

پیش حسابان

برای دانشجویان سال اول دانشگاه

محمد صالح مصباحیان

مجید میرزاویری

دانشگاه فردوسی مشهد

Precalculus M. S. Moslehian & M. Mirzavaziri
پیش حسابان محمد صالح مصباحیان و مجید میرزاویری

این کتاب به شکلی بسیار ساده و با زبانی قابل درک برای یک دانشجوی سال اول دوره کارشناسی، به بیان مفاهیم اساسی ریاضیات مانند منطق ریاضی، حد و اعداد مختلط می پردازد. شیوه بیان مطالب به گونه ای است که کتاب را به منبعی خودخوان برای آشنایی اولیه با ریاضیات تبدیل می کند و دانشجویان، آن را قابل درک و ساده می یابند.

وجود مثال های متنوع برای روشن سازی هر مفهوم، زمینه ای مناسب را برای آشنایی بهتر خوانندگان با مفاهیم ریاضی در سال اول دانشگاه فراهم می آورد.

PRECALCULUS

FOR FIRST-YEAR STUDENTS

M.S.Moslehian

M.Mirzavaziri

پیش-حسابان

Precalculus

برای دانشجویان سال اول دانشگاه

محمد صال مصلحیان

مجید میرزاویزی

فهرست مطالب

۳	۱ منطق ریاضی
۱۱	۱.۱ سورها
۱۴	۲.۱ کاربرد حساب گزاره‌ها در ریاضیات
۱۷	۲
۱۷	۱.۲ تعیین علامت
۲۲	۲.۲ حل معادلات و نامعادلات
۲۵	۳.۲ مجموعه‌ها
۳۵	۴.۲ انواع تابع
۳۷	۵.۲ انواع تابع حقیقی
۴۳	۶.۲ توابع خاص

۷.۲ رسم نمودار بعضی توابع از روی نمودار f ۴۷

۸.۲ رسم نمودار بعضی از توابع از روی نمودار توابع f و g ۵۵

۳ حد ۵۷

۴ اعداد مختلط ۶۵

۱.۴ تعریف اعداد مختلط ۶۵

۲.۴ نمایش هندسی اعداد مختلط ۶۷

فصل ۱

منطق ریاضی

مطالب این فصل اساساً از کتاب آنالیز ریاضی (جلد ۱) دکتر غلامحسین مصاحب اقتباس شده است.

تعریف ۱.۱ «گزاره» جمله‌ای خبری است که یا راست یا دروغ باشد، هر چند بر ما معلوم نباشد که راست است یا دروغ.

« e^π عدد گنگ است» گزاره است در حالی که «عجب خانه زیبایی!» گزاره نیست.

اگر گزاره‌ای راست باشد، می‌گوییم ارزش (راستی) آن T و در غیر این صورت F است. منظور ما از «متغیر گزاره‌ای»، حروف p و q و ... است که برای نامیدن گزاره‌های دلخواه به کار می‌روند.

گاهی «تعداد باپایانی» گزاره را همراه واژه‌هایی موسوم به «رابط» بر طبق قواعد معین به دنبال هم می‌آورند و «گزاره مرکب» می‌سازند.

رابط‌های گزاره‌ای به صورت ذیل معرفی می‌شوند:

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \vee\vee q$	$p \implies q$	$p \Leftrightarrow q$
T	T	T	T	F	T	T
T	F	F	T	T	F	F
F	T	F	T	T	T	F
F	F	F	F	F	T	T
		ترکیب عطفی	ترکیب فصلی	ترکیب فصلی با یای مانع جمع	ترکیب شرطی	ترکیب دوشرطی

p	$\sim p$
T	F
F	T

تعریف ۲.۱ هر عبارتی که از متغیرهای گزاره‌ای p و q و ... با به کارگیری مناسب رابط‌های گزاره‌ای ساخته می‌شوند، یک ترکیب منطقی یا فرمول نامیده می‌شود. به طور دقیق‌تر:

۱. همه متغیرهای گزاره‌ای فرمول هستند

۲. اگر A و B دو فرمول باشند، $\sim A$ ، $A \wedge B$ ، $A \vee B$ ، $A \perp B$ ، $A \Rightarrow B$ ، $A \Leftrightarrow B$

نیز فرمول هستند.

۳. فقط عبارت‌هایی فرمول هستند که با استفاده از (۱)، (۲) به دست می‌آیند.

نکته ۱.۱ وقتی از پرانتز استفاده نمی‌شود، ناقض ($\sim$) روی اولین فرمول اثر می‌کند. مثلاً

$$\sim p \Rightarrow \sim q \text{ یعنی } (\sim p) \Rightarrow (\sim q).$$

تعریف ۳.۱

(i) فرمول $q \Rightarrow p$ را «عکس» فرمول $p \Rightarrow q$ می‌نامند.

(ii) فرمول $\sim q \Rightarrow \sim p$ را «عکس نقیض» فرمول $p \Rightarrow q$ می‌نامند.

(iii) p مگر آن که q به معنای $p \Rightarrow \sim q$ است.

مثال: «او را نمی‌بخشم مگر آنکه عذرخواهی کند» یعنی «اگر عذرخواهی نکند او

را نمی‌بخشم»

(iv) فرمول $\sim q \Leftrightarrow \sim p$ را «عکس نقیض» فرمول $p \Leftrightarrow q$ می‌نامند.

