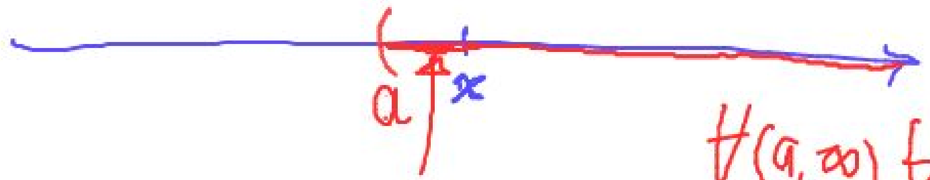
$$\inf_\lambda a_\lambda=\beta\in\mathbb{R},\ \begin{cases} x\in\bigcup_\lambda(a_\lambda,\infty)\Rightarrow\exists\lambda_0;\ a_{\lambda_0}<x\Rightarrow \inf_\lambda a_\lambda\le a_{\lambda_0}<x\Rightarrow x\in(\beta,\infty)\\ x\in(\beta,\infty)\Rightarrow \beta<x \Longrightarrow \exists\lambda_0;\ \beta\le a_{\lambda_0}<x\Rightarrow x\in(a_{\lambda_0},\infty)\end{cases}$$

طبق خاصیت اینفیمم

$$\Downarrow$$

$$x\in\bigcup_\lambda(a_\lambda,\infty)$$

چنانچه برای هر n، $x_n=n$، آنگاه برای هر $x\in\mathbb{R}$، $x_n\xrightarrow{\mathcal{T}}x$.



$$\forall(a,\infty)\ \forall n\ge[a]+1;\ x_n=n\in(a,\infty).$$

$N=[a]+1$

مثال) $x_n=\frac{1}{n}$ در $\mathbb{R}$ (هر وقت توپولوژی $\mathbb{R}^n$ را مشخص نکنیم، به معنی این است که توپولوژی معمولی (اقلیدسی) است) به صفر همگراست. اما این دنباله در $((0,1],\tau_e|(0,1])$ به هیچ نقطه‌ای از زیرفضا همگرا نیست.

به برهان خلف فرض کنیم $x\in(0,1]$ وجود دارد که $x_n\to x$.

$$\underbrace{\text{به برهان خلف}}_{\epsilon}$$

$$\forall G\cap(0,1]\ \exists N\ \forall n\ge N;\ x_n\in G\cap(0,1]$$

$x\in V$ یک مجموعه باز دلخواه از $\mathbb{R}$ با شامل $x\in V$. چون $V\cap(0,1]$ باز در $(0,1]$ است، و $x_n\xrightarrow{\tau_e|(0,1]}x$

پس $\exists K\ \forall n\ge K;\ x_n\in V\cap(0,1]\subseteq V$. پس $x_n\xrightarrow{\tau_e}x$. اما در $\mathbb{R}$، $x_n\xrightarrow{\tau_e}0$. پس باید $x=0$. ✗

Scanned by CamScanner

Counterexamples in Analysis (Gelbaum & Olmsted) #0
Counterexamples in Topology
کتاب‌های جالب برای مطالعه بیشتر

قضیه. اگر $x_n \to x$ در $(X,\mathcal{T})$ و $x_n\in A$، آنگاه $x\in \bar{A}$.

وقتی سور نمی‌گذاریم، یعنی سور عمومی

برهان. فرض کنیم $x\in G\in\mathcal{T}$.
بنا به تعریف حد، $\exists N \forall n\geq N;\ x_n\in G$
به ویژه $x_N\in G$. پس $A\cap G\neq\emptyset$. □
$x_N \in A$

تمرین. مثالی ارائه دهید که نشان دهد عکس قضیه بالا در حالت کلی درست نیست.

در $\mathbb{R}$ با توپولوژی متمم شمارا، $2\in\overline{(0,1)}=\mathbb{R}$. اما هیچ دنباله در $(0,1)$ وجود ندارد که به ۲ همگرا باشد.

نتیجه. اگر A بسته باشد، آنگاه حد هر دنباله از نقاط A متعلق به A است. ② ①

برهان. فرض کنیم $\{x_n\}$ دنباله‌ای در A باشد که $x_n\to x$. بنا به قضیه بالا، $x\in\bar{A}=A$. □

① $\overline{(0,1)}\subseteq\mathbb{R}$ بدیهی

$x\in\mathbb{R}\Rightarrow \forall G \ni x;\ \underbrace{\mathbb{R}-G}_{\text{شماراست}} \Longrightarrow \underset{\text{ناشمارا}}{(0,1)}\not\subseteq \underset{\text{شمارا}}{\mathbb{R}-G} \Rightarrow (0,1)\cap G\neq\emptyset.$

زیرا هیچ زیرمجموعه شمارا، ناشمارا نیست.

② (خلف) فرض کنیم $\{x_n\}$ دنباله‌ای در $(0,1)$ باشد که $x_n\to 2$. مشاهده می‌شود که $G=\mathbb{R}-\{x_1,x_2,\dots\}$ باز است (چون متممش شماراست)، و شامل ۲ است. پس باید

$\exists N\forall n\geq N;\ x_n\in G=\mathbb{R}-\{x_1,x_2,\dots\}$

به خصوص $x_N\notin\{x_1,x_2,\dots\}$ ✗

مثال) به مفهوم اونا: یک همسایگی x یک مجموعه N است به طوری که $\exists G\in\mathcal{J};\ x\in G\subseteq N$

فرض کنیم $x\in X$. $\mathcal{N}_x=\{N \mid N$ همسایگی x است$\}$ دستگاه همسایگی‌های x

پس

$$\forall 1\le i\le n;\ N_i\in\mathcal{N}_x \Rightarrow \forall i\ \exists G_i;\ x\in G_i\subseteq N_i \Rightarrow x\in\underbrace{\bigcap_{i=1}^{n} G_i}_{} \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} N_i \Rightarrow \bigcap N_i\in\mathcal{N}_x$$

پس $\mathcal{N}_x$ تحت اشتراک متناهی $\in\mathcal{J}$ بسته است. همچنین $\mathcal{N}_x$ تحت اجتماع دلخواه بسته

است زیرا اگر $\{N_\alpha\}$ یک خانواده دلخواه (گردایه) از اعضای $\mathcal{N}_x$ باشند:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\underbrace{\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)}_{}=\{0\}$$

در $\mathbb{R}$ باز است؛ در $\mathbb{R}$ باز نیست

فرض کنیم α_0 یک اندیس دلخواه ولی ثابت باشد.

$$x\in G_{\alpha_0}\subseteq N_{\alpha_0}\subseteq\bigcup_{\alpha} N_\alpha .$$

پس $\bigcup_{\alpha} N_\alpha\in\mathcal{N}_x$.

لذا $\mathcal{N}_x\cup\{\varnothing\}$ یک توپولوژی روی X است

$$x\in X\subseteq X\in\mathcal{N}_x$$

Scanned by CamScanner

جلسه پنجم

≡ مجموعه‌های G_δ و F_σ ≡

تعریف. مجموعه A را G_δ می‌گوییم هرگاه به صورت $\underbrace{\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n}_{\text{اشتراک شمارا}}$ که در آن G_nها بازند.

" " " " F_σ " " " " ، $\underbrace{\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n}_{\text{اجتماع شمارا}}$ باشد که در آن F_nها بسته‌اند.

مثال) در $\mathbb{R}$، $(0,1]$ یک مجموعه G_δ و نیز F_σ است زیرا

$$(0,1]=\bigcap_{n=1}^{\infty}(0,1+\tfrac{1}{n}) \qquad (0,1]=\bigcup_{n=1}^{\infty}[\tfrac{1}{n},1]$$

خ.ا.ج: $\forall x>0\ \exists n\in\mathbb{N};\ \frac{1}{n}<x$

همچنین $\bigcup_{n=1}^{\infty}[-n,n]=\mathbb{R}$, $\bigcap_{n=1}^{\infty}\underbrace{G_n}_{=\mathbb{R}}=\mathbb{R}$ نشان می‌دهند که $\mathbb{R}$ هم F_σ و هم G_δ است.

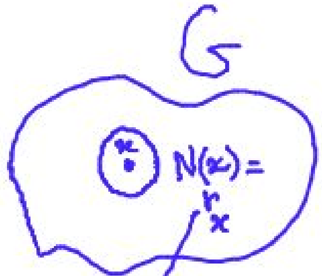
تمرین. مجموعه‌هایی مثال بزنید که F_σ یا G_δ نباشند.

اعضای $\mathcal{B}$، مجموعه‌ها بازند

≡ پایه ≡

تعریف. فرض کنید $(X,\mathcal{T})$ یک فضای توپولوژی باشد. زیرمجموعه $\mathcal{B}\subseteq\mathcal{T}$ را یک پایه برای توپولوژی $\mathcal{T}$ می‌گویند هرگاه هر مجموعه باز G ($G\in\mathcal{T}$) را بتوان به صورت اجتماع دلخواهی از اعضای $\mathcal{B}$ باشد.

مثلاً در فضای متریک $(X,\mathcal{T}_d)$، گردایه همه‌ی گوی‌ها $\{N_r(x)\}$ یک پایه برای توپولوژی است.



$$G=\bigcup_{x\in G} N_{r_x}(x)$$

به ویژه $\{(a,b);\ a,b\in\mathbb{R}\}$ پایه‌ای برای توپولوژی اقلیدسی روی $\mathbb{R}$ است.

r_x وابسته به x است

به طور معادل می‌توان گفت که $\mathcal{B}$ پایه‌ای برای توپولوژی $\mathcal{T}$ است اگر و تنها اگر

$$\forall G\in\mathcal{T}\ \forall x\in G\ \exists B\in\mathcal{B};\ x\in B\subseteq G \qquad (\star)$$

Scanned by CamScanner

قضیه. زیرمجموعه $\mathcal{B} \subseteq 2^X$ پایه‌ای برای یک توپولوژی روی X است اگر

$$\forall B_1,B_2\in\mathcal{B}\ \forall x\in B_1\cap B_2\ \exists B_3\in\mathcal{B};\quad x\in B_3\subseteq B_1\cap B_2$$

و نیز $\bigcup_{B\in\mathcal{B}} B = X$.

برهان. فرض کنیم $\mathcal{B}$ پایه‌ای برای توپولوژی $\mathcal{G}$ باشد. اولاً $X\in\mathcal{G}$ پس بنابه تعریف پایه، تعدادی مانند $\{B_\alpha\}$ وجود دارد که $\bigcup_\alpha B_\alpha = X$ $\left(X \underset{\text{مجموعه مرجع}}{\supseteq} \bigcup_{B\in\mathcal{B}} B \supseteq\right)$. لذا $X=\bigcup_{B\in\mathcal{B}} B$. ثانیاً فرض کنیم $B_1,B_2\in\mathcal{B}$ و $x\in \underbrace{B_1\cap B_2}_{\in\mathcal{G}}$. پس بنابه (*)، $\exists B_3\in\mathcal{B};\ x\in B_3\subseteq B_1\cap B_2$. ///

بالعکس، فرض کنیم $\mathcal{B}\subseteq 2^X$ در خواص ذکر شده در صورت قضیه صدق کند. گیریم $\mathcal{G}$ گردایه مجموعه‌هایی باشد که هر کدام اجتماعی از اعضای $\mathcal{B}$ باشند. نشان می‌دهیم که $\mathcal{G}$ یک توپولوژی روی X است:

(1) بنابه فرض قضیه $X=\bigcup_{B\in\mathcal{B}} B$. پس $X\in\mathcal{G}$ و $\emptyset=\bigcup_{B\in\{\}} B\in\mathcal{G}$.

(2) بنابه تعریف $\mathcal{G}$، اجتماع دلخواه اعضای $\mathcal{G}$، خودش اجتماعی از اعضای $\mathcal{B}$ است پس متعلق به $\mathcal{G}$ است. Let $\{G_\alpha\}\subseteq\mathcal{G}$. So $\forall\alpha\ \exists\{B^\alpha_\beta\}\subseteq\mathcal{B};\ G_\alpha=\bigcup_\beta B^\alpha_\beta$. Hence $\bigcup_\alpha G_\alpha=\bigcup_\alpha\bigcup_\beta B^\alpha_\beta \in \mathcal{G}$.

(3) فرض کنیم $G_1,G_2\in\mathcal{G}$. پس $G_1=\bigcup_{B\in\mathcal{B}_1\subseteq\mathcal{B}} B$ (◊) و $G_2=\bigcup_{B\in\mathcal{B}_2\subseteq\mathcal{B}} B$. نشان می‌دهیم اشتراک G_1 و G_2 متعلق به $\mathcal{G}$ است. برای این منظور از تکنیک (*) استفاده می‌کنیم:

فرض کنیم $x\in G_1\cap G_2$. پس $x\in G_1$ و $x\in G_2$. بنابه (◊)، $\exists B_1\in\mathcal{B}_1;\ x\in B_1$ و $\exists B_2\in\mathcal{B}_2;\ x\in B_2$. لذا $x\in B_1\cap B_2$. پس بنابه فرض قضیه $\exists B_3\in\mathcal{B};\ x\in B_3\subseteq B_1\cap B_2$. اما $B_1\cap B_2\subseteq G_1\cap G_2$. پس $x\in B_3\subseteq G_1\cap G_2$. بنابراین $G_1\cap G_2$ اجتماع چنین B_3هایی است. پس $G_1\cap G_2\in\mathcal{G}$. با استقرا، حکم برای تعداد متناهی، درست است.

Scanned by CamScanner

مثال) $\mathcal{B}=\{[a,b): a,b\in\mathbb{R}\}$ پایه‌ای برای یک توپولوژی روی $\mathbb{R}$ است که به آن توپولوژی حد پایین می‌گویند τ_l

زیرا $\mathcal{B}$ در شرایط قضیه بالا صدق می‌کند.

به طور مشابه $\{(a,b]: a,b\in\mathbb{R}\}$ پایه‌ای برای یک توپولوژی روی $\mathbb{R}$ است که به آن توپولوژی حد بالا τ_u می‌گوییم.

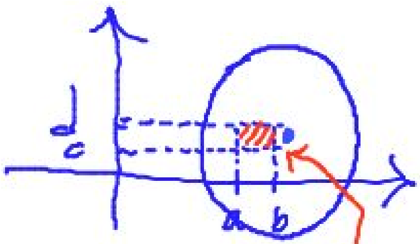
این توپولوژی‌ها با τ_e (اقلیدسی) متفاوتند.

تمرین ۱. آیا $\{[a,b]: a,b\in\mathbb{R}\}$ نیز پایه‌ای برای یک توپولوژی است؟

تمرین ۲. آیا اجتماع یا اشتراک دو تا پایه برای یک توپولوژی روی X، دوباره یک پایه برای آن توپولوژی است؟

تمرین ۳. آیا τ خودش یک پایه برای خودش است؟ بلی

تمرین ۴. می‌دانیم گوی‌های باز (یا قرص‌های باز در $\mathbb{R}^2$) پایه توپولوژی ($\mathbb{R}^2$) اقلیدسی است. نشان دهید که



$\{\underbrace{(a,b)\times(c,d)}_{\text{مستطیل‌های باز}}: a,b,c,d\in\mathbb{R}\}$

یک پایه دیگر برای توپولوژی اقلیدسی است.

قضیه. روی X، $\tau_1\subseteq\tau_2$ ($\mathcal{B}_1$ پایه τ_1، $\mathcal{B}_2$ پایه τ_2) اگر و فقط اگر $\forall B_1\in\mathcal{B}_1\ \forall x\in B_1\ \exists B_2\in\mathcal{B}_2;\ x\in B_2\subseteq B_1$

اثبات. $(\Leftarrow)$ فرض کنیم $x\in B_1\in\mathcal{B}_1$. چون $\mathcal{B}_1\subseteq\tau_1\subseteq\tau_2$، پس $B_1\in\tau_2$، چون $\mathcal{B}_2$ پایه τ_2 است، پس $(x\in)B_1=\bigcup B$ ($B\in\mathcal{B}_2\subseteq\mathcal{B}$)، پس $B_2\in\mathcal{B}_2$ وجود دارد $x\in B_2\subseteq B_1$.

$(\Rightarrow)$ فرض کنیم $G\in\tau_1$. چون G گردایه‌ای از اعضای $\mathcal{B}_1$ است و τ_2 نیز توپولوژی است، برای اثبات $G\in\tau_2$ کافی است نشان دهیم هر عضو B_1 از $\mathcal{B}_1$ متعلق به τ_2 است. اما فرض ما و تکنیک (*) می‌گوید که B_1 اجتماعی از اعضای $\mathcal{B}_2$ است پس $B_1\in\tau_2$. □

Scanned by CamScanner

تعریف. اگر $\mathcal{B}_1 \subseteq 2^X$, $\mathcal{B}_2 \subseteq 2^X = \mathcal{P}(X)$ هر دو پایه‌ی یک توپولوژی روی X باشند آنگاه آنها را معادل می‌گویند.

تکنیک

بنابر $(*)$ ، می‌توانیم بگوییم:

قضیه. دو پایه‌ی $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ معادلند اگر و تنها اگر

$$\forall x\in B\in\mathcal{B}_1 \ \exists B_2\in\mathcal{B}_2 ;\ x\in B_2\subseteq B_1$$

$$\forall x\in B_2\in\mathcal{B}_2 \ \exists B_1\in\mathcal{B}_1 ;\ x\in B_1\subseteq B_2$$

تعریف. زیرمجموعه $\mathcal{S}\subseteq\mathcal{T}$ را یک زیرپایه‌ی توپولوژی $\mathcal{T}$ می‌گوییم هرگاه خانواده تمام اشتراک‌های متناهی از اعضای $\mathcal{S}$ تشکیل یک پایه برای $\mathcal{T}$ دهد.

قضیه. شرط لازم و کافی برای اینکه $\mathcal{S}\subseteq 2^X$ زیرپایه‌ی یک توپولوژی $\mathcal{T}$ روی X باشد این است که $\bigcup_{G\in\mathcal{S}} G = X$.

برهان. $(\Leftarrow)$ فرض کنیم $x\in X$. چون خانواده اشتراک‌های متناهی از اعضای $\mathcal{S}$ یک پایه تشکیل می‌دهد $\mathcal{B}$

بنابر $(*)$. $\exists B\in\mathcal{B};\ x\in B\subseteq X$. بنابر اختیار $\mathcal{B}$ ، $\exists G_1,\dots,G_n\in\mathcal{S};\ B=\bigcap_{i=1}^{n} G_i$. پس

به ازای هر i ($1 \dots n$) $x\in G_i$. لذا $x\in\bigcup_{G\in\mathcal{S}} G$. از طرفی $\bigcup_{G\in\mathcal{S}} G\subseteq X$ (مجموعه باز) (مجموعه مرجع) بدیهی است.

$(\Rightarrow)$ فرض کنیم $\bigcup_{G\in\mathcal{S}} G = X$. نشان می‌دهیم $\mathcal{B}=\{\bigcap_{i=1}^{n} G_i \mid G_i\in\mathcal{S},\ n\in\mathbb{N}\}$ یک پایه برای

یک توپولوژی روی X است:

Scanned by CamScanner

اولاً - $\mathcal{S}\subseteq\mathcal{B}$ پس $X=\bigcup_{G\in\mathcal{S}} G\subseteq\bigcup_{B\in\mathcal{B}} B$ $(\subseteq X)$ لذا $\bigcup_{B\in\mathcal{B}} B = X$.