(v) لفظ «ولی» در ترکیب دو گزاره از جنبه منطقی در حکم «و» است.

تعریف ۴.۱ دو ترکیب منطقی را «هم‌ارز» خوانند هرگاه ستون نمایش آن‌ها در جدول

ارزش یکسان باشند بدین معنی که اگر در سطری، یکی درست باشد دیگری نیز درست

باشد و اگر یکی نادرست باشد دیگری هم نادرست باشد مثلاً $(p \Rightarrow q)$ و $(\sim p \vee q)$ هم‌ارز هستند.

p	q	$\sim p$	$\sim p \vee q$	$p \Rightarrow q$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

تعریف ۵.۱

(i) یک فرمول را «راستگو» (t) گویند هرگاه ارزش آن مستقل از ارزش مولفه‌هایش

همواره راست باشد. مانند: $\sim p \vee p$

p	$\sim p$	$\sim p \vee p$
T	F	T
F	T	T

(ii) یک فرمول را «دروغگو» (c) گویند هرگاه ارزش آن مستقل از ارزش مولفه‌هایش

همواره دروغ باشد مانند: $\sim p \wedge p$ ، که آن را در ریاضیات «تناقض» می‌گویند.

p	$\sim p$	$\sim p \wedge p$
T	F	F
F	T	F

تمرین ۱.۱ ثابت کنید فرمول‌های زیر راستگو هستند:

$$(i) \text{ قانون جمع (ادخال فاصل) } p \Rightarrow (p \vee q)$$

$$(ii) \text{ قانون اختصار (حذف عاطف) } p \wedge q \Rightarrow p$$

$$(iii) \text{ رفع مولفه } q \Rightarrow [(p \vee q) \wedge \sim p]$$

قیاس ذوالوجهین موجب

$$[(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)] \Rightarrow [p \vee r \Rightarrow (q \vee s)]$$

$$[(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)] \Rightarrow [p \wedge r \Rightarrow (q \wedge s)] \text{ قیاس}$$

ذوالوجهین منفی

$$[(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)] \Rightarrow [(\sim q \vee \sim s) \Rightarrow (\sim p \vee \sim r)]$$

$$[(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)] \Rightarrow [(\sim q \wedge \sim s) \Rightarrow (\sim p \wedge \sim r)]$$

قیاس استثنایی (قانون انتزاع)

$$(p \Rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$$

قیاس دفع (قانون نقیض انتزاع)

$$[(p \Rightarrow q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$$

تعریف ۶.۱

(i) یک راستگو به صورت $A \Rightarrow B$ را یک «استلزام (منطقی)» می‌گویند. عکس یک استلزام ممکن است استلزام نباشد.

(ii) یک راستگو به صورت $A \Leftrightarrow B$ را یک «هم‌ارزی (منطقی)» می‌گویند و در این صورت می‌نویسند $A \equiv B$

تمرین ۲.۱ فرض کنید p و q و r متغیر گزاره‌ای باشند، هم‌ارزی‌های ذیل را ثابت کنید:

$$\begin{aligned}
 (i) \quad & \left\{ \begin{array}{l} p \wedge q \equiv q \wedge p \\ p \vee q \equiv q \vee p \end{array} \right. \quad \text{جابجایی قانون} \\
 (ii) \quad & \left\{ \begin{array}{l} p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r \\ p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r \end{array} \right. \quad \text{شرکت پذیری قانون} \\
 (iii) \quad & \left\{ \begin{array}{l} p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \\ p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \end{array} \right. \quad \text{پخش قانون} \\
 (iv) \quad & \sim(\sim p) \equiv p \quad \text{قانون نفی مضاعف} \\
 (v) \quad & \left\{ \begin{array}{l} p \vee p \equiv p \\ p \wedge p \equiv p \end{array} \right. \quad \text{قانون خودتوانی} \\
 (vi) \quad & \left\{ \begin{array}{l} p \wedge (p \vee q) \equiv p \\ p \vee (p \wedge q) \equiv p \end{array} \right. \quad \text{قانون جذب} \\
 (vii) \quad & (p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p) \quad \text{قانون عکس نقیض}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v(iii) \quad & \left\{ \begin{array}{l} \sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q \\ \sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q \end{array} \right. \quad \text{دمورگان قوانین} \\
 (ix) \quad & [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r) \quad \text{قانون تعدی} \\
 (xi) \quad & [p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \equiv [(p \wedge q) \Rightarrow r]
 \end{aligned}$$

تعریف ۷.۱ «استنتاج» به مفهوم نتیجه‌گیری است بدین معنا که از فرمول‌های مفروض با استفاده از دستورهای معینی که به نام قوانین خوانده می‌شوند فرمول دیگری را نتیجه بگیریم.

گزاره ۱.۱ هرگاه از فرمول‌های مفروض $A_1, A_2, \dots, A_n$ فرمولی نتیجه شده باشد، می‌نویسیم $A_1, \dots, A_n \vdash B$ به عبارت دیگر $A_1, \dots, A_n \vdash B$ معتبر است هرگاه فرمول $(A_1 \wedge \dots \wedge A_n) \Rightarrow B$ یک راستگو باشد.

مثال ۱.۱ استنتاج زیر بنا به قانون نفیض انتزاع و قانون نفی مضاعف معتبر است:

$$(\sim p \Rightarrow q), \sim q \vdash p$$

تعریف ۸.۱

(i) در هر مبحثی، گروه افراد اولیه موضوع بحث را «عالم سخن» می‌خوانند. مثلاً در حساب مقدماتی، عالم سخن مجموعه اعداد حقیقی است.

(ii) «ثابت» به معنای اسم خاص است. «اسم خاص» در اصطلاح ما اعم است از

(الف) اسم خاص به معنی دستوری، یعنی کلمه یا علامتی که بر فرد مشخصی دلالت می‌کند.

(ب) شرح مشخص، یعنی ترکیبی از کلمات یا علامات که فردی را مشخص می‌سازند.

مانند «۵»، «پنج» و «پدر سعدی»، «نسبت محیط دایره به قطر آن».

(iii) «متغیر»، حرف یا علامتی است مانند x ، که برخلاف اسم خاص، اسم فرد معینی نیست، بلکه اسم مبهمی است برای نامیدن هر یک از افراد مجموعه معینی از اشیا. این مجموعه را دامنه‌ی متغیر می‌نامند.

(iv) «گزاره نما»، عبارتی مشتمل بر یک یا چند متغیر است که با تبدیل یکنواخت این متغیر یا متغیرها (یعنی تبدیل جمیع موارد هر متغیر در سراسر آن عبارت به یک اسم خاص) به اسم یا اسامی خاص اشیای مناسب (اعضای دامنه متغیرها) مبدل به گزاره شود.

مانند: x عدد زوج است. گزاره‌نماها را با نمادهای $F(x)$ و $G(x, y)$ و ... نمایش می‌دهند.

(v) «اسم‌نما»، عبارتی است مشتمل بر یک یا چند متغیر که با تبدیل یکنواخت این متغیر یا متغیرها به اسم یا اسامی خاص اشیای مناسب، مبدل به اسم خاص شود. مانند:

پدر x

(vi) همه عضوهایی از دامنه‌ی متغیر که جانشین متغیر شده و گزاره‌نما را به یک گزاره‌ی درست تبدیل می‌نمایند مجموعه‌ای تشکیل می‌دهند که آن را مجموعه‌ی جواب می‌خوانند.

۱.۱ سورها

می‌دانیم یک گزاره‌نما که شامل یک یا چند متغیر است ممکن است به ازای بعضی از مقادیر متغیرها درست (نادرست) و یا به ازای همه مقادیر متغیرها درست (نادرست) باشد. در هریک از این حالات می‌توان آن را با علامت مخصوصی به نام سور شروع کرد و گزاره‌نما را به یک گزاره تبدیل نمود.

دو نوع سور و لذا دو نوع گزاره‌ی سوری وجود دارد.

الف - گزاره‌های با سور عمومی - گزاره‌هایی هستند که خاصیتی را به تمام عضوهای مجموعه مرجع مورد بحث (عالم سخن) نسبت می‌دهند. برای نمایش این گزاره‌ها از نماد $\forall$ استفاده می‌کنیم. این گزاره‌ها را در حالت کلی وقتی عالم سخن معلوم باشد به صورت $\forall x; p(x)$ نمایش می‌دهیم. گزاره‌ای که به صورت یک گزاره‌نما همراه با سور عمومی بیان می‌شود فقط و فقط وقتی درست است که دامنه متغیر آن مساوی مجموعه جوابش باشد. این گزاره‌ها معمولاً یا یکی از عبارت‌های «هرچه باشد»، «برای تمام مقادیر»، «برای هر»، «برای هر کدام» و ... شروع می‌شوند.

ب - گزاره‌های با سور وجودی - گزاره‌هایی هستند که خاصیتی را به یک یا چند عضو از

مجموعه مرجع مورد بحث (عالم سخن) نسبت می‌دهند. برای نمایش این گزاره‌ها از نماد $\exists$ استفاده می‌کنیم. این گزاره‌ها را در حالت کلی وقتی سخن معلوم باشد به صورت $\exists x; p(x)$ نمایش می‌دهند.

گزاره‌ای که به صورت یک گزاره‌نما همراه با سور وجودی بیان می‌شود فقط و فقط وقتی درست است که مجموعه جواب آن تهی نباشد. این گزاره‌ها معمولاً با یکی از عبارتهای «حداقل برای یک مقدار»، «مقداری وجود دارد»، «برای بعضی مقادیر» و ... شروع می‌شوند.

نکته ۲.۱ (i) سور صفر ($\nexists$) و سور وحدت وجود ($\exists!$) را می‌توان به کمک $\forall$ و $\exists$ تعریف کرد.

«عضوی با خاصیت p وجود ندارد» یعنی $\nexists x; p(x)$ به معنای $\forall x; \sim p(x)$ است و $\exists! x; p(x)$ به معنای آن است که فقط یک مقدار برای x وجود دارد به طوری که به ازای آن $p(x)$ درست است. پس می‌توان آن را چنین نوشت:

$$(\exists x; p(x)) \wedge \forall y; (y \neq x \implies \sim p(y))$$

۱.۱.۱ نقیض گزاره‌های سوری

قضیه ۱.۱

$$(i) \quad \sim (\forall x; p(x)) \equiv \exists x; \sim p(x)$$

$$(ii) \quad \sim (\exists x; p(x)) \equiv \forall x; \sim p(x)$$

تمرین ۳.۱ هم‌ارزی (ii) را از (i) نتیجه بگیرید.