ثانیاً - فرض کنیم $B_1, B_2\in\mathcal{B}$ و $x\in B_1\cap B_2$. داریم $B_1=\bigcap_{i=1}^{n} G_i$ و $B_2=\bigcap_{i=1}^{m} G'_i$ لذا

$$x\in\underbrace{\bigcap_{i=1}^{m+n}\underbrace{V_i}_{\in\mathcal{S}}}_{\mathcal{B}} = B_1\cap B_2$$

که در آن $V_i=\begin{cases} G_i & 1\leq i\leq n \\ G'_{i-n} & n+1\leq i\leq m\end{cases}$.

$A\subseteq B$

A مشمول در B است.

B شامل A است.

پیوستگی

تعریف. تابع $f: X\longrightarrow Y$ (همیشه در این درس $D_f=X$) روی X پیوسته است هرگاه به ازای هر مجموعه باز G در Y، $f^{-1}(G)$ در X باز باشد.

$f^{-1}(G)=\{x\in X \mid f(x)\in G\}$ نقش معکوس G تحت f

اگر f مجموعه‌های باز (بسته) را به مجموعه‌های باز (بسته) نقش نماید یعنی ... آنگاه f را باز (بسته) می‌گویند.

یعنی به ازای هر V باز (بسته)، $f(V)$ باز است (بسته).

$f(V)=\{f(x)\mid x\in V\}$ نقش V تحت f

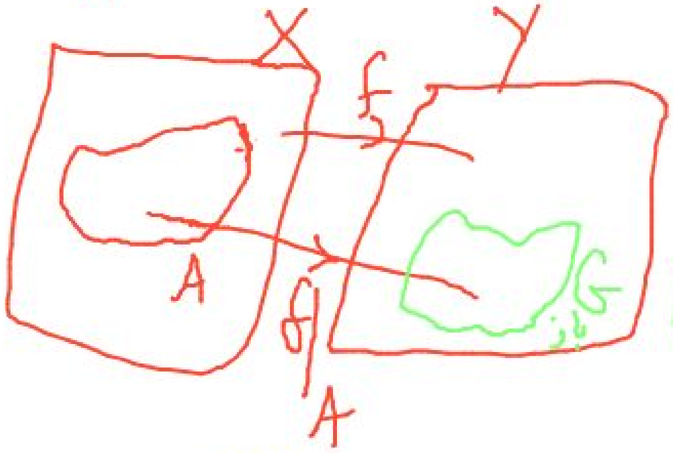
مثال‌های متنوعی وجود دارد که نشان می‌دهد مفهوم باز بودن، بسته بودن و پیوستگی مستقل از هم‌اند یعنی هیچ یک دیگری را نتیجه نمی‌دهد.

تعریف. تابع $f: X\longrightarrow Y$ در نقطه x_0 پیوسته است هرگاه به ازای هر همسایگی $f(x_0)$ مانند همسایگی از x_0 وجود داشته باشد که توسط f به داخل همسایگی $f(x_0)$ نقش شود.

که در توپولوژی یعنی [illegible] و نزدیکی

Scanned by CamScanner

قضیه. اگر $f:X\to Y$ روی X پیوسته باشد و $A\subseteq X$، آنگاه تحدید f یعنی $f|_A:A\to Y$ نیز روی A پیوسته است:



برهان: فرض کنیم G در Y باز باشد.

$$(f|_A)^{-1}(G)=\{x\in A \mid \underbrace{f|_A(x)}_{f(x)}\in G\}$$

$$=A\cap\{x\in X\mid f(x)\in G\}$$

$$=\underbrace{A\cap \underbrace{f^{-1}(G)}_{\text{باز (زیرا } f \text{ پیوسته)}}}_{\text{در } A \text{ باز است}} \quad \square$$

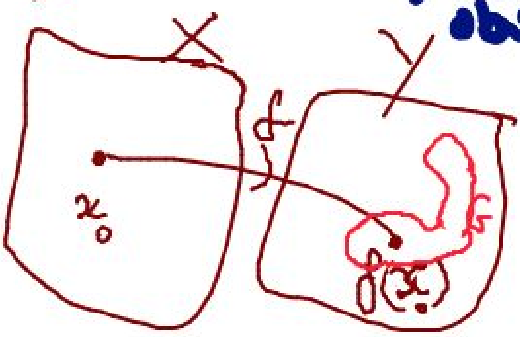
یادآوری:

$x\in f^{-1}(B)\iff f(x)\in B$

$x\in A \Longrightarrow f(x)\in f(A)$

$y\in f(A)\Longrightarrow \exists x\in A;\ y=f(x)$

تمرین. اگر $f:X\to Y$ در نقطه $x_0\in X$ پیوسته باشد، ~~آنگاه~~ تحدید f به $\{x_0\}$ پیوسته است.

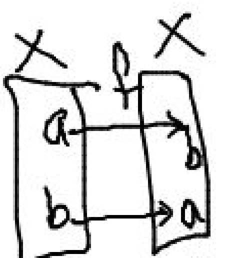


حل:

$$(f|_{\{x_0\}})^{-1}(G)=\{x_0\}\cap \underbrace{f^{-1}(G)}_{\text{باز}}$$

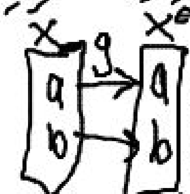
باز در $\{x_0\}$ نسبت به توپولوژی زیرفضایی

مثال. تابع $f(x)=\begin{cases}a & x=b\\ b & x=a\end{cases}$ از $\{a,b\}$ به $\{a,b\}$ با توپولوژی سرپینسکی



$\mathcal{J}=\{\emptyset,\{a\},X\}$

نه باز، نه بسته و نه پیوسته است ولی تابع $g(x)=id_X$ هم باز، هم بسته و هم پیوسته است.



$g(X)=X$

$g(\emptyset)=\emptyset$

$g(\{a\})=\{a\}$

$g(\{b\})=\{b\}$

Scanned by CamScanner

= جلسه هفتم =

$\underset{\text{زیرپایه}}{\mathcal{S}} \subseteq \underset{\text{پایه}}{\mathcal{B}} \subseteq \tau$

قضیه. تابع $f:X\to Y$ روی X پیوسته است اگر و تنها اگر به ازای هر B در یک پایه $\mathcal{B}$ برای Y، $f^{-1}(B)$ در X باز باشد.

برهان. ($\Leftarrow$) چون $B\in\mathcal{B}$ و اعضای $\mathcal{B}$ باز هستند و f نیز پیوسته است بنا به تعریف پیوستگی، $f^{-1}(B)$ در X باز است.

($\Rightarrow$) گیریم G در Y باز باشد پس $G=\bigcup_\alpha B_\alpha$ که $B_\alpha\in\mathcal{B}$. چون $f^{-1}(G)=\bigcup_\alpha \underbrace{f^{-1}(B_\alpha)}_{\text{بنا به فرض باز است}}$ پس $f^{-1}(G)$ باز است. لذا f پیوسته است.

تمرین. قضیه بالا با تعویض نقش $\mathcal{B}$ با یک زیرپایه $\mathcal{S}$ برقرار است.

قضیه. اگر $f:X\to Y$ در x_0 پیوسته باشد و $x_n\to x_0$، آنگاه $f(x_n)\to f(x_0)$.

$x\in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x)\in B$

برهان. فرض کنیم G در Y باز باشد و $f(x_0)\in G$. بنا به پیوستگی f در x_0، $f^{-1}(G)$ در X باز است و $x_0\in f^{-1}(G)$. بنا به تعریف حد

$$\exists N\ \forall n\ge N;\ x_n\in f^{-1}(G)$$

پس

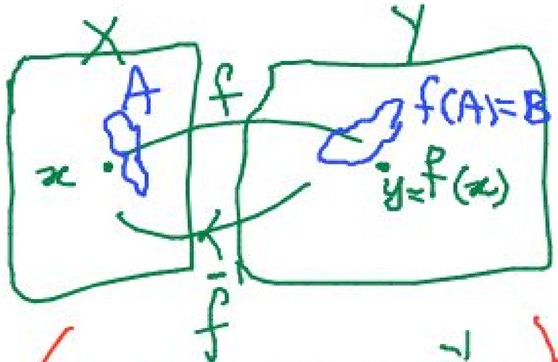
$$\forall n\ge N;\ f(x_n)\in G.\ \square$$

تمرین. عکس قضیه بالا درست نیست، اما در فضاهای متریک درست است (در یک فضای اول شمارا).

تعریف. یک تابع یک به یک و پوشا (تناظر یک به یک) که هم خودش و هم معکوسش پیوسته باشد را همسانریختی می‌گوییم.
homeomorphism

بدیهی است هر تابع همانی $id:X\to X$، یک همسانریختی است.

Scanned by CamScanner



قضیه. فرض کنیم f معکوس‌پذیر (دوسویی) باشد. در این صورت f^{-1} پیوسته است اگر و تنها اگر f باز باشد.

برهان.

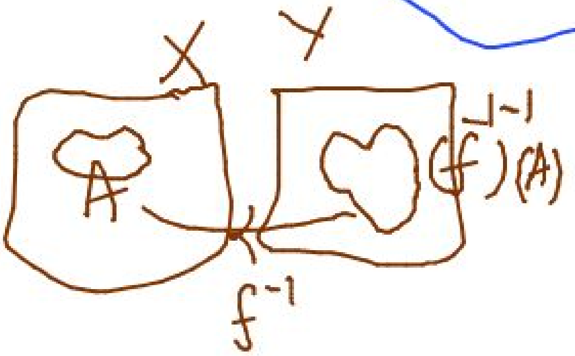
$$\big(y=f(x) \Leftrightarrow x=f^{-1}(y)\big) \Rightarrow \big(B=f(A) \Leftrightarrow f^{-1}(B)=A\big)$$

تابع معکوس

نقش B تحت تابع f^{-1}

نه فقط تصویر معکوس B تحت f است ولی ما به این آخری احتیاج نداریم

$(\Leftarrow)$ فرض کنیم f^{-1} پیوسته باشد و فرض کنیم A در X باز باشد. بنابه تعریف پیوستگی $\underbrace{(f^{-1})^{-1}(A)}_{=f(A)}$ باز است.



$$y\in(f^{-1})^{-1}(A) \Rightarrow f^{-1}(y)\in A \Rightarrow \exists x\in A;\ f^{-1}(y)=x$$

$$y\in f(A) \Longleftarrow y=f(x)$$

$$y\in f(A) \Rightarrow \exists x\in A;\ y=f(x) \Rightarrow x=\underbrace{f^{-1}}_{g}(y)\in A$$

$$\Rightarrow y\in g^{-1}(A)=(f^{-1})^{-1}(A).$$

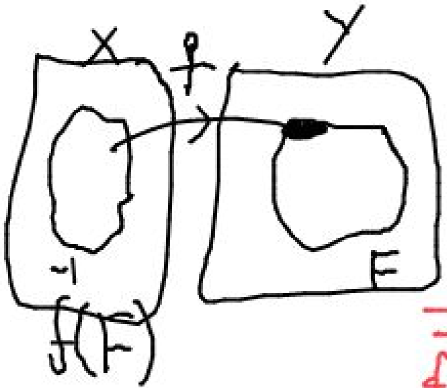
$(\Rightarrow)$ به طریق مشابه ثابت می‌شود. □

تمرین. $f:X\to Y$ روی X پیوسته است اگر و تنها اگر به ازای هر مجموعه بسته F از Y، $f^{-1}(F)$ در X بسته باشد.

حل. $f^{-1}(Y-F)=X-f^{-1}(F)$.

قضیه. $f:X\to Y$ روی X پیوسته است اگر و تنها اگر به ازای هر $A\subseteq X$، $f(\bar{A})\subseteq\overline{f(A)}$.

برهان. $(\Leftarrow)$ گیریم $y\in f(\bar{A})$ ①. فرض کنیم $y\in G$ و G در Y باز باشد. بنابه ①، $x\in\bar{A}$ هست که $y=f(x)$. پس $x\in f^{-1}(G)$. اما f پیوسته است پس $f^{-1}(G)$ در X باز است. بنابه تعریف نقطه چسبیدگی $f^{-1}(G)\cap A\neq\emptyset$، پس $\underbrace{f(f^{-1}(G)\cap A)}_{\subseteq f(f^{-1}(G))\cap f(A)\subseteq G\cap f(A)}\neq\emptyset$ پس $G\cap f(A)\neq\emptyset$ است. پس $y\in\overline{f(A)}$. ////



(⇒) گیریم F در Y بسته باشد. گیریم $A=f^{-1}(F)$. بنابه فرض

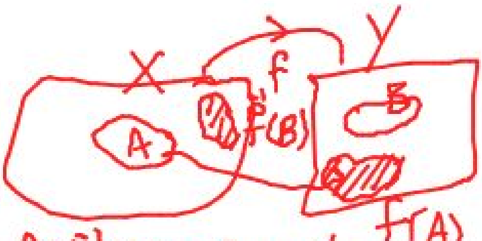
نشان دهیم $\overline{f^{-1}(F)}=f^{-1}(F)$

$$f(\overline{f^{-1}(F)}) \subseteq \overline{f(f^{-1}(F))} \subseteq \overline{F} = F$$

$\forall A\subseteq X;\ f(\overline{A})\subseteq\overline{f(A)}$

پس

$$\overline{f^{-1}(F)} \subseteq f^{-1}(f(\overline{f^{-1}(F)})) \subseteq f^{-1}(F) \underset{\text{واضح}}{\subseteq} \overline{f^{-1}(F)}$$



پس $\overline{f^{-1}(F)}=f^{-1}(F)$ بنابراین $f^{-1}(F)$ بسته است.

بنا به تمرین صفحه قبل، f پیوسته است. □

$f(f^{-1}(B))\subseteq B$ & $A\subseteq f^{-1}(f(A))$

توپولوژی
سخت‌ترین درس
دوره کارشناسی ریاضی

این درس باید ۵ واحد تلقی شود.
از نظر من، کسی که توپولوژی را "خوب" بخواند و "خوب" بفهمد،
در آنالیز تا سطح دکتری مشکلی نخواهد داشت.

Scanned by CamScanner

= جلسه هشتم =

قضیه. اگر Y یک مجموعه باشد و (X,d) یک فضای متریک باشد و $f: X\to Y$ یک تابع یک به یک و دوسویی باشد آنگاه می‌توان روی Y متری تعریف کرد که تحت آن f یکمتری (طولپا) باشد و لذا همسان‌ریختی با ρ.

برهان. قرار می‌دهیم $\rho(y_1,y_2)=d(f^{-1}(y_1),f^{-1}(y_2))$ (تابع معکوس)

در این صورت به وضوح ρ یک متر روی Y است. $\forall x_1,x_2\in X;\ d(x_1,x_2)=\rho(f(x_1),f(x_2))$

تعریف طولپا بودن f

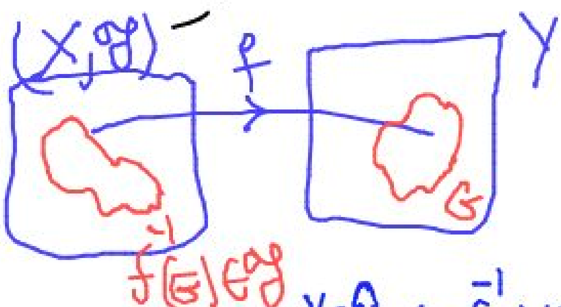
پس f طولپا است.

تابع f پیوسته یکنواخت است زیرا توابع طولپا، لیپشیتز با ثابت $M=1$ هستند یعنی

$$\forall\varepsilon\ \exists\delta=\varepsilon\ \forall x,y;\ d(x,y)<\delta \Rightarrow \rho(f(x),f(y))=d(x,y)<\delta=\varepsilon$$

لذا f پیوسته نیز است. به دلیل مشابه، چون f^{-1} طولپا است، پس f^{-1} نیز پیوسته است. □

قضیه. اگر Y یک مجموعه باشد و (X,τ) یک فضای توپولوژی باشد و $f: X\to Y$ یک تابع باشد، آنگاه می‌توان روی Y یک توپولوژی تعریف کرد که تحت آن f پیوسته باشد.



برهان. گیریم $\Theta=\{G\subseteq Y \mid f^{-1}(G)\in\tau\}$

ادعا می‌کنیم که Θ یک توپولوژی روی Y است:

① $f^{-1}(\emptyset)=\emptyset\in\tau$ پس $\emptyset\in\Theta$. همچنین $f^{-1}(Y)=X\in\tau$ پس $Y\in\Theta$.

② $\forall\alpha;\ G_\alpha\in\Theta \Rightarrow f^{-1}(G_\alpha)\in\tau \Rightarrow \bigcup_\alpha f^{-1}(G_\alpha)\in\tau \Rightarrow f^{-1}(\bigcup_\alpha G_\alpha)\in\tau \Rightarrow \bigcup_\alpha G_\alpha\in\Theta$

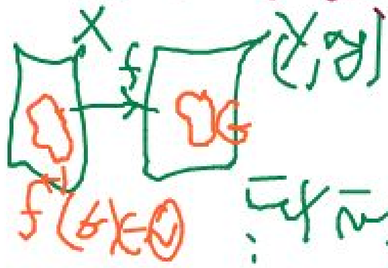
③ $G_1,\dots,G_n\in\Theta\Rightarrow\cdots\Rightarrow\bigcap_{i=1}^{n} G_i\in\Theta$.

به علاوه، گیریم V در Y باز باشد. پس $V\in\Theta$ لذا بنا به تعریف Θ داریم $f^{-1}(V)\in\tau$. پس f پیوسته است. در واقع Θ قوی‌ترین توپولوژی روی Y است که تحت آن f پیوسته است. □

Scanned by CamScanner

قضیه. اگر X یک مجموعه باشد، $(Y,\mathcal{Y})$ یک فضای توپولوژیک باشه و $f:X\to Y$ یک تابع باشد، آنگاه یک توپولوژی روی X وجود دارد که تحت آن f پیوسته است.

اثبات. قرار می‌دهیم $\Theta=\{f^{-1}(G)\mid G\in\mathcal{Y}\}$. بنا بر قضیه قبل، ثابت می‌شود که Θ یک توپولوژی روی X است و بنا به تعریف Θ، f نیز پیوسته است.



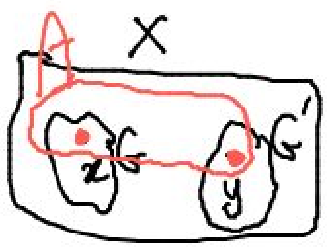
حال نشان می‌دهیم Θ کوچکترین توپولوژی روی X است که تحت آن f پیوسته است:

گیریم Φ یک توپولوژی روی X باشد که تحت آن f پیوسته است. فرض کنیم $V\in\Theta$. پس V به صورت $f^{-1}(G)$ به ازای G ای در $\mathcal{Y}$ است. اما چون f روی (X,Φ) پیوسته است، باید $f^{-1}(G)\in\Phi$. لذا $V\in\Phi$.

پس $\Theta\subseteq\Phi$. □

تعریف. خاصیت P روی فضاهای توپولوژیک را موروثی می‌گویند هرگاه چنانچه یک فضای توپولوژیک X آن خاصیت را داشته باشد، همه زیرفضاهای X نیز آن خاصیت را داشته باشند.

مانند متریک پذیری. مثال دیگر هاسدورف بودن فضا است:



$$\forall x,y\in X\ \exists G,G'\in\mathcal{Y};\ x\in G,\ y\in G',\ G\cap G'=\emptyset$$

تعریف. خاصیت P را خاصیت توپولوژیکی می‌گویند، هرگاه چنانچه یک فضای توپولوژی X این خاصیت را داشته باشد، هر فضای توپولوژی همسانریخت با آن نیز، آن خاصیت را داشته باشد.

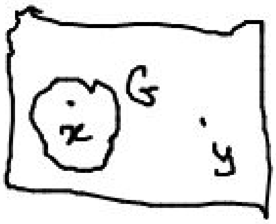
مانند متریک پذیری و هاسدورف بودن.

$$f(G)\cap f(G')\overset{\text{یک به یک}}{=}f(G\cap G')=f(\emptyset)=\emptyset$$

Scanned by CamScanner

جلسه نهم (سال نو مبارک)

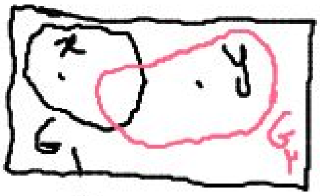
اصول جداسازی



تعریف. فضای T_0 (کولموگوروف): $\forall x\neq y\in X\ \exists G\in\mathcal{J};\ (x\in G\ \&\ y\notin G)\vee(x\notin G\ \&\ y\in G)$

مثال) فضای سرپینسکی $X=\{x,y\}$، فضای T_0 است.

مثال) فضای ناگسسته $(X,\{\emptyset,X\})$، T_0 نیست.



تعریف. فضای T_1 (فرشه): $\forall x\neq y\in X\ \exists G_1,G_2\in\mathcal{J};\ (x\in G_1\ \&\ y\notin G_1)\wedge(x\notin G_2\ \&\ y\in G_2)$

$T_0\supseteq T_1$

مثال). فضای سرپینسکی، T_0 است ولی T_1 نیست.

مثال) فضای گسسته $(X,P(X))$، T_1 است زیرا به ازای هر $x\neq y\in X$، کافی است $G_1=\{x\}$، $G_2=\{y\}$.

قضیه. شرط لازم و کافی برای اینکه فضای $(X,\mathcal{J})$ فضای T_1 باشد آن است که هر مجموعهٔ تک عضوی در X بسته باشد.

برهان. ($\Rightarrow$) فرض کنیم $x,y\in X$. در این صورت $x\in \underset{\not\ni y}{G_1}=X-\underset{\text{بسته}}{\{y\}}\in\mathcal{J}$ و $y\in \underset{\not\ni x}{G_2}=X-\{x\}\in\mathcal{J}$.

پس X فضای T_1 است.

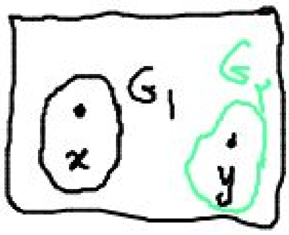
($\Leftarrow$) فرض کنیم X فضای T_1 باشد و $x\in X$. نشان می‌دهیم $X-\{x\}$ باز است. بگیریم $y\in X-\{x\}$.

پس x و y دو نقطهٔ متمایزند. لذا $\exists G_x,G_y;\ x\in G_x\cap(X-G_y)\ \&\ y\in G_y\cap(X-G_x)$

لذا $y\in G_y\subseteq X-\{x\}$. بنابراین $X-\{x\}=\bigcup_{y\in X-\{x\}} G_y\in\mathcal{J}$ باز. □

نتیجه. $(X,\mathcal{J})$ فضای T_1 است اگر شامل توپولوژی متمم متناهی باشد.
$\left(G\in\mathcal{J}_f\Rightarrow \underset{\text{متناهی}}{X-G}=\{x_1,\dots,x_n\}=\bigcup_{i=1}^{n}\{x_i\}\Rightarrow \underset{\text{بسته در } \mathcal{J}}{X-G}\Rightarrow G\in\mathcal{J}\right)$

Scanned by CamScanner



تعریف (اصل T_2) فضای T_2 (هاسدورف): $\forall x\neq y\in X\ \exists G_1,G_2\in\mathcal{J};\ x\in G_1,\ y\in G_2,\ G_1\cap G_2=\emptyset$

$T_0\supseteq T_1\supseteq T_2$

مثال) هر فضای متریک (X,d)، فضای T_2 است زیرا

$$\forall x\neq y:\ x\in N_{\frac{d(x,y)}{3}}(x),\ y\in N_{\frac{d(x,y)}{3}}(y),\ N_{\frac{d(x,y)}{3}}(x)\cap N_{\frac{d(x,y)}{3}}(y)=\emptyset$$

مثال) فضای متمم متناهی روی $\mathbb{R}$، T_1 است ولی T_2 نیست زیرا

اگر $x,y\in\mathbb{R}$ و دو مجموعه باز $\underset{x}{\underset{\Downarrow}{G_1}}$ و $\underset{y}{\underset{\Downarrow}{G_2}}$ موجود باشند که $G_1\cap G_2=\emptyset$ آنگاه

$$(G_1\cap G_2)^c=\emptyset^c\Rightarrow \underbrace{G_1^c}_{\text{متناهی}}\cup\underbrace{G_2^c}_{\text{متناهی}}=\mathbb{R}\ \times$$

اهمیت فضاهای هاسدورف به خاطر قضیه زیر است:

قضیه. حد هر دنباله در یک فضای هاسدورف، در صورت وجود، یکتاست.

$$x_n\xrightarrow{(X,\mathcal{J})}x\equiv\forall \underset{x}{\underset{\Downarrow}{G}}\in\mathcal{J}\ \exists N\ \forall n\geq N;\ x_n\in G$$

برهان. فرض کنیم $\{x_n\}$ دارای دو حد x و y باشد.

بنابه هاسدورف بودن فضا، $\exists G_1,G_2;\ x\in G_1,\ y\in G_2,\ G_1\cap G_2=\emptyset$

بنابه تعریف حد،

$\exists N_1\ \forall n\geq N_1;\ x_n\in G_1$

$\exists N_2\ \forall n\geq N_2;\ x_n\in G_2$

پس $x_{2N_1+N_2}\in G_1\cap G_2\ \times$. □

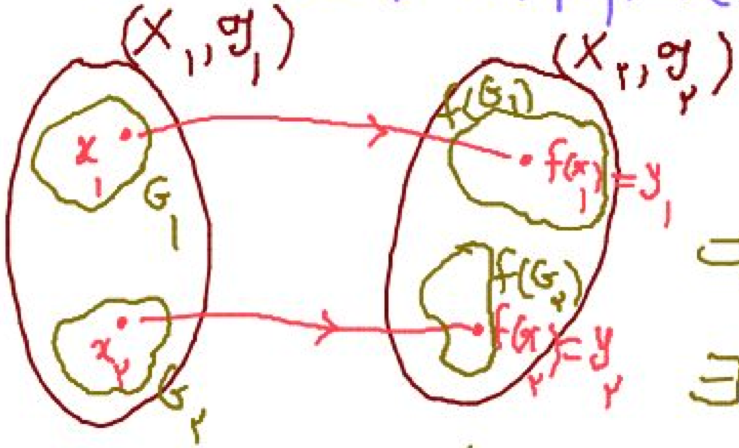
قضیه. هر زیرفضای توپولوژیکی از یک فضای توپولوژیکی هاسدورف، هاسدورف است.

برهان. $\forall x,y\in A\ \exists G_1,G_2\in\mathcal{J};\ x\in G_1,\ y\in G_2,\ G_1\cap G_2=\emptyset$

پس $(G_1\cap A)\cap(G_2\cap A)=\emptyset,\ x\in G_1\cap A\in\mathcal{J}|A,\ y\in G_2\cap A\in\mathcal{J}|A$ □

Scanned by CamScanner

قضیه. اگر $(X_1,\mathcal{T}_1)$ هاسدورف و $(X_2,\mathcal{T}_2)$ و $f:(X_1,\mathcal{T}_1)\to(X_2,\mathcal{T}_2)$ تابع دوسویی و باز باشد، آنگاه $(X_2,\mathcal{T}_2)$ نیز هاسدورف است.



اثبات. فرض کنیم $y_1\neq y_2\in X_2$. چون f پوشا است

پس $\exists x_1,x_2\in X_1;\ y_1=f(x_1)\ \&\ y_2=f(x_2)$

چون f تابع است، $x_1\neq x_2$. چون X_1 هاسدورف است، پس $\exists G_1,G_2\in\mathcal{T}_1;\ x_1\in G_1, x_2\in G_2, G_1\cap G_2=\emptyset$:

بنابراین $\underbrace{f(G_2)\in\mathcal{T}_2}_{f\ \text{باز است}}$, $\underbrace{f(x_2)}_{y_2}\in f(G_2)$, $\underbrace{f(x_1)}_{y_1}\in f(G_1)\in\mathcal{T}_2$, $f(G_1)\cap f(G_2)\underset{f\ \text{یک به یک است}}{=}f(G_1\cap G_2)=f(\emptyset)=\emptyset$ □

نتیجه. «هاسدورف بودن» خاصیت توپولوژیکی است یعنی تحت همسانریختی پایاست.

همسانریختی: دوسویی، باز، پیوسته

تعریف. فضای $T_{\frac{5}{2}}$ (اوریسون): $\forall x\neq y\in X\ \exists G_1,G_2\in\mathcal{T};\ x\in G_1, y\in G_2, \overline{G_1}\cap\overline{G_2}=\emptyset$

واضح است که $T_0\supseteq T_1\supseteq T_2\supseteq T_{\frac{5}{2}}$.

تعریف. فضای T_3 (منتظم): $\forall x\in X\ \forall \underset{x\notin\ \text{بسته}}{F\subseteq X}\ \exists G_1,G_2\in\mathcal{T};\ x\in G_1, F\subseteq G_2, G_1\cap G_2=\emptyset$

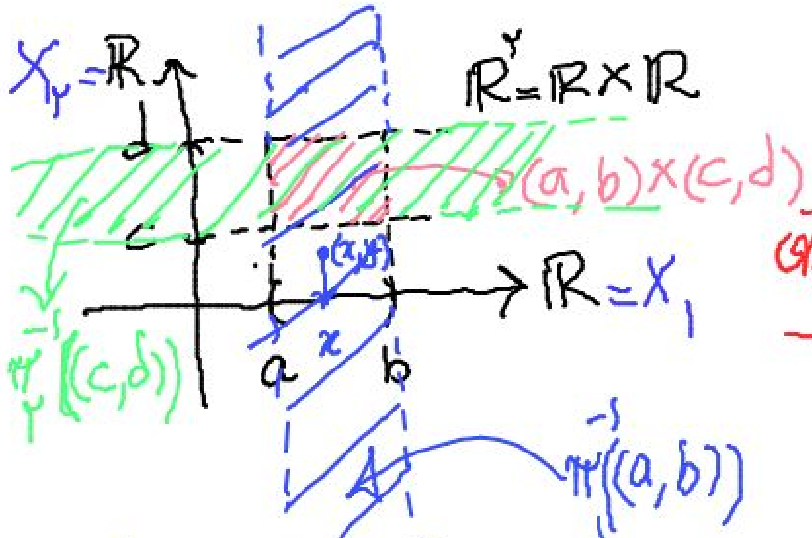
تعریف. فضای $T_{\frac{7}{2}}$ (به طور کامل منتظم): $\forall x\in X\ \forall \underset{x\notin\ \text{بسته}}{F\subseteq X}\ \exists f:X\to([0,1],\mathcal{T}_e|[0,1]);\ f(x)=0,\ f(F)=\{1\}$

تعریف. فضای T_4 (نرمال): $\forall \underset{\text{بسته و جدا از هم}}{F_1,F_2\subseteq X}\ \exists G_1,G_2\in\mathcal{T};\ F_1\subseteq G_1, F_2\subseteq G_2, G_1\cap G_2=\emptyset$

فضای به طور کامل نرمال و فضای نرمال کامل T_5 و $T_{\frac{9}{2}}$ قابل توجهند.

Scanned by CamScanner

توپولوژی حاصلضربی



یادآوری: اگر $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ یک خانواده از مجموعه‌ها (دلخواه) باشد آنگاه

$$\prod_{\alpha\in I} X_\alpha=\{\underbrace{x}_{\{x_\alpha\}}: I\to \bigcup X_\alpha \mid \underbrace{x(\alpha)}_{x_\alpha}\in X_\alpha\}$$

را حاصلضرب دکارتی آن خانواده می‌گوییم.

$$\pi_1:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$(x,y)\mapsto x$$

$$\pi_2:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$(x,y)\mapsto y$$

همچنین
$$\left\{\begin{array}{l}\pi_\alpha:\prod_{\alpha\in I}X_\alpha \xrightarrow{\text{برو}} X_\alpha\\ (x_\alpha)\mapsto x_\alpha\end{array}\right.$$
را افکنش αام (تصویر) می‌گوییم.

$X_1=\mathbb{R}$
$X_2=\mathbb{R}$
$n=2$

مثال) فرض کنید مجموعه‌های $X_1,\dots,X_n$ داده شده باشند. نیز $I=\{1,\dots,n\}$ و لذا

$$\prod_{i=1}^{n}X_i=\{\underbrace{x}_{(x_1,\dots,x_n)}: I\to\bigcup_{i=1}^{n}X_i \mid \underbrace{x(i)}_{x_i}\in X_i\}\ \&\ \pi_i:\prod_{i=1}^{n}X_i\to X_i$$
$$(x_1,\dots,x_n)\mapsto x_i$$

حال فرض کنیم به ازای هر $\alpha\in I$، $(X_\alpha,\mathcal{T}_\alpha)$ یک فضای توپولوژیک باشد. در این صورت

$$\mathcal{S}=\{\pi_\alpha^{-1}(G_\alpha)\mid \alpha\in I,\ G_\alpha\in\mathcal{T}_\alpha\}$$

نه $\prod_\alpha \mathcal{T}_\alpha$

تشکیل یک زیرپایه برای یک توپولوژی روی $\prod_\alpha X_\alpha$ می‌دهد که به آن توپولوژی حاصلضربی یا تیخونوف می‌گویند.

$$\prod_{\alpha\in I}X_\alpha\supseteq\bigcup_{\alpha\in I}\pi_\alpha^{-1}(G_\alpha)\supseteq\bigcup_{G\in\mathcal{T}_{\alpha_0}}\pi_{\alpha_0}^{-1}(G)=\pi_{\alpha_0}^{-1}\Big(\bigcup_{G\in\mathcal{T}_{\alpha_0}}G\Big)=\pi_{\alpha_0}^{-1}(X_{\alpha_0})=\prod_{\alpha\in I}X_\alpha$$

$\prod_\alpha X_\alpha\to X_{\alpha_0}$

تبصره. اولاً چون هر X_α ناتهی است بنابه "اصل انتخاب"، $\prod_\alpha X_\alpha\neq\emptyset$. ثانیاً به ازای هر $\alpha\in I$، π_α پوشاست.
زیرا فرض کنیم $y\in X_{\alpha_0}$. چون X_αها ناتهی‌اند لذا به ازای هر $\alpha\neq\alpha_0$، $x_\alpha\in X_\alpha$ وجود دارد. اینک تابع $x:I\to\bigcup_\alpha X_\alpha$ با ضابطهٔ $x(\alpha)=\begin{cases}x_\alpha & \alpha\neq\alpha_0\\ y & \alpha=\alpha_0\end{cases}$ عضوی از $\prod_\alpha X_\alpha$ است و ضمناً $\pi_{\alpha_0}(x)=y$.

Scanned by CamScanner

یک عضو پایه توپولوژی تیخونوف به صورت زیر است:

$$B=\bigcap_{i=1}^{n}\pi_{\alpha_i}^{-1}(G_{\alpha_i})=\pi_{\alpha_1}^{-1}(G_{\alpha_1})\cap\dots\cap\pi_{\alpha_n}^{-1}(G_{\alpha_n}).$$

یک مجموعه باز در توپولوژی تیخونوف به صورت $\bigcup_{\beta} B_\beta$ که B_β یک عضو پایه به صورت بالاست.

قضیه. هر افکنش $\pi_{\alpha_0}:\prod_{\alpha\in I}X_\alpha\to X_{\alpha_0}$ برو، پیوسته و باز است.

برهان. (۱) فرض کنیم $G\in\mathcal{T}_{\alpha_0}$. بنابه تعریف توپولوژی تیخونوف، $\underbrace{\pi_{\alpha_0}^{-1}(G)}_{\text{عضو زیرپایه}}\in\prod\mathcal{T}_\alpha$. پس π_{α_0} پیوسته است.

(۲) قبلاً نشان دادیم که π_{α_0} برو است.

(۳) اگر $A\in\prod\mathcal{T}_\alpha$، آنگاه A به صورت اجتماعی از اعضای پایه توپولوژی تیخونوف است، یعنی $A=\bigcup_\gamma B_\gamma$. پس $\pi_{\alpha_0}(A)=\pi_{\alpha_0}(\bigcup_\gamma B_\gamma)=\bigcup_\gamma \pi_{\alpha_0}(B_\gamma)$. لذا برای باز بودن $\pi_{\alpha_0}(A)$ کافی است نشان دهیم π_{α_0} هر یک از اعضای پایه را به یک مجموعه بازی می‌برد. پس فرض کنیم $B=\bigcap_{i=1}^{n}\pi_{\alpha_i}^{-1}(G_{\alpha_i})$ یک عضو پایه باشد. نشان می‌دهیم

$$\pi_{\alpha_0}(B)=\begin{cases}G_{\alpha_0} & \alpha_0\in\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}\\ X_{\alpha_0} & \alpha_0\notin\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}\end{cases}$$

و لذا $\pi_{\alpha_0}(B)$ باز است و برهان تمام می‌شود: ب.ا.ک.خ.ب.ک.م.و.م.ن.ف.ک. $G_{\alpha_i}\neq\emptyset$; $\forall 1\le i\le n$.

(الف) فرض کنیم $\alpha_0\notin\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$. بدیهی است $\pi_{\alpha_0}(B)\subseteq X_{\alpha_0}$. بالعکس گیریم $y\in X_{\alpha_0}$. فرض کنیم برای هر $\alpha\neq\alpha_0$، $x_\alpha\in X_\alpha$ طوری انتخاب شده باشد که $x_{\alpha_1}\in G_{\alpha_1},\dots,x_{\alpha_n}\in G_{\alpha_n}$. در این صورت قرار می‌دهیم $x(\alpha)=\begin{cases}y & \alpha=\alpha_0\\ x_\alpha & \alpha\neq\alpha_0\end{cases}$. در این صورت $\pi_{\alpha_0}(x)=y$ و ضمناً $x\in B=\bigcap_{i=1}^{n}\pi_{\alpha_i}^{-1}(G_{\alpha_i})$ (زیرا برای $1\le i\le n$، $\pi_{\alpha_i}(x)=x_{\alpha_i}\in G_{\alpha_i}$).