مثال نقض

برای اثبات نادرستی گزاره‌ی $\forall x; p(x)$ درستی نقیض آن یعنی $\exists x; \sim p(x)$ را ثابت می‌کنیم و برای این منظور کافی است مقداری برای x مانند a بیابیم به طوری که $p(a)$ درست نباشد. به a مثال نقض می‌گویند.

مثال ۲.۱ آیا هر عدد فرد اول است؟ خیر زیرا عدد اول ۲ وجود دارد که فرد نیست.

فرض کنید S فرمولی (عبارتی بامعنی متشکل از گزاره‌ها، سورها و ...) عاری از موارد $\Rightarrow$ و $\Leftrightarrow$ باشد. اگر در S تبدیلات ذیل را انجام دهیم فرمولی مانند S^* حاصل می‌شود که آن را جفت فرمول S می‌نامیم.

I . تبدیل هر مورد $\wedge$ به $\vee$ و هر مورد $\vee$ به $\wedge$.

II . تبدیل هر مورد $\forall$ به $\exists$ و هر مورد $\exists$ به $\forall$.

III . استفاده هر مورد $\sim$ که بلافاصله در سمت چپ یک متغیر گزاره‌ای یا یک حرف معمولی است و درج $\sim$ بلافاصله در سمت چپ هریک از این حروف که $\sim$ بلافاصله بر آن مقدم نیست.

قضیه ۲.۱ (اصل جفت) اگر فرمول S عاری از موارد $\forall$ ، $\Rightarrow$ و $\Leftrightarrow$ باشد، نقیض S معادل جفت آن است.

مثال ۳.۱

$$\sim (\forall x \sim \exists y ; (p \vee \sim F(x, y))) \equiv \exists x \sim \forall y ; (\sim p \wedge F(x, y))$$

۲.۱ کاربرد حساب گزاره‌ها در ریاضیات

الف - کلیات

۱. گاهی برای اثبات فرمولی مانند Q ، فرمولی دیگر مانند P به دست می‌آورند

به طوری که بتوان P و $P \Rightarrow Q$ را ثابت کرد.

۲. اگر بتوانیم دو فرمول به صورت $P \Rightarrow Q$ و $\sim P \Rightarrow Q$ ثابت کنیم، آن‌گاه

بنابر راستگوی Q $[(P \Rightarrow Q) \wedge (\sim P \Rightarrow Q)] \Leftrightarrow Q$ می‌توان Q را نتیجه گرفت.

۳. (برهان خلف) گاهی برای اثبات فرمول Q ، $\sim Q$ را درست فرض کرده و از

آن تناقضی استخراج می‌کنند، یعنی دو نتیجه متناقض مانند R و $\sim R$ مجوز

این کار راستگوی ذیل است:

$$[\sim Q \Rightarrow (R \wedge \sim R)] \Rightarrow Q$$

تذکره ۱- گاهی در اثبات Q به برهان خلف، استنتاج R و $\sim R$ لازم نمی‌شود بلکه

یکی از این دو حکمی است که قبلاً ثابت شده است و لذا استنتاج دیگری،

کافی است.

تذکره ۲- از حالات نادر برهان خلف این است که برای اثبات Q ، $\sim Q$ را

مفروض می‌گیرند و Q را استخراج می‌کنند. مجوز این کار راستگوی

$$Q \Leftrightarrow (Q \Rightarrow \sim Q) \text{ است.}$$

ب- اثبات فرمول $P \Rightarrow Q$

۱. (اثبات مستقیم) در این طریق P را مفروض گرفته و Q را از آن استخراج

می‌کنند.

۲. برای اثبات $P \Rightarrow Q$ ، عکس نقیض آن یعنی $\sim P \Rightarrow \sim Q$ را ثابت می‌کنند.

۳. اگر فرمولی مانند R بیابیم و $P \Rightarrow R$ و $R \Rightarrow Q$ را ثابت کنیم، آن‌گاه بنا بر

قاعده‌ی تعدی گزاره‌های شرطی، $P \Rightarrow Q$ ثابت خواهد شد.

۴. برهان خلف که شرح آن در بالا آمد.

ج- برای اثبات فرمول $(P \wedge Q) \Rightarrow R$ می‌توان $P \Rightarrow R$ یا $Q \Rightarrow R$ را ثابت نمود. مجوز

این کار راستگوی ذیل است:

$$[(P \wedge Q) \Rightarrow R] \Leftrightarrow [(P \Rightarrow R) \vee (Q \Rightarrow R)]$$

د- برای اثبات فرمول $(P \vee Q) \Rightarrow R$ می‌توان $P \Rightarrow R$ و $Q \Rightarrow R$ را ثابت نمود. مجوز

این کار راستگوی ذیل است:

$$[(P \vee Q) \Rightarrow R] \Leftrightarrow [(P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)]$$

فصل ۲

۱.۲ تعیین علامت

عبارتی به صورت $ax + b$ را که در آن $a \neq 0$ و b دو عدد حقیقی معلوم هستند و x متغیر است، یک عبارت درجه‌ی اول (خطی) می‌گویند. این عبارت به ازای هر مقدار معین x مقداری مشخص (مثبت، منفی یا صفر) خواهد داشت. می‌خواهیم ببینیم که این عبارت به ازای چه مقادیری از x ، مثبت، منفی یا صفر است. به عمل یافتن این مقادیر x ، تعیین علامت عبارت $ax + b$ می‌گویند.