پس $y\in\pi_{\alpha_0}(B)$ یعنی $X_{\alpha_0}\subseteq\pi_{\alpha_0}(B)$. بنابراین $\pi_{\alpha_0}(B)=X_{\alpha_0}$ وقتی که $\alpha_0\notin\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$.

(ب) فرض کنیم $\alpha_0\in\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$. پس می‌توانیم فرض کنیم $1\le j\le n$ ای هست که $\alpha_0=\alpha_j$. نشان می‌دهیم $\pi_{\alpha_j}(B)=G_{\alpha_j}$: چون $B=\bigcap_{i=1}^{n}\pi_{\alpha_i}^{-1}(G_{\alpha_i})\subseteq\pi_{\alpha_j}^{-1}(G_{\alpha_j})$، داریم $\pi_{\alpha_j}(B)\subseteq\pi_{\alpha_j}(\pi_{\alpha_j}^{-1}(G_{\alpha_j}))\underset{\text{برو بودن } \pi_{\alpha_j}}{=}G_{\alpha_j}$.

Scanned by CamScanner

حال نشان می‌دهیم $G_{\alpha_j} \subseteq \pi_{\alpha_j}(B)$:

فرض کنیم $y \in G_{\alpha_j}$. به ازای هر $\alpha \neq \alpha_j$، $x_\alpha \in X_\alpha$ را طوری انتخاب می‌کنیم که به ازای $\alpha = \alpha_i$ با $i \neq j$،
$x_\alpha \in G_\alpha$. در این صورت با فرض اینکه $x(\alpha) = \begin{cases} y & \alpha = \alpha_j \\ x_\alpha & \alpha \neq \alpha_j \end{cases}$، داریم

$$\pi_{\alpha_j}(x) = y \quad \& \quad x \in \underbrace{B}_{= \bigcap_{i=1}^{n} \pi_{\alpha_i}^{-1}(G_{\alpha_i})} \left(\pi_{\alpha_i}(x) = \begin{cases} y & i = j \\ x_\alpha & i \neq j \end{cases} \in G_{\alpha_i} \text{ به ازای هر } 1 \le i \le n \right)$$

پس $y = \pi_{\alpha_j}(x) \in \pi_{\alpha_j}(B)$. □

قضیه. اگر (X_α, τ_α) خانواده‌ای از فضاهای هاسدورف باشد، آنگاه $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ نیز هاسدورف است.

برهان. قضیه را برای حالت $I=\{1,2\}$ ثابت می‌کنیم. پس فرض کنیم X_1 و X_2 هاسدورف باشند.
فرض کنیم (x_1,x_2) و (y_1,y_2) دو نقطه‌ی متمایز $X_1\times X_2$ باشد. پس اقلاً یکی از مؤلفه‌های آنها
متمایزند. ب. ا. ک. خ. ب. ک. م. و. فرض می‌کنیم $x_1\neq y_1$. چون X_1 هاسدورف است
پس مجموعه‌های باز $G_1 \ni x_1$ و $H_1 \ni y_1$ وجود دارند که $G_1\cap H_1=\emptyset$. در این صورت

باز در توپولوژی حاصلضربی

$$\pi_1^{-1}(G_1)\cap\pi_1^{-1}(H_1)=\pi_1^{-1}(G_1\cap H_1)=\pi_1^{-1}(\emptyset)=\emptyset \;. \square$$

$(x_1,x_2) \in \pi_1^{-1}(G_1)$, $(y_1,y_2) \in \pi_1^{-1}(H_1)$

$\pi_1(x_1,x_2)=x_1 \in G_1$

نتیجه: هاسدورف بودن خاصیت حاصلضربی دارد.

تعریف. اگر $\mathcal{B}_i$ پایه‌ای برای (X_i,τ_i) باشد، $i=1,2$، آنگاه

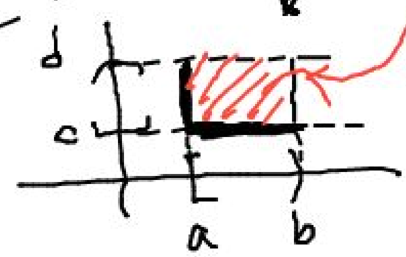
$$\mathcal{B}=\{B_1\times B_2 \mid B_1\in\mathcal{B}_1 \;\&\; B_2\in\mathcal{B}_2\}$$

پایه‌ای برای توپولوژی تیخونوف روی $X_1\times X_2$ است. به ویژه مستطیل‌های باز

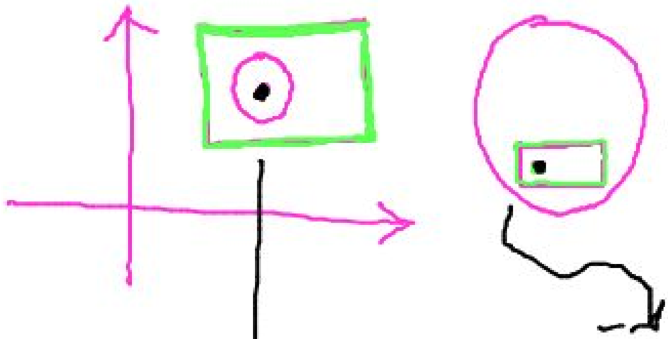
$$\mathcal{B}'=\{(a,b)\times(c,d) \mid a,b,c,d\in\mathbb{R}\}$$ پایه‌ای برای $\mathbb{R}^2$ است.

(اعضای پایه‌ی $\mathbb{R}$)

تعریف. $\mathcal{B}_\ell=\{[a,b)\times[c,d) \mid a,b,c,d\in\mathbb{R}\}$ پایه‌ای برای یک توپولوژی روی $\mathbb{R}^2$ است که به
توپولوژی صفحه‌ی چپ پایینی گویند که متفاوت با توپولوژی اقلیدسی (تیخونوف) است.



در واقع توپولوژی در تمرین بالا، همان توپولوژی اقلیدسی است. در واقع توپولوژی (حاصل) اقلیدسی
که از متر اقلیدسی به دست می‌آید عبارت است از $\mathcal{B}_e=\{N_{r_0}(x_0,y_0) \mid x_0,y_0\in\mathbb{R}, r_0>0\}$. پایه‌های $\mathcal{B}'$ و $\mathcal{B}_e$ معادلند به
این معنا که توپولوژی‌های حاصل از آنها مساویند.



در واقع هر عضو $\mathcal{B}_e$ به صورت اجتماعی از اعضای $\mathcal{B}$ است. پس هر عضو $\mathcal{B}_e$ یک عضو از توپولوژی تیخونوف (توپولوژی تولید شده توسط اعضای $\mathcal{B}$) است. پس

توپولوژی تیخونوف $\subseteq$ توپولوژی اقلیدسی

با استدلال مشابه: توپولوژی اقلیدسی $\subseteq$ توپولوژی تیخونوف

توپولوژی خارج قسمتی و توپولوژی همانندی

تعریف. فرض کنیم $(X_1, \mathcal{T}_1)$ یک فضای توپولوژیک، X_2 یک مجموعه باشد و $f: X_1 \to X_2$ تابعی پوشا. قوی‌ترین توپولوژی $\mathcal{T}_2$ روی X_2 که تحت آن تابع f پیوسته است، توپولوژی همانندی ([illegible]) می‌گویند. این توپولوژی عبارت است از $\mathcal{T}_2 = \{G \subseteq X_2 \mid f^{-1}(G) \in \mathcal{T}_1\}$.

توجه: اگر $\mathcal{T}$ توپولوژی دیگری روی X_2 باشد که تحت آن f پیوسته باشد، باید داشته باشیم $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_2$. زیرا فرض کنیم $H \in \mathcal{T}$. چون $f: (X_1, \mathcal{T}_1) \to (X_2, \mathcal{T})$ پیوسته است، پس باید $f^{-1}(H) \in \mathcal{T}_1$. لذا بنابر تعریف داریم $H \in \mathcal{T}_2$.

اینک به معرفی فضای خارج قسمتی می‌پردازیم:

یادآوری: فرض کنیم X یک مجموعه و E یک رابطه هم‌ارزی روی X باشد یعنی

$$\begin{cases} xEx \\ xEy \Rightarrow yEx \\ xEy \ \& \ yEz \Rightarrow xEz \end{cases}$$

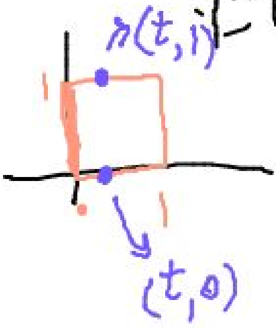
رده هم‌ارزی عنصر $x \in X$ به صورت زیر تعریف می‌شود: $[x] = \{y \in X \mid y E x\}$. مجموعه تمام رده‌های هم‌ارزی را با $\frac{X}{E}$ نمایش می‌دهیم و قرار می‌دهیم

$$\begin{cases} \theta: X \to \dfrac{X}{E} \\ x \mapsto [x] \end{cases}$$

حال فرض کنیم X یک توپولوژی τ داشته باشد. پس بنا به ساخت توپولوژی های تلفیقی می توان روی $\frac{X}{E}$ یک توپولوژی نهاد که تحت آن θ پیوسته شود. این توپولوژی را توپولوژی خارج قسمتی روی $\frac{X}{E}$ می نامند.

ایده فضای خارج قسمتی در این است که تمام نقاطی در X که در یک رده هم ارزی هستند، یکی انگاشته می شود.

مثال ۱) روی فضای $X=[0,1]\times[0,1]$ رابطه هم ارزی E را به صورت ذیل تعریف می کنیم:



$$\forall t\in[0,1];\quad (t,0)E(t,1)$$

و هر نقطه دیگر X را با خودش هم ارز قرار می دهیم.

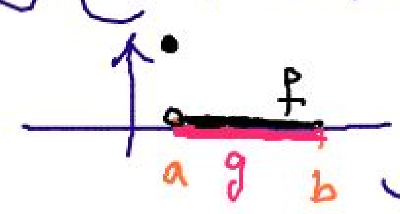
در این صورت $\frac{X}{E}$ با "استوانه" همسانریخت است.

مثال ۲) در مثال قبل، این تغییر را می دهیم که $\forall t\in[0,1];\ (t,0)E(1-t,1)$

در این صورت $\frac{X}{E}$ با "نوار موبیوس" همسانریخت است.

مثال. فرض کنید (X,ρ) یک فضای شبه متریک باشد یعنی ρ در همه خواص متر صدق می کند به جز $\rho(x,y)=0 \Rightarrow x=y$. به عنوان مثال

$$\begin{cases}\rho: R[a,b]\to\mathbb{R}\\ \rho(f,g)=\int_a^b |f(t)-g(t)|\,dt\end{cases}$$



$f(x)=\begin{cases}0 & a<x\le b\\ 1 & x=a\end{cases}$
$g=0$

یک شبه متر است.

$$xEy \Leftrightarrow \rho(x,y)=0$$

رابطه هم ارزی E را روی X به صورت ذیل تعریف می کنیم

آنگاه $\frac{X}{E}$ متریک پذیر است. در واقع $d([x],[y])=\rho(x,y)$ یک متر است زیرا اگر $d([x],[y])=0$ آنگاه $\rho(x,y)=0$. لذا xEy. پس $[x]=[y]$. توجه کنید d خوش تعریف است زیرا اگر $[x]=[x']$ ($\rho(x,x')=0$) و $[y]=[y']$ ($\rho(y,y')=0$) آنگاه $0\le|\rho(x,y)-\rho(x',y')|\le\underbrace{\rho(x,x')+\rho(y,y')}_{0}$ پس $\rho(x,y)=\rho(x',y')$.

Scanned by CamScanner

تعریف. نگاشت پوشای (سورژکتیو) $f:(X_1,\mathcal{T}_1)\to(X_2,\mathcal{T}_2)$ را یک همانندی می‌گویند هرگاه $\mathcal{T}_2$ توپولوژی همانندی (خارج قسمتی) باشد یعنی $\mathcal{T}_2$ قوی‌ترین توپولوژی روی X_2 باشد که تحت آن f پیوسته است یعنی

$$\mathcal{T}_2=\{G\subseteq X_2 \mid f^{-1}(G)\in\mathcal{T}_1\}$$

مثال) شرط لازم و کافی برای اینکه $i:(X,\mathcal{T}_1)\to(X,\mathcal{T}_2)$ همانندی باشد آن است که $\mathcal{T}_1=\mathcal{T}_2$ باشد.

بر: اولاً ـ برای اینکه i پیوسته باشد، $\forall G\in\mathcal{T}_2;\ i^{-1}(G)\in\mathcal{T}_1$ یعنی $\mathcal{T}_2\subseteq\mathcal{T}_1$.

ثانیاً ـ برای اینکه i همانندی باشد باید $\mathcal{T}_2=\{G\subseteq X \mid \underbrace{i^{-1}(G)}_{G}\in\mathcal{T}_1\}=\mathcal{T}_1$

تمرین. یک تابع پیوسته، پوشا و باز (بسته) مانند $f:X_1\to X_2$، همانندی است.

قضیه. فرض کنید $f:(X_1,\mathcal{T}_1)\to(X_2,\mathcal{T}_2)$ تابعی پیوسته و پوشا باشد. در این صورت شرط لازم و کافی برای اینکه f همانندی باشد آن است که به ازای هر فضای توپولوژیک $(X_3,\mathcal{T}_3)$ و هر تابع $g:(X_2,\mathcal{T}_2)\to(X_3,\mathcal{T}_3)$، پیوستگی $g\circ f$، پیوستگی g را نتیجه دهد.

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r, "f", "\text{پیوسته و پوشا}"'] \arrow[dr, dashed, "g\circ f"'] & X_2 \arrow[d, "g"] \\
 & X_3
\end{tikzcd}$$

$(g\circ f)^{-1}(G_3)$ ، G_3

برهان. ($\Leftarrow$) گیریم f همانندی باشد. فرض کنیم X_3 یک فضای دلخواه و $g:X_2\to X_3$ تابعی باشد که $g\circ f$ پیوسته است. فرض کنیم G_3 در X_3 باز باشد. بنا به پیوستگی $g\circ f$ داریم:

$$\mathcal{T}_1\ni(g\circ f)^{-1}(G_3)=f^{-1}(g^{-1}(G_3))$$

پس $g^{-1}(G_3)$ باز است. لذا g پیوسته است.

$$\begin{tikzcd}
(X_1,\mathcal{T}_1) \arrow[r, "f"] \arrow[dr, dotted, "i\circ f=f"'] & (X_2,\mathcal{T}_2) \arrow[d, "i"] \\
 & (X_2,\mathcal{T}_q)
\end{tikzcd}$$

($\Rightarrow$) فرض کنیم $(X_3,\mathcal{T}_3)=(X_2,\mathcal{T}_q)$ و $g=i$. بنا به تعریف توپولوژی خارج قسمتی، $i\circ f=f$ پیوسته است. بنا به فرض قضیه ما، i پیوسته است، پس بنا به مثال بالا، $\mathcal{T}_q\subseteq\mathcal{T}_2$. از طرفی بنا به فرض $(X_1,\mathcal{T}_1)\xrightarrow{f}(X_2,\mathcal{T}_2)$ پیوسته است، پس بنا به تعریف $\mathcal{T}_q$، $\mathcal{T}_2\subseteq\mathcal{T}_q$!

$\mathcal{T}_q=\mathcal{T}_2$

Scanned by CamScanner

تعریف. فضای توپولوژیک $(X,\mathcal{T})$ را شمارای دوم می‌گویند هرگاه $\mathcal{T}$ دارای یک پایه شمارا باشد.

مثال) $(\mathbb{R},\mathcal{T}_e)$ شمارای دوم است زیرا $\mathcal{B}=\{(r-\frac{1}{n},r+\frac{1}{n})\mid r\in\mathbb{Q}, n\in\mathbb{N}\}$ یک پایه شمارا است.

فرض کنیم $G\in\mathcal{T}_e$، $x\in G$. می‌خواهیم نشان دهیم G در فضای متریک $\mathbb{R}$ باز است پس $\exists\varepsilon;\ N_\varepsilon(x)\subseteq G$

G در $\mathcal{T}_e$ باز است

$\forall x\in G\ \exists B\in\mathcal{B}:\ x\in B\subseteq G$

بنابه خاصیت ارشمیدسی اعداد حقیقی، $\exists N;\ \frac{1}{N}<\varepsilon$ پس $N_{\frac{1}{N}}(x)\subseteq N_\varepsilon(x)\subseteq G$. بنابه چگال بودن $\mathbb{Q}$ در $\mathbb{R}$، $\exists r\in\mathbb{Q};\ r\in N_{\frac{1}{4N}}(x)$. ادعا می‌کنیم که $x\in(r-\frac{1}{4N},r+\frac{1}{4N})\subseteq N_{\frac{1}{N}}(x)\subseteq G$

$$|x-r|<\frac{1}{4N}\Rightarrow x\in(r-\frac{1}{4N},r+\frac{1}{4N})$$

$$s\in(r-\frac{1}{4N},r+\frac{1}{4N})\Rightarrow|s-r|<\frac{1}{4N}\Rightarrow|s-x|\le|s-r|+|r-x|<\frac{1}{4N}+\frac{1}{4N}=\frac{1}{2N}<\frac{1}{N}$$
$$\Rightarrow s\in N_{\frac{1}{N}}(x).$$

مثال) $\mathbb{R}$ با توپولوژی گسسته شمارای دوم نیست زیرا اگر $\mathcal{B}$ یک پایه $\mathbb{R}$ باشد آنگاه باید به ازای هر $a\in\mathbb{R}$، $\{a\}\in\mathcal{B}$. لذا تابع
$$f:\mathbb{R}\to\mathcal{B},\quad a\mapsto\{a\}$$
یک به یک است. بنابراین $\aleph_0\neq c=\operatorname{Card}\mathbb{R}\le\operatorname{Card}\mathcal{B}$. لذا $\mathcal{B}$ شمارا نمی‌تواند باشد. لذا $\mathbb{R}$ پایه شمارا نمی‌تواند داشته باشد.

تعریف. فرض کنید $(X,\mathcal{T})$ یک فضای توپولوژیک باشد و $x\in X$. خانواده $\mathcal{B}_x$ از اعضای $\mathcal{T}$ را که شامل x هستند یک پایه موضعی در x می‌گوییم هرگاه $\forall x\in G\in\mathcal{T}\ \exists B\in\mathcal{B}_x;\ x\in B\subseteq G$

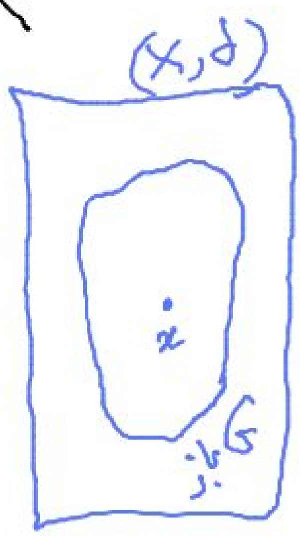
مثال) فرض کنیم به ازای $x\in X$، $\mathcal{B}_x=\{G\in\mathcal{T}\mid x\in G\}$. به وضوح $\mathcal{B}_x$ یک پایه موضعی در x است.

تعریف: $(X,\mathcal{T})$ را شمارای اول گوییم هرگاه هر نقطه‌اش پایه موضعی شمارا داشته باشد.

Scanned by CamScanner

جلسه ۲۱

یادآوری می‌کنیم فضای $(X,\mathcal{G})$ شمارا اول نامیده می‌شود هرگاه هر نقطهٔ X دارای پایهٔ موضعی شمارا باشد.



مثال) هر فضای متریک (X,d) شمارا اول است زیرا برای هر $x\in X$،

$$\mathcal{B}_x=\{N_{\frac{1}{n}}(x)\mid n\in\mathbb{N}\}$$

پایه‌ای موضعی و شمارا در x است.

فرض کنیم G باز، $x\in G$. بنا به تعریف نقطهٔ درونی $\exists s;\ N_s(x)\subseteq G$

بنا به خاصیت ارشمیدسی اعداد حقیقی، $\exists N;\ \frac{1}{N}<s$ پس $x\in N_{\frac{1}{N}}(x)\subseteq N_s(x)\subseteq G$.

$N_{\frac{1}{N}}(x)\in\mathcal{B}_x$

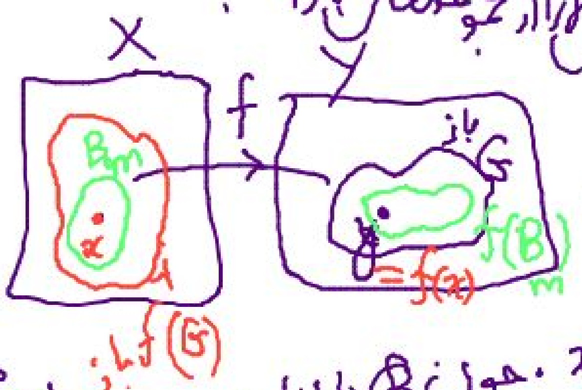
قضیه. خواص شمارا اول و شمارا دوم، خواص توپولوژیکی اند.

برهان. فرض کنیم $(X,\mathcal{G})$ شمارا دوم باشد و $f:X\to Y$ یک همسانریختی باشد. چون f

X دارای پایهٔ شمارایی مانند $\mathcal{B}=\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ دارد.

تابعی باز است، گردایهٔ $\mathcal{B}'=\{f(B_n)\mid n=1,2,\dots\}$ شمارا از مجموعه‌های باز است.

نشان می‌دهیم $\mathcal{B}'$ پایه‌ای برای توپولوژی روی Y است:



فرض کنیم $y\in G$ و G در Y باز باشد. چون f پوشاست $x\in X$ ای وجود دارد که $y=f(x)$. ضمناً $x\in f^{-1}(G)\in\mathcal{G}$ (پیوسته بودن f). چون $\mathcal{B}$ پایه‌ای برای $\mathcal{G}$ است، $\exists m;\ x\in B_m\subseteq f^{-1}(G)$ پس

$$y=f(x)\in \underbrace{f(B_m)}_{\text{باز زیرا f باز است}}\subseteq f(f^{-1}(G))\subseteq G \quad \square$$

(پوشا بودن f)

Scanned by CamScanner

قضیه. اگر به ازای هر n، $(X_n,\mathcal{T}_n)$ شمارای اول باشد، آنگاه $\prod_{n=1}^{\infty}(X_n,\mathcal{T}_n)$ شمارای اول است.

برهان. فرض کنیم $x\in\prod_{n=1}^{\infty}(X_n,\mathcal{T}_n)$ $\left(x=(x_n)\right)$. چون $(X_n,\mathcal{T}_n)$ شمارای اول است $x_n\in X_n$ دارای پایه موضعی شمارایی مانند $\mathcal{B}_{x_n}=\{B_j^n \mid n,j\in\mathbb{N}\}$ است. قرار می‌دهیم

$$\pi_n:\prod_{m=1}^{\infty}(X_m,\mathcal{T}_m)\to(X_n,\mathcal{T}_n)$$

$$x\longmapsto x_n$$ که

$$\mathcal{B}_x=\left\{\bigcap_{i=1}^{k}\pi_{n_i}^{-1}(B_j^{n_i}) \;\middle|\; j=1,2,\dots,\ n_i=1,2,\dots,\ k=1,2,\dots\right\}$$

اولاً $\mathcal{B}_x$ شمارا است زیرا $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ شمارا است و گردایه اشتراک‌های متناهی یک خانواده شمارا از مجموعه‌ها، شمارا است.

ثانیاً $x\in\pi_{n_i}^{-1}(B_j^{n_i})$ زیرا $\pi_{n_i}(x)=x_{n_i}\in B_j^{n_i}$ که عنصر پایه موضعی در x_{n_i}. لذا $x\in\bigcap_{i=1}^{k}\pi_{n_i}^{-1}(B_j^{n_i})$.

ثالثاً - اگر $x\in G$ و G در توپولوژی تیخونوف باز باشد. بنابر تعریف توپولوژی تیخونوف

$$\exists n_1,\dots,n_k\ \exists G_{n_1},\dots,G_{n_k};\quad x\in\bigcap_{i=1}^{k}\pi_{n_i}^{-1}(G_{n_i})\subseteq G.$$

به ازای هر $1\le j\le k$، $x_{n_j}=\pi_{n_j}(x)\in G_{n_j}$. پس $B^{n_j}\in\mathcal{B}_{x_{n_j}}$ وجود دارد که $x_{n_j}\in B^{n_j}\subseteq G_{n_j}$. لذا

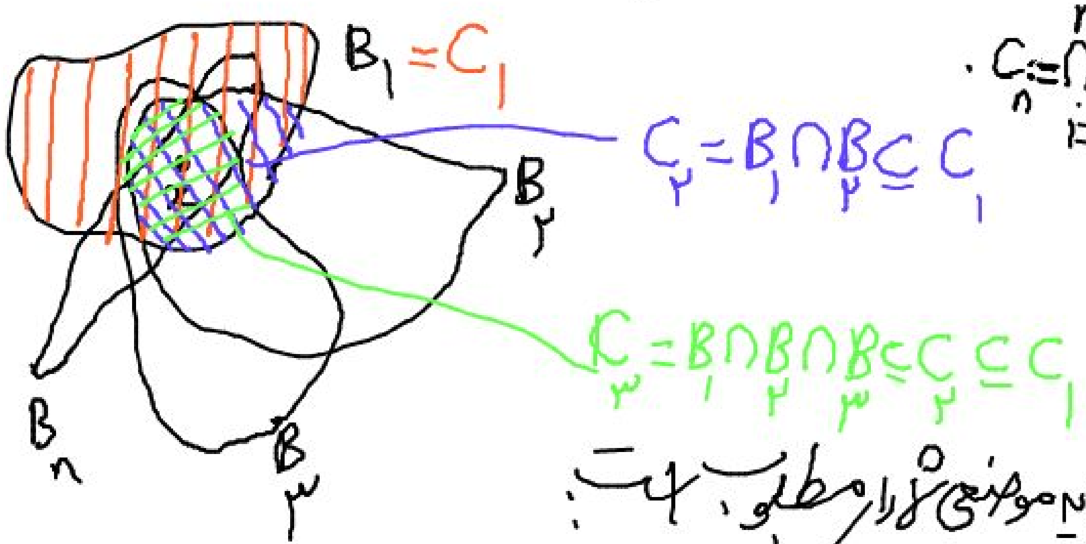
$$x\in\underbrace{\bigcap_{j=1}^{k}\pi_{n_j}^{-1}(B^{n_j})}_{\text{یک عنصر پایه موضعی در } x}\subseteq\bigcap_{j=1}^{k}\pi_{n_j}^{-1}(G_{n_j})\subseteq G.\ \square$$

تمرین. نشان دهید قضیه بالا با شمارای دوم به جای شمارای اول برقرار است.

قضیه. اگر $(X,\mathcal{T})$ شمارای اول باشد، آنگاه هر $x\in X$ پایه موضعی شمارایی مانند $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ دارد به طوری که $\forall n;\ C_{n+1}\subseteq C_n$.

Scanned by CamScanner

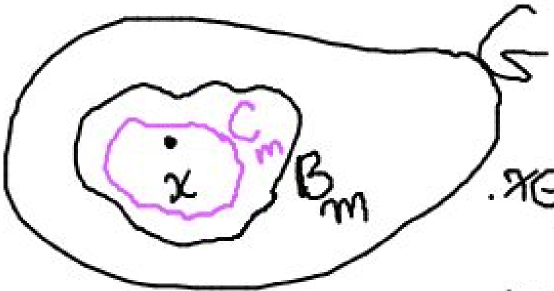
برهان. چون $(X,\mathcal{G})$ شمارای اول است، $x\in X$، پس x پایه موضعی شمارایی مانند $\{B_n \mid n=1,2,\dots\}$ دارد. قرار می‌دهیم $C_n=\bigcap_{i=1}^{n} B_i$.



ادعا می‌کنیم که $\{C_n\}$ پایه موضعی شمارای مطلوب است:

اولاً — $\{C_n\}$ شمارا است و $x\in C_n=\bigcap_{i=1}^{n}B_i$ زیرا $\forall 1\le i\le n;\ x\in B_i$

ثانیاً — $C_{n+1}\subseteq C_n$

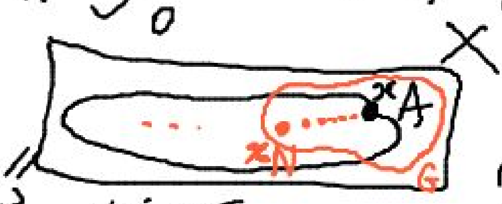


ثالثاً — اگر $x\in G\in\mathcal{G}$، B_m هست که $x\in B_m\subseteq G$.

بنا به تعریف C_m، $x\in C_m=\bigcap_{i=1}^{m}B_i\subseteq B_m\subseteq G$، □

قضیه. فرض کنید $(X,\mathcal{G})$ شمارای اول باشد، $A\subseteq X$، $x\in X$. در این صورت $x\in\bar{A}$ اگر و فقط اگر دنباله‌ای مانند $\{x_n\}$ در A موجود باشد که $x_n\to x$.

برهان. ($\Rightarrow$) فرض کنیم $x\in G\in\mathcal{G}$. بنا به تعریف حد دنباله، $\exists N\ \forall n\ge N;\ x_n\in G$. پس $x_N\in G\cap A$. پس $G\cap A\neq\emptyset$.



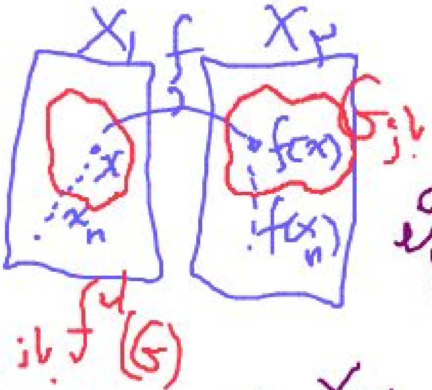
($\Leftarrow$) فرض کنیم $x\in\bar{A}$. گیریم $\{B_n\}$ پایه موضعی شمارا در x باشد که بنا به لم قبل می‌توان آن را طوری انتخاب کرد که $B_{n+1}\subseteq B_n$. چون B_nها بازند و $x\in B_n$، پس بنا به تعریف نقطه چسبندگی $A\cap B_n\neq\emptyset$. فرض کنیم $x_n\in A\cap B_n$. ادعا می‌کنیم که $x_n\to x$:

فرض کنیم $x\in G\in\mathcal{G}$. چون $\{B_n\}$ پایه موضعی در x است، پس m وجود دارد که $x\in B_m\subseteq G$. لذا

بنا به ساختار تودرتوی B_nها، $\forall n\ge m;\ B_n\subseteq B_m\subseteq G$ پس $\forall n\ge m;\ x_n\in B_n\subseteq G$. □

Scanned by CamScanner

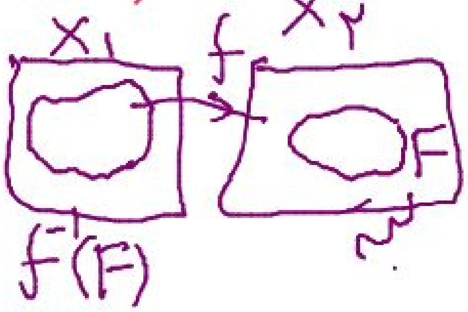
قضیه. فرض کنید $(X_1,\mathcal{T}_1)$ شمارا اول باشد و $f:(X_1,\mathcal{T}_1)\to(X_2,\mathcal{T}_2)$ تابعی باشد که اگر $x_n\to x$، $f(x_n)\to f(x)$. در این صورت f پیوسته است.



تبصره. اگر f پیوسته باشد و $x_n\to x$، آنگاه $f(x_n)\to f(x)$.

برهان. می‌دانیم پیوستگی f معادل این است که تصویر معکوس بسته، بسته باشد.

گیریم F بسته باشد. به وضوح $f^{-1}(F)\subseteq\overline{f^{-1}(F)}$. فرض کنیم $x\in\overline{f^{-1}(F)}$. چون X_1 شمارا اول است، بنا به قضیه ...



$\overline{f^{-1}(F)}\subseteq X_1$

$$\exists\{x_n\},\ x_n\in f^{-1}(F),\ x_n\to x$$

بنا به فرض قضیه، $f(x_n)\to f(x)$، $F\ni f(x_n)$. اما F بسته است، پس $f(x)\in\overline{F}=F$. بنابراین $x\in f^{-1}(F)$. پس $\overline{f^{-1}(F)}\subseteq f^{-1}(F)$. بدین ترتیب $f^{-1}(F)$ بسته است. □

تعریف. فضای توپولوژی $(X,\mathcal{T})$ را تفکیک‌پذیر (جدایی‌پذیر) گوییم هرگاه X دارای یک زیرمجموعه چگال شمارا باشد.

مثال) $\mathbb{R}$ تفکیک‌پذیر است زیرا $\mathbb{Q}$ در $\mathbb{R}$ چگال است و شمارا است.

مثال) فضای گسسته $\mathbb{R}$ تفکیک‌پذیر نیست زیرا تنها زیرمجموعه چگالش $\mathbb{R}$ است که ناشمارا است.

♣ **لم.** اگر $(X,\mathcal{T})$ فضای توپولوژی دلخواهی باشد، $A\subseteq X$ در X چگال است هرگاه هر مجموعه باز ناتهی در X، A را قطع کند.

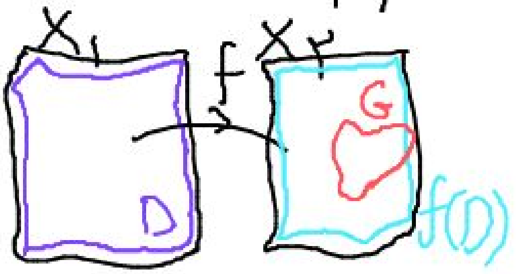
$\overline{A}=X$

برهان. (⇒) فرض کنیم $x\in X$. گیریم $x\in G\in\mathcal{T}$. پس G ناتهی است. پس بنا به فرض $G\cap A\neq\emptyset$. لذا $x\in\overline{A}$. ////

(⇐) گیریم $\emptyset\neq G\in\mathcal{T}$. پس $x_0\in G$ وجود دارد. چون $\overline{A}=X$ پس $x_0\in\overline{A}$. چون $x_0\in G\in\mathcal{T}$، لذا $G\cap A\neq\emptyset$. □

Scanned by CamScanner

قضیه. اگر $f:(X_1,\mathcal{T}_1)\to(X_2,\mathcal{T}_2)$ تابعی پیوسته و برو باشد و $(X_1,\mathcal{T}_1)$ تفکیک‌پذیر باشد، آنگاه $(X_2,\mathcal{T}_2)$ نیز تفکیک‌پذیر است.



برهان. فرض کنیم $\overline{D}=X_1$، D شمارا باشد. اولاً

$D=\{x_1,x_2,x_3,\dots\}$

$f(D)=\{f(x_1),f(x_2),\dots\}$

شماراست. ثانیاً ادعا می‌کنیم که $\overline{f(D)}=X_2$. لم ♣ را به کار می‌بریم. گیریم $\emptyset\neq G\in\mathcal{T}_2$،

چون f پیوسته است، $f^{-1}(G)\in\mathcal{T}_1$. همچنین چون $G\neq\emptyset$ پس $y\in G$ وجود دارد. چون f پوشاست،

پس $x\in X_1$ی وجود دارد که $y=f(x)$. پس $f(x)\in G$. لذا $x\in f^{-1}(G)$. پس $f^{-1}(G)\neq\emptyset$.

$f^{-1}(G)=\emptyset\Rightarrow f(f^{-1}(G))=f(\emptyset)=\emptyset\Rightarrow G=\emptyset$ ✗

بنابر پوشا بودن f

بنابر چگال بودن D در X_1، داریم

$f^{-1}(G)\cap D\neq\emptyset$

پس $z\in f^{-1}(G)\cap D$ وجود دارد. بنابراین $f(z)\in G\cap f(D)$ پس $G\cap f(D)\neq\emptyset$. پس $f(D)$ در X_2 چگال است.

نکته. چنین نیست که هر زیرفضای یک فضای تفکیک‌پذیر، تفکیک‌پذیر باشد. (چرا؟)

تمرین. هر فضای توپولوژی شمارا X تفکیک‌پذیر است. **حل.** $\overline{X}=X$ و X شماراست.

قضیه. هر زیرفضای باز یک فضای تفکیک‌پذیر، تفکیک‌پذیر است.

مبنا توپولوژی را زیرنویس بخوانید: همه چیز را بخوانید

شمارا یعنی متناهی یا شمارای نامتناهی

برهان. فرض کنیم $(X,\mathcal{T})$ تفکیک‌پذیر باشد، زیرمجموعه چگال شمارا $D=\{x_1,x_2,\dots\}$ باشد و $A\subset X$ باز باشد. اولاً زیرمجموعه‌های مجموعه‌های شمارا، شمارا هستند. پس $A\cap D$ شماراست.

$A\cap D=\{x_{n_1},x_{n_2},\dots\}$ (و n_i کوچکترین اندیس)

که $x_{n_i}\in A\cap D-\{x_{n_1},\dots,x_{n_{i-1}}\}$

ثانیاً — فرض کنیم $A\cap G$ که $G\in\mathcal{G}$ یک زیرمجموعهٔ باز ناتهی از $(A,\mathcal{G}|A)$ باشد.

$$(A\cap G)\cap(A\cap D)=\underbrace{(A\cap G)}_{\text{در } X \text{ باز است زیرا } A \text{ و } G \text{ بازند}}\cap D\neq\emptyset$$

به خاطر چگال بودن D در X

پس بنا به لم (♣)، $A\cap D$ در A چگال است. □

قضیه. هر فضای شمارای دوم، تفکیک‌پذیر است.