دو حالت در نظر می‌گیریم:

الف) $a > 0$ در این صورت

$$ax + b = 0 \iff x + \frac{b}{a} = 0 \iff x = -\frac{b}{a}$$

$$ax + b > 0 \iff a + \frac{b}{a} > 0 \iff x > -\frac{b}{a}$$

$$ax + b < 0 \iff a + \frac{b}{a} < 0 \iff x < -\frac{b}{a}$$

پس

x	$-\frac{b}{a}$
$a > 0, ax + b$	$- \quad 0 \quad +$

(ب) $a < 0$ در این صورت

$$\begin{aligned}
 ax + b = 0 &\iff x + \frac{b}{a} = 0 \iff x = -\frac{b}{a} \\
 ax + b > 0 &\iff x + \frac{b}{a} < 0 \iff x < -\frac{b}{a} \\
 ax + b < 0 &\iff x + \frac{b}{a} > 0 \iff x > -\frac{b}{a}
 \end{aligned}$$

پس

x	$-\frac{b}{a}$
$a < 0, ax + b$	$+ \quad 0 \quad -$

بنابراین در حالت کلی می‌توان نوشت:

x	$-\frac{b}{a}$
$ax + b$	موافق علامت a 0 مخالف علامت a

مثال ۱.۲

عبارت $5 - 3x$ را تعیین علامت کنید.

حل: داریم

$$-3x + 5 = 0 \implies x = \frac{-5}{-3} = \frac{5}{3}$$

پس

x	$\frac{5}{3}$
$-3x + 5$	$+ \quad 0 \quad -$

تبصره ۱.۲ برای تعیین علامت حاصلضرب چند عبارت کافی است آن‌ها را در یک جدول تعیین علامت کنیم و سپس علامت‌ها را در یکدیگر به طور جبری «ضرب» کنیم.

عبارتی به صورت $ax^2 + bx + c$ را که در آن a و b و c اعداد حقیقی هستند و $a \neq 0$ و x یک متغیر است، یک عبارت درجه‌ی دوم می‌نامند. مقدار $\Delta = b^2 - 4ac$ را مبین این عبارت می‌گویند. وقتی $\Delta < 0$ ، عبارت درجه‌ی دوم را تحویل ناپذیر می‌نامند. برای تعیین علامت عبارت درجه‌ی دوم سه حالت در نظر می‌گیریم.

الف) $\Delta > 0$ پس بنا به گزاره‌ای که در ذیل خواهد آمد، معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$

دارای دو ریشه متمایز مانند x_1 و x_2 است و به علاوه

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

بنابراین با فرض $x_1 < x_2$ داریم

x	x_1		x_2	
a	علامت a		علامت a	علامت a
$x - x_1$	-	0	+	+
$x - x_2$	-		-	0
$a(x - x_1)(x - x_2)$	موافق علامت a	0	مخالف علامت a	0

(ب) $\Delta = 0$ پس $x_1 = x_2$ و بنا به جدول بالا

x	x_1	
$a(x - x_1)^2$	موافق علامت a	0

(پ) $\Delta < 0$ در این حالت داریم

$$\begin{aligned}
 ax^2 + bx + c &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \left(\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} \right) - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right) \\
 &= a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right) = a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{\Delta}{4a^2} \right)
 \end{aligned}$$

و چون $\frac{-\Delta}{4a^2} \geq 0$ و $\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 \geq 0$ پس

x	
$ax^2 + bx + c$	همواره موافق علامت a

گزاره ۱.۲ با توجه به آن چه در بند (پ) تبصره‌ی بالا آمد، داریم

$$ax^2 + bx + c = a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right)$$

پس اگر $ax^2 + bx + c = 0$ ، آن گاه $\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$. لذا معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$

دارای جواب است، فقط و فقط وقتی که $\Delta \geq 0$ و در این صورت داریم

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

و لذا

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

که این دستور، دستور (b) برای یافتن ریشه‌های یک معادله‌ی درجه‌ی دوم نامیده می‌شود.

در حالتی که $\Delta = 0$ دو ریشه برابرند و می‌گوییم معادله ریشه مضاعف دارد.

مثال ۲.۲ عبارت $A = x^2(x^2 + x + 1)(-x^2 + 5x - 6)$ را تعیین علامت کنید.

حل: داریم

معادله ریشه‌ی مضاعف دارد $x^2 = 0 \implies x = 0$

$$-x^2 + 5x - 6 = 0 \implies x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{-2} = \frac{-5 \pm 1}{-2} \implies x = 2, 3$$

به علاوه مبین عبارت $x^2 + x + 1$ منفی است، پس

x	0		2		3	
x^2	+	0	+		+	+
$-x^2 + 5x - 6$	-		-	0	+	0 -
$x^2 + x + 1$	+		+		+	+
A	-	0	-	0	+	0 -

مثال ۳.۲ حدود a را چنان تعیین کنید که عبارت $۳x^۲ + x + ۲a$ به ازای تمام مقادیر x مثبت باشد.