برهان. فرض کنیم $\mathcal{B}=\{B_n\}_{n=1,2,\dots}$ پایهٔ شمارایی برای $(X,\mathcal{G})$ باشد. به ازای هر n، $x_n\in B_n$ را می‌گیریم. قرار می‌دهیم $D=\{x_1,x_2,\dots\}$. به‌وضوح D شماراست. نشان می‌دهیم $\bar{D}=X$: فرض کنیم $\emptyset\neq G\in\mathcal{G}$. چون G ناتهی است، $y\in G$ وجود دارد. چون $\mathcal{B}$ پایه است، m هست که $y\in B_m\subseteq G$. پس $x_m\in B_m\subseteq G$. لذا $x_m\in D\cap G$ پس $D\cap G\neq\emptyset$. □

قضیه. هر فضای متری تفکیک‌پذیر، شمارای دوم است.

برهان. فرض کنیم $D=\{x_1,x_2,\dots\}$ زیرمجموعهٔ چگال شمارای فضای متری (X,d) باشد. قرار می‌دهیم

$$\mathcal{B}=\{N_r(x_n)\mid n\in\mathbb{N},\ r\in\mathbb{Q}\}$$

اولاً — $\mathcal{B}\simeq\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ (r و n)، پس $\mathcal{B}$ شماراست.

ثانیاً — $\mathcal{B}$ پایهٔ فضای X است:

فرض کنیم $x\in G\in\mathcal{G}$. چون G باز است، عدد حقیقی مثبت s وجود دارد که $N_s(x)\subseteq G$. اگر r عدد گویایی باشد که $0<r<s$، آنگاه $N_r(x)\subseteq N_s(x)\subseteq G$.

چون $N_{\frac{r}{2}}(x)$ باز است و D در X چگال است پس $\exists x_m\in D;\ x\in N_{\frac{r}{2}}(x_m)$.

ادعا می‌کنیم که $x\in N_{\frac{r}{2}}(x_m)\subseteq G$ و لذا عضو $N_{\frac{r}{2}}(x_m)$ از $\mathcal{B}$ با خواص خواسته شده پیدا می‌شود.

$$d(x,x_m)<\frac{r}{2}$$

$$y\in N_{\frac{r}{2}}(x_m)\Rightarrow d(y,x_m)<\frac{r}{2}\Rightarrow d(y,x)\le d(y,x_m)+d(x_m,x)<\frac{r}{2}+\frac{r}{2}=r$$
$$\Longrightarrow y\in N_r(x)\ (\subseteq G)\Rightarrow y\in G.\ \square$$

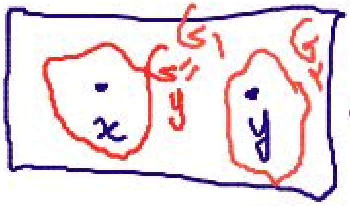
Scanned by CamScanner

تمرین ۱. ثابت کنید چهار شرط زیر معادلند:

۱) $(X,\mathcal{G})$ هاسدورف است ۲) $\forall x\in X\ \forall y\neq x\ \exists\, {}_{x}G_y\in\mathcal{G};\ y\notin\overline{G_y}$

۳) $\bigcap_{x\in G\in\mathcal{G}}\overline{G}=\{x\}$ ۴) قطر مجموعه $\Delta=\{(x,x)\mid x\in X\}$ در $X\times X$ با توپولوژی تیخونوف بسته است.

حل. $(1)\Rightarrow(2)$. فرض کنیم $x,y\in X$ و $x\neq y$. بنابه هاسدورف بودن، دو مجموعه‌ی باز G_1 و G_2 وجود دارد که $G_1\cap G_2=\emptyset$، $x\in G_1$، $y\in G_2$. قرار می‌دهیم $G_y=G_1$.



ادعا می‌کنیم: $y\notin\overline{G_y}$: چون همسایگی باز G_2، G_y را قطع نمی‌کند، پس $y\notin\overline{G_y}$. ////

$(2)\Rightarrow(3)$ اولاً، برای هر G، $x\in G\Rightarrow x\in\overline{G}$ ولذا $x\in\bigcap_{x\in G\in\mathcal{G}}\overline{G}$. لذا $\{x\}\subseteq\bigcap_{x\in G\in\mathcal{G}}\overline{G}$.

گیریم $y\in\bigcap_{x\in G\in\mathcal{G}}\overline{G}$. ادعا می‌کنیم $y\in\{x\}$. فرض کنیم چنین نباشد یعنی $y\neq x$. بنابه (۲)، مجموعه‌ی باز G_y وجود دارد که $x\in G_y$، $y\notin\overline{G_y}$. اما $y\in\bigcap\{\overline{G}\mid x\in G\in\mathcal{G}\}$ پس $y\in\overline{G_y}$. تخ. نتیجه اینکه

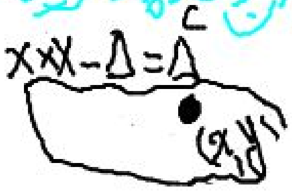
$\bigcap_{x\in G\in\mathcal{G}}\overline{G}\subseteq\{x\}$ ////

$(3)\Rightarrow(4)$ نشان می‌دهیم $X\times X-\Delta$ باز است. گیریم (x,y) نقطه‌ای از این مجموعه باشد. پس $x\neq y$.

لذا $y\notin\{x\}\overset{(3)}{=}\bigcap_{x\in G\in\mathcal{G}}\overline{G}$ پس G ی باز $x\in G\in\mathcal{G}$ وجود دارد به طوری که $y\notin\overline{G}$. پس مجموعه‌ی باز H وجود دارد که $y\in H$، $H\cap G=\emptyset$. پس $(x,y)\in G\times H$، $G\times H$ در توپولوژی تیخونوف باز است و ضمناً //

$G\times H\subseteq X\times X-\Delta$ زیرا $(z,w)\in G\times H\Rightarrow z\in G,\ w\in H\xRightarrow[G\cap H=\emptyset]{} z\neq w\Rightarrow(z,w)\notin\Delta$

$(4)\Rightarrow(1)$. فرض کنیم Δ بسته باشد. گیریم $x,y\in X$، $x\neq y$. پس $(x,y)\notin\Delta$. پس (x,y) نقطه‌ای از مجموعه‌ی باز $X\times X-\Delta=\Delta^c$ است. اگر $\mathcal{B}$ پایه‌ای برای $(X,\mathcal{G})$ باشد، $\{B_1\times B_2\mid B_1,B_2\in\mathcal{B}\}$ پایه‌ای برای توپولوژی تیخونوف است. بنابراین $\exists B_1,B_2\in\mathcal{B};\ (x,y)\in B_1\times B_2\subseteq\Delta^c$. اولاً $B_1\cap B_2=\emptyset$ ثانیاً $x\in B_1$، $y\in B_2$. پس فضای X هاسدورف است. □



فصل جداسازی - بخش سوم

تعریف. فضای $(X,\mathcal{J})$ را منظم گوییم هرگاه $\forall x\ \forall F_{\not\ni x}\ \exists G_1,G_2\in\mathcal{J};\ x\in G_1,\ F\subseteq G_2,\ G_1\cap G_2=\emptyset$

فضایی که T_1، منظم باشد را T_3 می‌نامند.

مثال) فضای گسسته منظم اند. $\forall x\ \forall F_{\not\ni x};\ G_1:=\{x\},\ G_2=F$

مثال) حالت $\mathcal{J}=\{(a,b)\mid a,b\in\mathbb{R}\}\cup\{\mathbb{Q}\}$ زیرپایه برای یک توپولوژی روی $\mathbb{R}$ است. چون $\{(a,b)\mid a,b\in\mathbb{R}\}$ پایهٔ توپولوژی اقلیدسی $\mathcal{J}_e$ است، پس $\mathcal{J}_e\subseteq\mathcal{J}$ (ظریف‌تر از $\mathcal{J}_e$)

هاسدورف است پس وقتی هر دو نقطهٔ $\mathbb{R}$ توسط دو مجموعه باز در $\mathcal{J}_e$ از هم جدا شوند توسط همان مجموعه به عنوان اعضای $\mathcal{J}$ از هم جدا می‌شوند.

توپولوژی $\mathcal{J}_e$ منظم است (هر فضای متریک T_5 است پس منظم است) ولی $\mathcal{J}$ منظم نیست.

برای دیدن این مطلب، قرار دهید $x=1$ و $F=\mathbb{R}-\mathbb{Q}$. توجه کنید که $\mathbb{Q}\in\mathcal{J}$ پس F بسته است

و ضمناً $x\notin F$. اما x و F را نمی‌توان توسط دو مجموعه باز جدا از هم، از هم جدا کرد زیرا اگر

$x\in G_1,\ F\subseteq G_2$ آنگاه (همهٔ اعداد اصم در G_2 اند) $G_1\cap G_2$ نمی‌تواند تهی باشد.

قضیه. شرط لازم و کافی برای اینکه $(X,\mathcal{J})$ منظم باشد این است که

$$\forall x\ \forall G_{\ni x}\in\mathcal{J}\ \exists H\in\mathcal{J};\quad x\in H\subseteq\overline{H}\subseteq G$$

برهان. $(\Leftarrow)$ فرض کنیم $x\in G\in\mathcal{J}$. در این صورت

$x\notin G^c$ بسته بنابه فرض منظم بودن فضا

$$\exists G_1\in\mathcal{J}\ \exists G_2\in\mathcal{J};\ G_1\cap G_2=\emptyset,\ x\in G_1,\ G^c\subseteq G_2$$

قرار می‌دهیم $H=G_1$. در این صورت $\boxed{x\in H}$ و

$$\boxed{\overline{H}}=\overline{G_1}\subseteq\overline{G_2^c}=G_2^c\subseteq G^{cc}\boxed{=G}$$

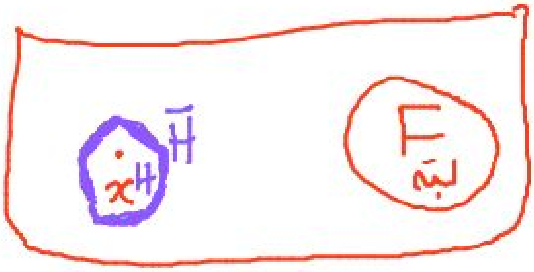
بسته

$G_1\cap G_2=\emptyset$

(⇒) فرض کنیم F بسته باشد و $x\notin F$. چون $x\in F^c =: G$، بنا به فرض قضیه، $\exists H\in\mathcal{T};\ x\in H\subseteq \bar{H}\subseteq F^c$

قرار می‌دهیم $G_1 = H\in\mathcal{T}$, $G_2 = \bar{H}^c\in\mathcal{T}$. (چون $H\subseteq\bar{H}$)

پس $\underbrace{H}_{G_1}\cap\underbrace{\bar{H}^c}_{G_2}=\emptyset$. ضمناً $x\in G_1$, $F\subseteq G_2$. □



تعریف. فضای $(X,\mathcal{T})$ را به طور کامل منظم می‌گوییم هرگاه به ازای هر مجموعهٔ بستهٔ F، و هر نقطهٔ $x\notin F$ تابع پیوستهٔ $f:(X,\mathcal{T})\to([0,1],\mathcal{T}_e|[0,1])$ وجود داشته باشد که $f(x)=0$ ، $f(F)=\{1\}$.

هر فضای به طور کامل منظم و T_1 را $T_{\frac{7}{2}}$ می‌گویند. (تیخونوف)

$$\boxed{T_0 \supsetneq T_1 \supsetneq T_2 \supsetneq \cdots}$$

قضیه. هر فضای $T_{\frac{7}{2}}$ ، T_3 است.

برهان. فرض کنیم $(X,\mathcal{T})$ فضای $T_{\frac{7}{2}}$ باشد. پس به طور کامل منظم و T_1 است. برای اینکه ثابت کنیم $(X,\mathcal{T})$ منظم است، کافی است ثابت کنیم... گیریم F بسته باشد و $x\notin F$. بنا به طور کامل منظم بودن، وجود دارد تابع

$$f:(X,\mathcal{T})\to([0,1],\mathcal{T}_e|[0,1])$$

به طوری که $f(F)=\{1\}$, $f(x)=0$

چه چیزهایی را باید بدانیم (کنار چیزهای دیگر):

۱_ $T_i \supseteq T_{i+1}$ یا $T_{i+\frac{1}{2}}$

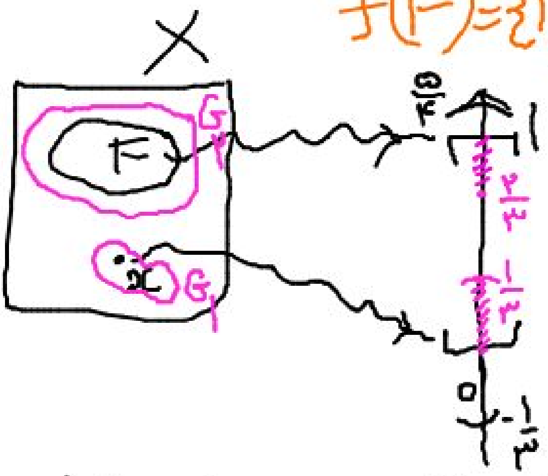
۲_ مثالی از فضای T_i که T_{i+1} نباشد.

۳_ خاصیت توپولوژی دارد یا ندارد

۴_ " موروثی " "

۵_ " حاصلضربی " " "

۶_ فضای متریک خاصیت T_i را دارد. $i\le 5$



قرار می‌دهیم

$G_1 := f^{-1}([0,\frac{1}{3}))$, $[0,\frac{1}{3}) = (-\frac{1}{3},\frac{1}{3})\cap[0,1]\in\mathcal{T}_e|[0,1]$

$G_2 := f^{-1}((\frac{2}{3},1])$ $(\frac{2}{3},1] = (\frac{2}{3},\frac{5}{4})\cap[0,1]\in$ //

در این صورت $G_1\cap G_2=\emptyset$, $x\in G_1$ (زیرا $f(x)\in[0,\frac{1}{3})$) , $F\subseteq G_2$ زیرا

$\cdot\ y\in F\Rightarrow f(y)=1\in(\frac{2}{3},1]\Rightarrow y\in G_2$ □

Scanned by CamScanner

تعریف. فضای توپولوژیک $(X,\mathcal{J})$ را نرمال می‌گوییم هرگاه هر دو مجموعهٔ بستهٔ مجزا را بتوان توسط دو مجموعهٔ باز جدا از هم، از هم جدا کرد. اگر فضای نرمال، T_1 هم باشد، آن را T_4 می‌گوییم.

قضیه. شرط لازم و کافی برای این که فضای $(X,\mathcal{J})$ نرمال باشد آن است که

$$\forall \underset{\text{بسته}}{F}\ \forall \underset{\text{باز}}{G};\ F\subseteq G \Rightarrow \exists H\in\mathcal{J};\ F\subseteq H\subseteq \bar{H}\subseteq G$$

برهان. $(\Leftarrow)$ فرض کنیم $\underset{\text{بسته}}{F}\subseteq \underset{\text{باز}}{G}$. گیریم $F_1=F$ و $F_2=G^c$. بنابر نرمال بودن فضا،

$$\exists G_1,G_2\in\mathcal{J};\ F_1\subseteq G_1,\ F_2\subseteq G_2,\ G_1\cap G_2=\emptyset$$

قرار می‌دهیم $H=G_1$. در این صورت $F\subseteq H$ و $\bar{H}=\bar{G_1}\subseteq \overline{G_2^c}=G_2^c\subseteq F_2^c=G$. ///

$(\Rightarrow)$ فرض کنیم F_1 و F_2 دو مجموعهٔ بستهٔ جدا از هم باشند. پس $\underset{\text{بسته}}{F_1}\subseteq \underset{\text{باز}}{F_2^c}$. بنابر فرض قضیه،

$$\exists H\in\mathcal{J};\ F_1\subseteq H\subseteq \bar{H}\subseteq F_2^c$$

قرار می‌دهیم $G_1=H$ و $G_2=\bar{H}^c$. در این صورت G_1 و G_2 بازند، جدا از همند و

$$F_1\subseteq G_1,\ F_2=F_2^{cc}\subseteq \bar{H}^c=G_2\ .\ \square$$

Scanned by CamScanner

فشردگی

تعریف: فضای توپولوژی $(X,\mathfrak{T})$ را فشرده می‌گویند هرگاه هر پوشش باز آن دارای زیرپوشش متناهی باشد. یادآوری می‌کنیم که خانواده $\{G_\alpha\}$ از مجموعه‌های باز (نسبی) را یک پوشش باز X (نسبی) می‌گوییم هرگاه $X \subseteq \bigcup_\alpha G_\alpha \; (\subseteq X)$.

زیرمجموعهٔ K از فضای $(X,\mathfrak{T})$ را فشرده می‌گوییم هرگاه $(A,\mathfrak{T}|A)$ فشرده باشد.

مثلاً ۱) $(\mathbb{R},\tau_e)$ فشرده نیست زیرا $\{(-n,n)\}_{n=1}^{\infty}$ یک پوشش باز برای $\mathbb{R}$ است اما زیرپوشش متناهی ندارد زیرا اگر $\{(-n_1,n_1),(-n_2,n_2),\dots,(-n_k,n_k)\}$ فضای $\mathbb{R}$ را بپوشانند خواهیم داشت $\mathbb{R}\subseteq\bigcup_{i=1}^{k}(-n_i,n_i)=\underbrace{\left(-\max_{1\le i\le k} n_i,\ \max_{1\le i\le k} n_i\right)}_{(a,b)}$ که ممکن نیست زیرا $\max_{1\le i\le k} n_i+1\in\mathbb{R}-(a,b)$.

۲. $\mathbb{R}$ با توپولوژی متمم متناهی (هم‌متناهی) فشرده است زیرا اگر $\{G_\alpha\}$ پوشش باز (دلخواهی) برای $\mathbb{R}$ باشد با انتخاب اندیس دلخواه α_0، می‌توانیم بگوییم $\mathbb{R}-G_{\alpha_0}=\{t_1,\dots,t_n\}$ متناهی است. چون G_αها، $\mathbb{R}$ را می‌پوشانند $\forall 1\le i\le n\ \exists\alpha_i;\ t_i\in G_{\alpha_i}$. پس $\{G_{\alpha_0},G_{\alpha_1},\dots,G_{\alpha_n}\}$، $\mathbb{R}$ را می‌پوشانند.

۳. فضای گسسته $(X,\mathfrak{T})$ فشرده است اگر و تنها اگر X متناهی باشد زیرا

$(\Leftarrow)$ $\{\{x\}\}_{x\in X}$، پوشش باز برای X است. بنابه فشردگی $\{x_1\},\dots,\{x_n\}$ وجود دارند که X را می‌پوشانند. پس $X\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}\{x_i\}\ (\subseteq X)$ (هر مجموعه‌ای باز است). پس $X=\{x_1,\dots,x_n\}$ متناهی است. ////

$(\Rightarrow)$ فرض کنیم $X=\{y_1,\dots,y_n\}$ و $\{V_\alpha\}$ پوشش باز (دلخواهی) برای X باشد. پس برای هر i، α_i وجود دارد که $y_i\in V_{\alpha_i}$. پس $X\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}V_{\alpha_i}$. پس X فشرده است.

Scanned by CamScanner

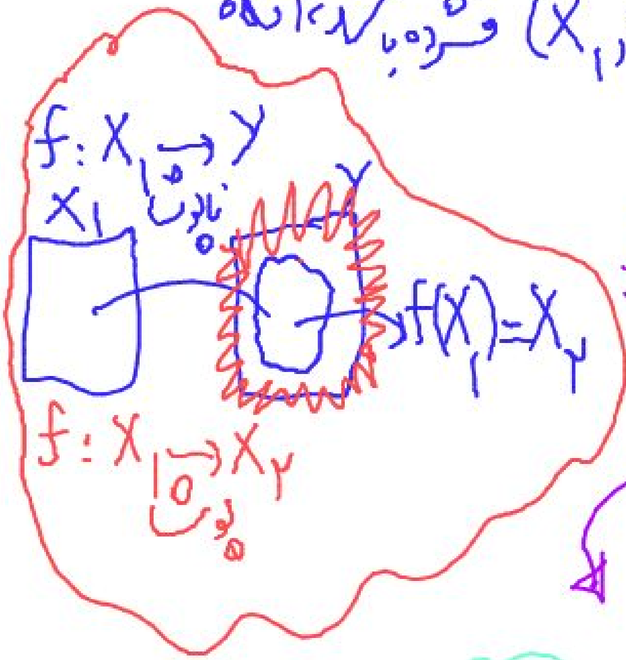
۴. اگر $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ آنگاه مجموعه $A=\{x\}\cup\{x_1,x_2,\dots\}$ فشرده است زیرا اگر $\{G_\alpha\}$ پوشش بازی برای A باشد، چون $x\in G_{\alpha_0}$ همسایگی است نسبت به تعریف داریم $\exists N\ \forall n\ge N;\ x_n\in G_{\alpha_0}$ به علاوه $\forall 1\le i\le N-1\ \exists \alpha_i;\ x_i\in G_{\alpha_i}$ پس $\{G_{\alpha_0},\dots,G_{\alpha_{N-1}}\}$، A را می‌پوشانند.

نکته. فضای $(A,\mathcal{T}|A)$ فشرده است اگر و فقط اگر هر پوشش باز $\{G_\alpha\cap A\}_{\alpha}$ برای A، دارای زیرپوشش متناهی باشد اگر و فقط اگر هر پوشش باز $\{G_\alpha\}$ در X که A را می‌پوشانند، دارای زیرپوشش متناهی باشد.

$A\subseteq\bigcup(G_\alpha\cap A)\subseteq\bigcup G_\alpha$

$A\subseteq\bigcup_\alpha G_\alpha \Rightarrow A\subseteq\bigcup(G_\alpha\cap A)$

قضیه. اگر $f:(X_1,\mathcal{T}_1)\to(Y,\mathcal{T}_2)$ پیوسته باشد و $(X_1,\mathcal{T}_1)$ فشرده باشد آنگاه $f(X_1)$ نیز فشرده است.



برهان. گیریم $\{V_\alpha\}$ پوشش باز دلخواهی در Y برای $f(X_1)$ باشد.

$f(X_1)\subseteq\bigcup_\alpha V_\alpha$

چون f پیوسته است، $f^{-1}(V_\alpha)$ها بازند و

$X_1\subseteq f^{-1}(f(X_1))\subseteq f^{-1}(\bigcup_\alpha V_\alpha)=\bigcup_\alpha f^{-1}(V_\alpha)$.

$x\in X_1\Rightarrow f(x)\in f(X_1)\Rightarrow x\in f^{-1}(f(X_1))$

چون X_1 فشرده است،

$\exists\alpha_1,\dots,\alpha_n;\ X_1\subseteq\bigcup_{i=1}^n f^{-1}(V_{\alpha_i})$

پس $f(X_1)\subseteq f(\bigcup_{i=1}^n f^{-1}(V_{\alpha_i}))=\bigcup_{i=1}^n f(f^{-1}(V_{\alpha_i}))\subseteq\bigcup_{i=1}^n V_{\alpha_i}$. پس $f(X_1)$ فشرده است. □

$f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$

$f(f^{-1}(B))\subseteq B$

$y\in f(f^{-1}(B))\Rightarrow\exists x\in f^{-1}(B);\ y=f(x)$

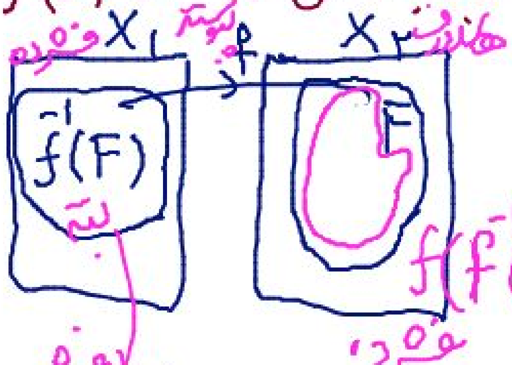
$\Rightarrow f(x)\in B\Rightarrow y\in B$

Scanned by CamScanner

تمرین ۱. هر زیرمجموعه بسته یک فضای فشرده، فشرده است.

تمرین ۲. اگر $(X,\mathcal{T})$ هاسدورف باشد و $F\subseteq X$ فشرده باشد، آنگاه F در X بسته است.

قضیه. فرض کنید $(X_1,\mathcal{T}_1)$ فشرده، $(X_2,\mathcal{T}_2)$ هاسدورف و $f: X_1 \longrightarrow X_2$ پیوسته و پوشا باشد. در این صورت شرط لازم و کافی برای این که مجموعه F در X_2 بسته باشد آن است که $f^{-1}(F)$ در X_1 بسته باشد.



$f(f^{-1}(F)) = F$ پوشا، فشرده، بسته (چون X_2 هاسدورف)

برهان. $(\Leftarrow)$ بنابه پیوستگی f

$(\Rightarrow)$ فرض کنیم $f^{-1}(F)$ در X_1 بسته باشد.

چون X_1 فشرده است، $f^{-1}(F)$ فشرده است. چون f پیوسته است پس $f(f^{-1}(F))$ فشرده است. چون X_2 هاسدورف است، پس $f(f^{-1}(F))\overset{\subseteq}{\underset{\supseteq}{=}}F$ بسته است. □

$$y\in F \xrightarrow[f \text{ پوشا}]{} \exists x\in X_1;\ y=f(x) \Rightarrow x\in f^{-1}(F) \Rightarrow \underset{y}{f(x)}\in f(f^{-1}(F))$$

نتیجه. اگر $f: X_1 \xrightarrow[\text{پوشا}]{1-1} X_2$ (X_1 فشرده، X_2 هاسدورف)، آنگاه f^{-1} پیوسته است. لذا f همانریختی است.

برهان. اگر $C\subseteq X_1$ بسته باشد، آنگاه $(f^{-1})^{-1}(C)=f(C)$ در X_2 بسته است.

C فشرده و لذا $f(C)$ فشرده و بنابراین $f(C)$ بسته است. پس

همی فشرده

تعریف. خانواده $\mathcal{A}$ از مجموعه‌ها دارای خاصیت اشتراک متناهی است هرگاه هر زیرخانواده آن دارای اشتراک ناتهی باشد.

Scanned by CamScanner

قضیه. شرط لازم و کافی برای اینکه $(X, \mathcal{T})$ فشرده باشد این است که هر خانواده $\{F_\alpha\}$ از مجموعه‌های بسته که خاصیت اشتراک متناهی دارد، دارای اشتراک ناتهی باشد.

برهان. $(\Leftarrow)$ گیریم $(X, \mathcal{T})$ فشرده باشد و $\{F_\alpha\}_\alpha$ خانواده‌ای از مجموعه‌های بسته با خاصیت اشتراک متناهی باشد. به برهان خلف فرض کنیم $\bigcap_\alpha F_\alpha = \emptyset$ پس $\bigcup_\alpha F_\alpha^c = \emptyset^c = X$ (پوشش باز) چون X فشرده است، پس $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n ; \bigcup_{i=1}^n F_{\alpha_i}^c = X$ پس $\bigcap_{i=1}^n F_{\alpha_i} = \emptyset$ که خلاف فرض خاصیت اشتراک متناهی است. ////

$(\Rightarrow)$ گیریم $\{G_\alpha\}$ پوشش باز برای X باشد. فرض کنیم این پوشش، زیرپوشش متناهی برای X نداشته باشد یعنی به ازای هر تعداد متناهی $\alpha_1, \dots, \alpha_n$، $\bigcup_{i=1}^n G_{\alpha_i} \neq X$ و لذا $\bigcap_{i=1}^n G_{\alpha_i}^c \neq \emptyset$. پس می‌توانیم بگوییم $\{G_\alpha^c\}$ خاصیت اشتراک متناهی دارد. بنابر فرض قضیه $\bigcap_\alpha G_\alpha^c \neq \emptyset$ یعنی $\bigcup_\alpha G_\alpha \neq X$ که خلاف فرض پوشش X بودن خانواده $\{G_\alpha\}$ است. بنابراین $\{G_\alpha\}$ زیرپوشش متناهی برای X دارد. $\square$

قضیه هاینه-بورل. در $(\mathbb{R}^n, \tau)$، یک مجموعه فشرده است اگر و تنها اگر بسته و کراندار باشد.

تمرین. توپولوژی اقلیدسی روی $\mathbb{R}^n$ همان $\prod_{i=1}^n (\mathbb{R}, \tau_e)$ (توپولوژی حاصلضربی) است.

نکته. قضیه هاینه-بورل در فضای توپولوژی دلخواه برقرار نیست. مثلاً در $\mathbb{R}$ با متر گسسته $\mathbb{N}$ هم بسته و هم کراندار است ولی فشرده نیست.

هر مجموعه بسته است. $\forall n, m \; d(m,n) \leq 1$ ، $\mathbb{N}$ ناهتناهی است.

Scanned by CamScanner

قضیه تیخونوف ۲۴: شرط لازم و کافی برای این‌که حاصلضرب تیخونوف $\prod_{\alpha} (X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ فشرده باشد

آن است که برای هر α، $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ فشرده باشد.

لم: اگر $(X_2, \mathcal{T}_2)$ فشرده باشد و $(X_1, \mathcal{T}_1)$ فضای دلخواهی باشد، آنگاه افکنش

$\pi_1 : X_1 \times X_2 \to X_1$ بسته است.

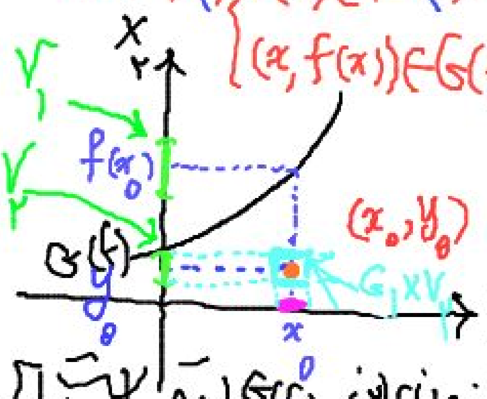
برهان. به عهده دانشجو.

قضیه (نمودار بسته). اگر $(X_1, \mathcal{T}_1)$ فضای دلخواه و $(X_2, \mathcal{T}_2)$ فضای هاسدورف فشرده باشد، آنگاه شرط لازم و کافی برای این‌که تابع $f : X_1 \to X_2$ پیوسته باشد آن است که نمودار f یعنی $G(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in X_1\}$ در فضای $X_1 \times X_2$ با توپولوژی تیخونوف بسته باشد.

برهان) $(\Leftarrow)$ فرض کنیم $G(f)$ در $X_1 \times X_2$ بسته باشد. گیریم F در X_2 بسته باشد. چون $\pi_2 : X_1 \times X_2 \to X_2$ پیوسته است، پس $\pi_2^{-1}(F)$ بسته است. پس $\pi_2^{-1}(F) \cap G(f)$ در $X_1 \times X_2$ بسته است. بنابه لم قبل، π_1 بسته (نگاشت بسته) است پس $\pi_1(\pi_2^{-1}(F) \cap G(f))$ بسته است. ////

$f^{-1}(F)$

$x \in f^{-1}(F) \Leftrightarrow f(x) \in F \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l}(x, f(x)) \in \pi_2^{-1}(F) \\ (x, f(x)) \in G(f)\end{array}\right\} \Leftrightarrow (x, f(x)) \in \pi_2^{-1}(F) \cap G(f) \Leftrightarrow x \in \pi_1(\pi_2^{-1}(F) \cap G(f))$

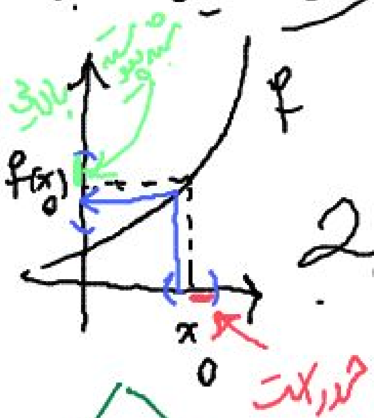


$(\Rightarrow)$ فرض کنیم f پیوسته باشد. فرض کنیم $(x_0, y_0) \in G(f)^c$. پس $y_0 \neq f(x_0)$. زیرا $(x_0, f(x_0)) \in G(f)$. چون X_2 هاسدورف است پس مجموعه‌های باز V_1 و V_2 وجود دارند که $y_0 \in V_2$ و $f(x_0) \in V_1$ و $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. چون f در x_0 پیوسته است، $G_1 = f^{-1}(V_1)$ باز است. ادعا می‌کنیم $(x_0, y_0) \in G_1 \times V_2 \subseteq G(f)^c$. لذا $G(f)^c$ باز و بنابراین $G(f)$ بسته است. □

$(x_1, y_1) \in (G_1 \times V_2) \cap G(f) \Rightarrow y_1 = f(x_1) \;\&\; x_1 \in G_1, y_1 \in V_2 \Rightarrow x_1 \in f^{-1}(V_1) \Rightarrow y_1 = f(x_1) \in V_1 \Rightarrow y_1 \in V_1 \cap V_2$ ×

Scanned by CamScanner

تعریف. تابع $f:(X,\mathcal{J})\to(\mathbb{R},\tau_e)$ را شبه پیوسته بالایی (پایینی) می‌گوییم هرگاه به ازای هر عدد حقیقی b مجموعه $\{x: f(x)<b\}$ باز باشد.
($\{x: f(x)>b\}$)



تمرین. f پیوسته است اگر و تنها اگر شبه پیوسته بالایی و شبه پیوسته پایینی باشد.

میان‌ترم ۹۶-۲-۳ — ۶ نمره از ۲۰ نمره کل

قضیه. فرض کنید $(X,\mathcal{J})$ فشرده و $f:X\to\mathbb{R}$ شبه پیوسته بالایی باشد. در این صورت $\sup_{x\in X} f(x)$ متعلق به برد f یعنی $f(X)$ است.

برهان. فرض کنیم $M=\sup_{x\in X}f(x)$. به ازای هر $b<M$ مجموعه $F_b=\underbrace{\{x: f(x)\geq b\}}_{\{x:\, f(x)<b\}^c}$ بسته است.

خانوادهٔ $\{F_b : b<M\}$ دارای خاصیت اشتراک متناهی است زیرا

$$F_{b_1}\cap\cdots\cap F_{b_n}=F_{\max_{1\le i\le n} b_i}\neq\emptyset$$

$$b_1\geq b_2 \Rightarrow \{x: f(x)\geq b_1\}\subseteq\{x: f(x)\geq b_2\}$$

$$b<M=\sup_{x\in X}f(x)\Rightarrow \exists x\in X;\ \underbrace{f(x)>b}_{x\in F_b} \Rightarrow F_b\neq\emptyset$$

خاصیت سوپریمم

چون X فشرده است، پس $\bigcap_{b<M}F_b\neq\emptyset$. گیریم $x_0\in\bigcap_{b<M}F_b$. ادعا می‌کنیم که $M=f(x_0)$:

(نقیض) فرض کنیم $f(x_0)<M$ $\left(=\sup_{x\in X}f(x)\right)$. b_0 را عددی انتخاب می‌کنیم که $f(x_0)<b_0<M$. پس $x_0\notin F_{b_0}$

لذا $f(x_0)\geq b_0$ ※.

بنابراین M متعلق به برد f است. □

Scanned by CamScanner

تعریف. فضای $(X,\mathcal{T})$ را فشرده شمارایی یا به طور شمارا فشرده گوییم هرگاه هر پوشش باز X دارای زیرپوشش شمارا باشد.

تعریف. فضای $(X,\mathcal{T})$ را لیندلوف گوییم هرگاه هر پوشش شمارای X دارای زیرپوشش متناهی باشد.

تعریف. فضای $(X,\mathcal{T})$ را فشرده دنباله‌ای گوییم هرگاه هر دنباله در آن، دارای زیردنباله همگرا باشد.

تعریف. فضای $(X,\mathcal{T})$ را فشرده موضعی گوییم هرگاه به ازای هر $x\in X$، یک مجموعه باز G_x وجود داشته باشد که $\underbrace{\overline{G_x}\ \text{فشرده}}_{G_x\ \text{فشرده نسبی}}$ باشد. مثلاً، $(\mathbb{R},\tau_e)$ فشرده موضعی است زیرا به ازای هر $x\in\mathbb{R}$، $\overline{(x-1,x+1)}=[x-1,x+1]$ فشرده است ولی $(\mathbb{R},\tau_e)$ فشرده نیست.

هر فضای فشرده X، فشرده موضعی است زیرا به ازای هر $x\in X$، کافیست G_x برابر X انتخاب شود، در این صورت $\overline{G_x}=X$ فشرده است.

تمرین. مثالها و مثالهای نقض در مورد فضاهای فوق که مثلاً لیندلوف باشد ولی فشرده نباشد و ... را بیابید.

مجموعه A را در X هیچ جا چگال گوییم هرگاه $(\overline{A})^{\circ}=\emptyset$

= فضای بئر =

تعریف. فضای توپولوژی $(X,\mathcal{T})$ را فضای بئر گوییم هرگاه اشتراک هر تعداد شمارا مجموعه باز و چگال، چگال باشد.

تمرین مهم. هر فضای هاسدورف و فشرده موضعی، بئر است.

تعریف. مجموعه A را در فضای توپولوژی $(X,\mathcal{T})$ از رسته اول (کاتگوری اول) گوییم هرگاه اجتماع شمارایی از مجموعه‌های هیچ جا چگال باشد. در غیر این صورت آن را از رسته دوم می‌گوییم.

نکته. هر فضای بئر از رسته دوم است زیرا در غیر این صورت دنباله $\{A_n\}$ از مجموعه‌های هیچ جا چگال وجود دارد که $X=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$. $(X=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}\overline{A_n}=X)$. بنابه لم بئر، $\exists m: \overline{A_m}^{\circ}\neq\emptyset$ که این خلاف فرض هیچ جا چگال بودن A_m است.

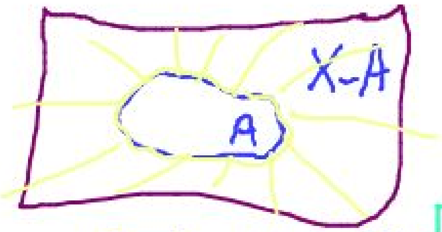
Scanned by CamScanner

لم. اگر $(X,\mathcal{G})$ بئر باشد، $X=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n$ و F_n ها بسته باشند، آنگاه $\exists m;\ F_m^\circ\neq\emptyset$.