حل: چون ضریب $x^۲$ مثبت است، کافی است a را طوری تعیین کنیم که مین عبارت منفی باشد. پس باید $۰ < ۲۴a - ۱$ و یا $a > \frac{۱}{۲۴}$.

۲.۲ حل معادلات و نامعادلات

الف) برای حل معادلات و نامعادلات به صورت

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \geq 0$$

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \leq 0$$

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 > 0$$

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 < 0$$

ابتدا چند جمله‌ای سمت چپ را (به طور منحصر به فرد) به صورت حاصلضرب عوامل خطی (به شکل $ax + b$) و عوامل درجه‌ی دوم تحویل ناپذیر (به شکل $cx^2 + dx + e$) تجزیه می‌کنیم. (قضیه‌ای به نام قضیه‌ی اساسی جبر تضمین می‌کند که چنین تجزیه‌ای همواره ممکن است). سپس تک‌تک عبارت‌های ایجاد شده را مساوی صفر قرار داده و تعیین علامت می‌کنیم.

مثال ۴.۲ معادله‌ی $x^4 - 9 = 0$ را حل کنید.

حل: چون $x^4 - 9 = (x^2 - 3)(x^2 + 3) = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x^2 + 3)$ ، پس جواب‌های معادله عبارت‌اند از $x = \pm\sqrt{3}$

(ب) برای حل معادلات و نامعادلات به صورت

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 0, \frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0, \frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0, \frac{P(x)}{Q(x)} > 0, \frac{P(x)}{Q(x)} < 0$$

که در آن $P(x)$ و $Q(x)$ دو چندجمله‌ای می‌باشند، ابتدا به روشی که در بند قبل گفته شد، $P(x)$ و $Q(x)$ را تعیین علامت می‌کنیم و سپس علامت $\frac{P(x)}{Q(x)}$ را به دست می‌آوریم.

مثال ۵.۲ نامعادله‌ی $\frac{x^2 - 3}{(x-2)(x+3)} \geq 0$ را حل کنید.

حل: داریم

x	-3		$-\sqrt{\frac{3}{2}}$		$\sqrt{\frac{3}{2}}$		2	
$2x^2 - 3$	+	+	0	-	0	+	+	+
$2 - x$	+	+		+		+	0	-
$x + 3$	-	0	+		+	+		+
$\frac{2x^2-3}{(2-x)(x+3)}$	-	×	+	0	-	0	+	×
	×			×				×

(ج) برای حل معادلات و نامعادلات به صورت

$$\begin{aligned} \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} + \dots + \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} &= 0 \\ \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} + \dots + \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} &\geq 0 \\ \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} + \dots + \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} &\leq 0 \\ \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} + \dots + \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} &> 0 \\ \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} + \dots + \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} &< 0 \end{aligned}$$

که در آن $P_1(x), \dots, P_n(x)$ و $Q_1(x), \dots, Q_n(x)$ چند جمله‌ای هستند، ابتدا عبارت

سمت چپ را با مخرج مشترک گرفتن به صورت $\frac{P(x)}{Q(x)}$ تبدیل می‌کنیم و سپس به

روش بند (ب) عمل می‌کنیم.

مثال ۶.۲ نامعادله‌ی $\frac{x-1}{x-3} + \frac{3}{x+3} \geq 1$ را حل کنید.

حل: داریم

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{2-x} + \frac{3}{x+3} - 1 &= \frac{(x-1)(x+3) + 3(2-x) - (2-x)(x+3)}{(2-x)(x+3)} \\ &= \frac{2x^2 - 3}{(2-x)(x+3)} \end{aligned}$$

که همان نامعادله‌ی مثال بند (ب) می‌باشد.

۳.۲ مجموعه‌ها

مجموعه یک مفهوم تعریف نشده است که ما آن را به صورت دسته‌ای از اشیای کاملاً «معین» و دو به دو متمایز توصیف می‌کنیم. اگر a یکی از اشیای مجموعه A باشد می‌گوییم a متعلق به A است و می‌نویسیم $a \in A$. در این حالت a را یک عضو A می‌گوییم. معمولاً مجموعه‌ها را با حروف بزرگ A و B و C و ... و اعضای آن‌ها را با حروف کوچک a و b و c و ... نمایش می‌دهیم.

بنابر اصل گسترش دو مجموعه A و B برابر هستند هرگاه اعضای یکسان داشته باشند،

یعنی هر عضو A متعلق به B باشد و هر عضو B متعلق به A .

مجموعه‌ای که هیچ عضوی ندارد مجموعه‌ی تهی نامیده می‌شود.

مجموعه A را زیرمجموعه‌ی مجموعه‌ی B می‌نامیم و می‌نویسیم $A \subseteq B$ هرگاه هر

عضو A متعلق به B باشد، پس

$$A \subseteq B \iff \forall x; (x \in A \implies x \in B)$$

گزاره ۲.۲ اگر a متعلق به A نباشد می‌نویسیم $a \notin A$. اگر A زیرمجموعه‌ی B نباشد می‌نویسیم $A \not\subseteq B$.

اصلی موسوم به اصل تصریح بیان می‌کند که اگر A یک مجموعه و $F(x)$ یک گزاره‌نما باشد، آن‌گاه می‌توان $\{x \in A \mid F(x) \text{ درست است}\}$ را به عنوان زیرمجموعه‌ای از A در نظر گرفت که شامل اعضای A است که خاصیت F دارند.