برهان. $\emptyset=\bigcap_{n=1}^{\infty}\underbrace{F_n^c}_{\text{باز}}$، بنابه بئر بودن X، m هست که F_m^c چگال نیست لذا

$$\overline{F_m^c}=X-F_m^\circ\neq X$$

پس $F_m^\circ\neq\emptyset$. □



$\overline{X-A}=X-A^\circ$

تمرین. هر مجموعه باز در $(\mathbb{R},\mathcal{G}_e)$ اجتماع شمارایی از بازه‌های باز جدا از هم است. □

مثال) در $(\mathbb{R},\mathcal{G}_e)$، $\mathbb{Q}$ از رسته اول است زیرا $\mathbb{Q}=\bigcup_{r\in\mathbb{Q}}\{r\}$ (شمارا) اما $\overline{\{r\}}^\circ=\{r\}^\circ=\emptyset$.

$x\in\{r\}^\circ\Rightarrow\exists G$ (باز); $\cancel{x\in}G\subseteq\{r\}$

$\cup\!\mid\ (a,b)$ ، $x\in(a,b)$

بازه‌های باز پایه هستند

اما $\mathbb{Q}^c$ از رسته دوم است. در غیر این صورت $\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup\mathbb{Q}^c$ از رسته اول است که ممکن نیست زیرا $\mathbb{R}$ به دلیل فضای متریک کامل بودن، بئر و در نتیجه از رسته دوم است.

$\mathbb{Q}=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ ، $\mathbb{Q}^c=\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n$

بعضی کتاب/جزوه‌ها:
۱. کتاب من!
۲. کتاب دکتر هنری
۳. کتاب مانکرز
۴. کتاب دکتر مقدادزاده
۵. کتاب دکتر کاظمی
۶. هر کتاب دیگر

قضیه. اگر $(X,\mathcal{G})$ بئر باشد و A از رسته اول باشد، آنگاه $\mathring{A}=\emptyset$.

برهان. فرض کنیم $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ و A_nها هیچ جا چگال باشند. نشان می‌دهیم اگر G باز باشد و $G\subseteq A$، آنگاه $G=\emptyset$ (این بلافاصله نتیجه می‌دهد که $\mathring{A}=\bigcup G=\emptyset$) $A\supseteq G\in\mathcal{G}$. $G\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}\overline{A_n}$.

بنابراین $\bigcap_{n=1}^{\infty}\underbrace{X-\overline{A_n}}_{\text{باز، چگال در } X \text{ زیرا } \emptyset=\overline{A_n}^\circ}\subseteq X-G$. بنابه بئر بودن X، $(X\supseteq X-G\supseteq)\ \overline{\bigcap_{n=1}^{\infty}X-\overline{A_n}}=X$

پس $X-G=X$. لذا $G=\emptyset$. □

≡ همبندی ≡

تعریف. فضای $(X,\mathcal{T})$ را ناهمبند گویند هرگاه اجتماع دو مجموعه باز ناتهی جدا از هم باشد.

$$\exists G_1, G_2 \in \mathcal{T};\ G_1\cap G_2=\emptyset,\ X=G_1\cup G_2,\quad G_1\neq\emptyset,\ G_2\neq\emptyset$$

$$G_1 = \underbrace{G_2^c}_{F_2\ \text{بسته}} \neq \emptyset \ \&\ G_2 = \underbrace{G_1^c}_{F_1\ \text{بسته}} \neq\emptyset$$

یا به طور معادل

$$\exists F_1, F_2\ \text{بسته};\ F_1\cap F_2=\emptyset\ \&\ F_1\cup F_2 = X,\quad F_1\neq\emptyset,\ F_2\neq\emptyset$$

یا به طور معادل چون $G_1=G_2^c$ بسته‌باز (هم بسته هم باز) است می‌توان گفت X ناهمبند است هرگاه شامل یک مجموعه بسته‌باز نابدیهی ($G_1 \neq\emptyset$ و $\neq X$) باشد.

فضایی که ناهمبند نباشد، همبند نامیده می‌شود.

تعریف. (همچون فشردگی) مجموعه $A\subseteq(X,\mathcal{T})$ را همبند گویند هرگاه فضای $(A,\mathcal{T}|A)$ همبند باشد.

تمرین. (همچون فشردگی) اگر $A\subseteq B\subseteq X$، A به عنوان زیرمجموعه فضای $(B,\mathcal{T}|B)$ همبند (فشرده) است هرگاه A به عنوان زیرمجموعه $(X,\mathcal{T})$ همبند (فشرده) باشد زیرا

حل.

$$\boxed{V\in(B,\mathcal{T}|B) \Rightarrow \exists G\in\mathcal{T};\ V=B\cap G}$$

$$W\in(A,(\mathcal{T}|B)|A) \Rightarrow \exists V\in\mathcal{T}|B;\ W=A\cap V \Rightarrow \exists G\in\mathcal{T};$$

$$W=A\cap(B\cap G) \xRightarrow{A\subseteq B} \exists G\in\mathcal{T};\ W=A\cap G \Rightarrow W\in\mathcal{T}|A$$

مثال. ۱) $(\mathbb{R},\tau_e)$ همبند است و در حالت کلی زیرمجموعه‌های همبند $\mathbb{R}$ به صورت یک بازه هستند.

۲) فضای ناگسسته $(X,\mathcal{T})$ همبند است زیرا هیچ زیرمجموعه باز نابدیهی ندارد.

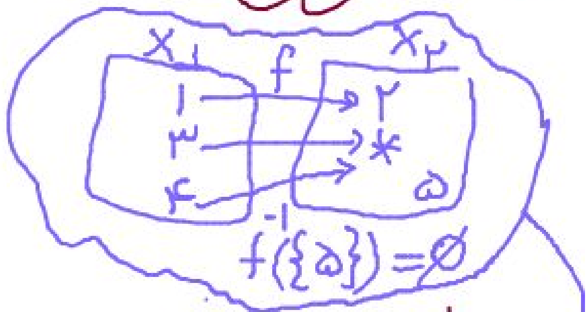
۳) فضای گسسته $(X,\mathcal{T})$ با بیش از یک نقطه ناهمبند است زیرا اگر $x_1,x_2\in X$ آنگاه $X=\underbrace{\{x_1\}}_{\neq\emptyset}\cup\underbrace{\{x_1\}^c}_{\ni x_2}$

و توجه کنید که هر زیرمجموعه X باز است.

قضیه. اگر $(X_1,\mathcal{T}_1)$ همبند باشد و $f:(X_1,\mathcal{T}_1)\to(X_2,\mathcal{T}_2)$ پیوسته و پوشا باشد آنگاه $(X_2,\mathcal{T}_2)$ همبند است.

برهان) برهان خلف. فرض کنیم $(X_2,\mathcal{T}_2)$ ناهمبند باشد و (G_1,G_2) یک ناهمبندی برای X_2 باشد یعنی

$X_2=G_1\cup G_2$، $G_1\neq\emptyset$، $G_2\neq\emptyset$. در این صورت



$$X_1=f^{-1}(X_2)=f^{-1}(G_1\cup G_2)=f^{-1}(G_1)\cup f^{-1}(G_2)$$

$$\emptyset=f^{-1}(\emptyset)=f^{-1}(G_1\cap G_2)=f^{-1}(G_1)\cap f^{-1}(G_2)$$

باز، باز

$$G_1\neq\emptyset\Rightarrow\exists y\in X_2;\ y\in G_1\xrightarrow{\text{پوشا } f}\exists x\in X_1;\ f(x)=y\ (\in G_1)\Rightarrow x\in f^{-1}(G_1)\Rightarrow f^{-1}(G_1)\neq\emptyset$$

$$G_2\neq\emptyset\Rightarrow\cdots\Rightarrow f^{-1}(G_2)\neq\emptyset.$$

پس $(f^{-1}(G_1),f^{-1}(G_2))$ یک ناهمبندی برای X_1 است. $\times$ $\Box$

نکته ۱. همبندی و نیز فشردگی، خاصیت موروثی ندارند. مثلاً $[0,1]$ هم همبند و هم فشرده است. اما $[0,\frac{1}{3}]\cup[\frac{2}{3},1]$ ناهمبند است. همچنین $[0,1)$ فشرده نیست.

بسته، بسته

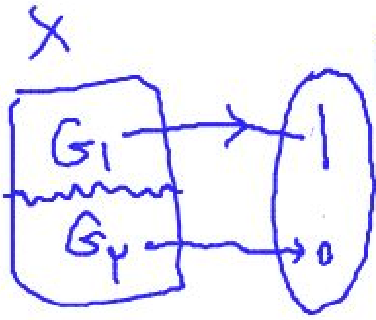
۲. هم همبندی و هم فشردگی خاصیت حاصلضربی دارند:

فضای تیخونوف $\prod(X_\alpha,\mathcal{T}_\alpha)$ همبند (به ترتیب، فشرده) است اگر و تنها اگر به ازای هر α فضای $(X_\alpha,\mathcal{T}_\alpha)$ همبند (به ترتیب، فشرده) باشد.

... is connected (compact, resp.) iff ...

Scanned by CamScanner

قضیه. شرط لازم و کافی برای ناهمبندی $(X,\mathcal{G})$ این است که تابع پیوسته و برونی از X به فضای دونقطه‌ای $\{0,1\}$ با توپولوژی گسسته وجود داشته باشد.



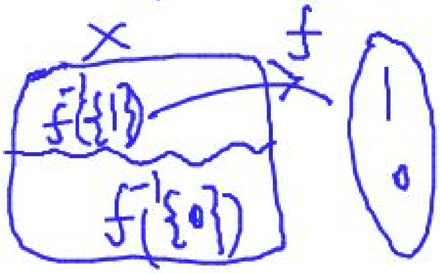
اثبات. ($\Leftarrow$) فرض کنیم (G_1,G_2) یک ناهمبندی برای X باشد. f را تعریف می‌کنیم

$$f(x)=\begin{cases}1 & x\in G_1\\ 0 & x\in G_2\end{cases}$$

این تابع پیوسته است زیرا $\{\emptyset,\{0\},\{1\},\{0,1\}\}$ عبارت است از توپولوژی گسسته روی $\{0,1\}$ و مشاهده می‌شود که

$f^{-1}(\emptyset)=\emptyset\in\mathcal{G}$, $f^{-1}(\{1\})=G_1\in\mathcal{G}$, $f^{-1}(\{0\})=G_2\in\mathcal{G}$, $f^{-1}(\{0,1\})=X\in\mathcal{G}$

پس f پیوسته است. ضمناً چون G_1 و G_2 ناتهی‌اند، برد f برابر $\{0,1\}$ است. ///



($\Rightarrow$) اگر $f:X\to\{0,1\}$ پیوسته و برونی باشد، به وضوح $(f^{-1}(\{1\}),f^{-1}(\{0\}))$ یک ناهمبندی برای X است.

قضیه. فرض کنید $\{(C_\alpha,\mathcal{G}_\alpha)\}$ خانواده‌ای از زیرفضاهای همبند فضای $(X,\mathcal{G})$ باشد. اگر برای هر α,β، $C_\alpha\cap C_\beta\neq\emptyset$ آنگاه $\bigcup_\alpha C_\alpha$ همبند است.

برهان. فرض کنیم $f:C\to\{0,1\}$ پیوسته باشد. نشان می‌دهیم f برونی نیست یعنی مجموعه $f(C)$ تک‌نقطه‌ای است. فرض کنیم $x,y\in C$. چون $C=\bigcup_\alpha C_\alpha$ پس α,β وجود دارند که $x\in C_\alpha$ و $y\in C_\beta$. چون C_α همبند و $f|_{C_\alpha}$ پیوسته است پس $f(C_\alpha)$ تک‌نقطه‌ای است. به دلیل مشابه $f(C_\beta)$ تک‌نقطه‌ای است. فرض کنیم $z\in C_\alpha\cap C_\beta$. پس $f(x)=f(z)$ (زیرا $x,z\in C_\alpha$) و نیز $f(y)=f(z)$. پس $f(x)=f(y)$. پس $f(C)$ تک‌نقطه‌ای است. □

جلسه آخر =

تعریف. اگر X یک فضای برداری باشد تابع $\|\cdot\|: X \to \mathbb{R}^{\geq 0}$, $x \mapsto \|x\|$ که در سه شرط

$$(i)\ \|x\|=0 \Leftrightarrow x=0,\quad (ii)\ \|\lambda x\|=|\lambda|\,\|x\| \quad (iii)\ \|x+y\| \leq \|x\|+\|y\|$$

صدق می‌کند را یک نرم روی X و $(X, \|\cdot\|)$ را یک فضای نرمدار می‌گوییم! به وضوح $d(x,y)=\|x-y\|$ یک متر روی X است. اگر فضای X با این متر d کامل باشد (یعنی هر دنباله کوشی در آن همگرا باشد)، فضای باناخ خوانده می‌شود.

قضیه. هر فضای نرمدار X همبند است.

برهان. به ازای هر $x_0 \in X$، $C_{x_0}=\{\lambda x_0 \mid \lambda \in \mathbb{C}\}$ همبند است زیرا تابع $\begin{cases}\varphi_{x_0}: \mathbb{C} \to X \\ \lambda \mapsto \lambda x_0\end{cases}$ پیوسته است

$$\left(d(\varphi_{x_0}(\lambda),\varphi_{x_0}(\mu))=\|\lambda x_0-\mu x_0\|=\|x_0\|\,|\lambda-\mu|=\|x_0\|\,d_e(\lambda,\mu)\right)$$

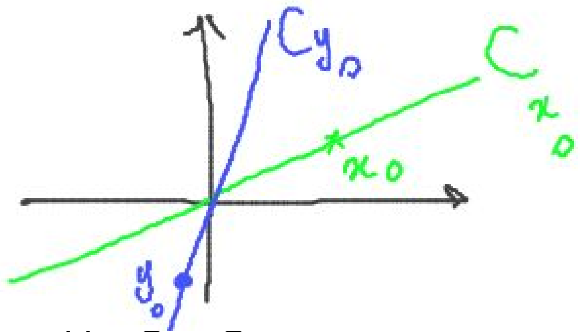
پس شرط لیپ‌شیتز برقرار است

$z=(a,b)=a\underbrace{(1,0)}_{1}+b\underbrace{(0,1)}_{i}=a+bi$, $(a,0)\cong a$, $a=\mathrm{Re}\,z$, $b=\mathrm{Im}\,z$

اما $\mathbb{C}=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ همبند است (زیرا حاصلضرب تیخونوف دو فضای همبند است)

پس تصویر این فضا تحت تابع پیوسته φ_{x_0} یعنی C_{x_0} همبند است. اما $X=\bigcup_{x_0\in X} C_{x_0}$

و $\forall x_0,y_0:\ \underbrace{C_{x_0}\cap C_{y_0}}_{0\in} \neq \emptyset$ پس بنابر قضیه (اجتماع همبندها)، X همبند است. □



Scanned by CamScanner

تعریف. فضای $(X,\mathcal{G})$ را همبند موضعی می‌گویند هرگاه $\forall x\in X\ \forall \underset{x}{\overset{}{G}}\in\mathcal{G}\ \exists \underset{\text{همبند}}{V}\in\mathcal{G};\ x\in V\subseteq G$

در حالت کلی همبندی، همبند موضعی را نتیجه می‌دهد و نه همبند موضعی، همبندی را. برای دیدن

این خاصیت آخر، فضای (ناهمبند) $(0,1)\cup(2,3)$ را در نظر بگیرید که خودش همبند موضعی است.

تعریف. یک مؤلفهٔ فضای توپولوژی $(X,\mathcal{G})$ یک زیرمجموعهٔ همبند بیشین است A

$\forall \underset{\text{همبند}}{C};\ (A\subseteq C\Rightarrow A=C)$

مثال) در فضای گسستهٔ $(X,\mathcal{G})$، هر مجموعهٔ تک عضوی (مؤلفه) است.

قضیه. فرض کنید $(X,\mathcal{G})$ یک فضای توپولوژی باشد. در این صورت

الف) هر نقطهٔ x مشمول در یک مؤلفه است.

$\Sigma=\{C \mid \underset{x\in C}{C}$ همبند است و $\}$ گیریم. اولاً Σ ناتهی است زیرا $\{x\}\in\Sigma$. بنا به قضیه (اجتماع)

همبندها، $C_x=\bigcup_{C\in\Sigma} C$ همبند است (زیرا هر دو عضو Σ دارای نقطهٔ مشترک x هستند). نشان

می‌دهیم C_x مؤلفه است. فرض کنیم $C_x\subseteq \underset{\text{همبند}}{D}$ (1). چون $x\in C_x$، داریم $x\in D$. پس $D\in\Sigma$.

پس بنا به تعریف C_x داریم $D\subseteq C_x$ (2). از (1) و (2) نتیجه می‌شود که $C_x=D$.

ب) هر دو مؤلفه جدا از هم‌اند (اشتراکی).

فرض کنیم A, B دو مؤلفهٔ متمایز باشند. اگر $A\cap B\neq\emptyset$ آنگاه بنا به قضیهٔ اجتماع همبندها، $A\cup B$

همبند است. چون $A\subseteq A\cup B$ (بیشین) پس $A=A\cup B$ (نقض)، به دلیل مشابه $B=A\cup B$. پس $\boxed{A=B}$

ج) اجتماع تمام مؤلفه‌ها برابر X است.

مشابه (الف)، X برابر اجتماع تمام مؤلفه‌ها است.

د) گردایه تمام مؤلفه‌ها، یک افراز برای X است.

به وضوح هر مؤلفه، ناتهی است.

ه) هر مجموعه همبند ناتهی، مشمول در (فقط) یک مؤلفه است.

فرض کنیم A همبند باشد و $x\in A$. بنا به قسمت (الف)، $A\in\sum$. پس با فرض $C_x=\cup C$ داریم $A\subseteq C_x$ ($C\in\sum$). اینک قسمت (ب) نشان می‌دهد که مؤلفه شامل A منحصر به فرد است.

مؤلفه (بنا به اثبات الف)

$\boxed{\text{قضیه. اگر } C \text{ همبند باشد آنگاه } \bar{C} \text{ همبند است}}$

و) هر مؤلفه، بسته است.

چون A مؤلفه و در نتیجه همبند است. پس بنا به قضیه $\bar{A}$ نیز همبند است. اما $A\subseteq\bar{A}$ و A مؤلفه است. پس $A=\bar{A}$. پس A بسته است.

ز) هر مجموعه همبند بسته‌باز، مؤلفه است.

فرض کنیم C همبند و بسته‌باز باشد و A مجموعه همبندی باشد که شامل C است. ادعا می‌کنیم $A=C$.

یعنی فرض کنیم $A\neq C$. پس $A=\underbrace{(A\cap C)}_{\neq\emptyset \text{ باز}}\cup\underbrace{(A\cap C^c)}_{\neq\emptyset \text{ باز}}$. پس A اجتماع دو زیرمجموعه باز (در A) (جدا) است که خلاف همبندی A است. $\square$

پایان

اول توپولوژی بخوانید بعد زندگی کنید!

Scanned by CamScanner