در هر مبحثی فرض می‌کنیم که یک مجموعه مانند M موسوم به مجموعه‌ی مرجع وجود دارد که همه‌ی اشیای موردبحث (و همه‌ی مجموعه‌ها و زیرمجموعه‌های آن‌ها) عضو آن هستند.

اگر A و B دو مجموعه باشند مجموعه‌های

$$\{x \in M \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

$$\{x \in M \mid x \in A \vee x \in B\}$$

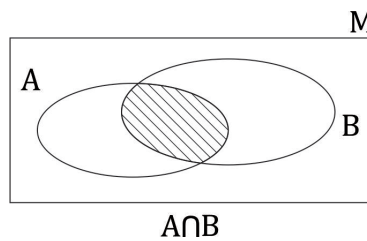
$$\{x \in M \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

به ترتیب اشتراک، اجتماع و تفاضل A و B نامیده می‌شوند و با $A \cap B$ و $A \cup B$ و $A - B$

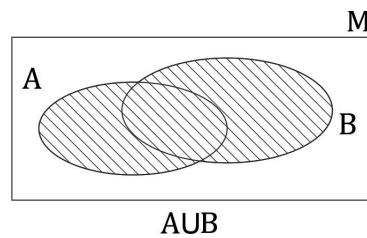
نمایش داده می‌شوند. به ویژه $M - A$ را متمم A نامیده و با A^c نمایش می‌دهند.

می‌توان مجموعه‌ی مرجع و مجموعه‌های موردبحث و اشتراک، اجتماع و تفاضل

آن‌ها را توسط اشکالی هندسی در صفحه نشان داد، که این طریقه نمایش، نمودار ون نامیده می‌شود.



شکل ۱.۲: اشتراک دو مجموعه



شکل ۲.۲: اجتماع دو مجموعه

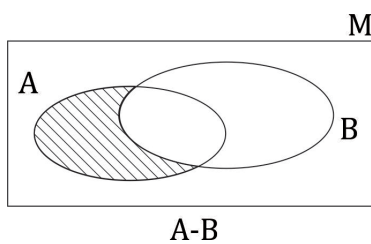
مجموعه تمام زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی A را با $\mathcal{P}(A)$ یا 2^A نمایش داده و آن را مجموعه‌ی توانی A می‌نامیم.

مسأله) ثابت کنید فقط یک مجموعه تهی در عالم وجود دارد.

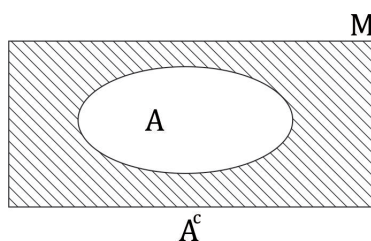
حل: فرض کنیم M یک مجموعه (مثلاً مجموعه‌ی تمام انسان‌های روی کره‌ی زمین) باشد. بنا به اصل تصریح مجموعه‌ی $\{x \in M \mid x \neq x\}$ که هیچ عضوی ندارد وجود دارد. بنابراین لااقل یک مجموعه‌ی تهی وجود دارد. حال اگر دو مجموعه‌ی تهی متمایز مانند A_1 و A_2 در عالم وجود داشته باشد، بنا به اصل گسترش باید یکی از آن‌ها عضوی می‌داشت که در دیگری نباشد. اما مجموعه‌ی تهی هیچ عضوی ندارد و این امکان‌پذیر

نیست.

قرارداد: مجموعه تهی را با ϕ نمایش می‌دهند.



شکل ۳.۲: تفاضل دو مجموعه



شکل ۴.۲: متمم یک مجموعه

تعریف ۱.۲ اگر برای دو شیء a و b ، ترتیبی خاص، یعنی تقدم و تأخر قائل شویم،

می‌نویسم (a, b) و آن را زوج مرتب می‌نامیم. به بیان دقیق‌تر

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

از این تعریف با توجه به اصل گسترش به سادگی نتیجه می‌شود که دو زوج مرتب (a, b)

و (c, d) برابرند، فقط و فقط وقتی که $a = c$ و $b = d$

a را مؤلفه اول (یا مختص اول) و b را مؤلفه دوم (یا مختص دوم) زوج مرتب (a, b)

می‌نامند. اگر A و B دو مجموعه باشند، مجموعه

$$\{(a, b) | a \in A \wedge b \in B\}$$

حاصلضرب دکارتی A و B نامیده می‌شود و با $A \times B$ نمایش داده می‌شود.

مثال ۲.۲

$$\{1, \{1\}\} \times \{*, \phi\} = \{(1, *), (1, \phi), (\{1\}, *), (\{1\}, \phi)\}$$

توجه کنید که

$$\{1\} \times \{2\} = \{(1, 2)\} \neq \{(2, 1)\} = \{2\} \times \{1\}$$

و بنابراین $\times$ خاصیت جابجایی ندارد.

تعریف ۲.۲ هر زیرمجموعه از $A \times B$ را یک رابطه از A به B می‌گویند.

تعریف ۳.۲ یک رابطه مانند f از A به B (یعنی $f \subseteq A \times B$) که در آن هیچ دو زوج

مرتب متفاوتی دارای مؤلفه‌های اول مساوی نیستند یک تابع از A به B نامیده می‌شود و

در این صورت می‌گوییم $f: A \rightarrow B$ یک تابع است.

مجموعه A را مجموعه‌ی آغاز و مجموعه‌ی B را مجموعه‌ی پایان می‌نامند. مجموعه‌ی

مؤلفه‌های اول اعضای f را حوزه‌ی تعریف (یا دامنه تعریف) f نامیده و با D_f نمایش

می‌دهیم. مجموعه‌ی مؤلفه‌های دوم اعضای f را حوزه تعریف حوزه مقادیر (یا برد) f

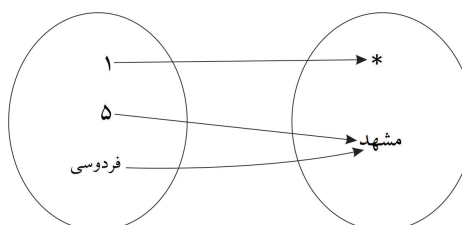
نامیده و با R_f نمایش می‌دهیم. توجه کنید که $D_f \subseteq A$ و $R_f \subseteq B$.

اگر $(a, b) \in f$ ، آن گاه b را تصویر a تحت f می نامند و می نویسند $b = f(a)$ یا $a \xrightarrow{f} b$. گاهی اوقات ضابطه‌ای وجود دارد که تعیین می کند هر x دلخواه از D_f توسط f به چه عضوی از مجموعه پایان برده می شود. به این ضابطه که به صورت $y = f(x)$ بیان می شود، ضابطه‌ی تابع می گویند.

در حالت کلی یک تابع با سه چیز مشخص می شود: ۱- مجموعه‌ی آغاز ۲- مجموعه‌ی پایان ۳- زوج‌های مرتب.

همچنین چون با معلوم بودن حوزه‌ی تعریف و ضابطه‌ی یک تابع، زوج‌های آن معین می گردد می توان گفت که یک تابع با چهار چیز مشخص می شود: ۱- مجموعه‌ی آغاز ۲- مجموعه‌ی پایان ۳- حوزه‌ی تعریف ۴- ضابطه‌ی تابع

مثال ۸.۲ ضابطه‌ی تابع



عبارت است از

$$f(x) = \begin{cases} * & \text{اگر } x = 1 \\ \text{مشهد} & \text{اگر } a \in \{5, \text{فردوسی}\} \end{cases}$$

یک تابع مانند $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ را یک تابع حقیقی می گویند. با داشتن ضابطه‌ی یک تابع حقیقی می توان بزرگ ترین مجموعه‌ی ممکن از x هایی که به ازای آن‌ها $f(x)$ معین است

را مشخص کرد. این مجموعه را حوزه‌ی تعریف تابع فرض می‌کنیم. پس می‌توان گفت که هر تابع حقیقی تنها با ضابطه‌اش معین می‌گردد.

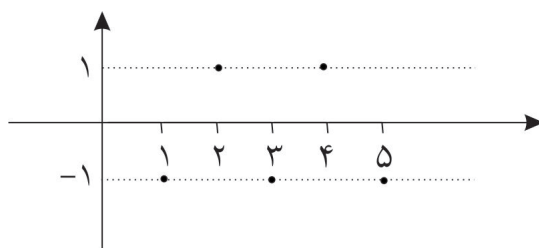
می‌توان از نمودار پیکانی برای نمایش یک رابطه مانند f استفاده نمود. برای رسم نمودار پیکانی ابتدا نمودار ون مجموعه‌های آغاز و پایان را رسم می‌کنیم و سپس اگر $(a, b) \in f$ ، یک پیکان با ابتدای a و انتهای b رسم می‌کنیم (همانند آن چه در مثال فوق عمل کردیم). از نظر نمودار پیکانی، تابع، رابطه‌ای است که در آن از هر عضو مجموعه‌ی آغاز حداکثر یک پیکان خارج شود.

همچنین از نمودار دکارتی برای نمایش یک رابطه مانند F از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ استفاده می‌شود. برای این منظور کافی است دو محور متعامد ox و oy (ترجیحاً با واحد یکسان) رسم کنیم و سپس اگر $(a, b) \in f$ ، آن‌گاه نقطه با مختصات (a, b) را در صفحه مشخص سازیم. از نظر نمودار دکارتی، تابع، رابطه‌ای است که در آن هیچ دو نقطه‌ای روی یک خط موازی محور oy قرار نداشته باشند.

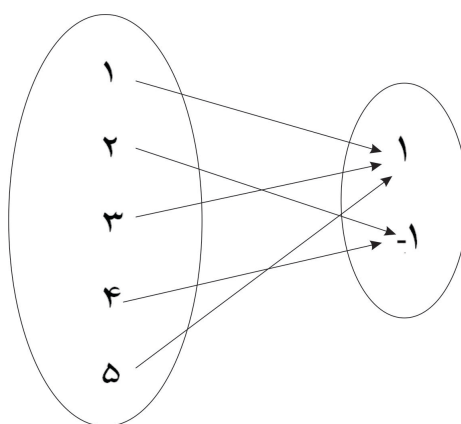
مثال ۹.۲ نمودار دکارتی تابع

$$\left\{ \begin{array}{l} f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ D_f = \mathbb{N} \\ f(x) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } n \text{ زوج} \\ -1 & \text{اگر } n \text{ فرد} \end{cases} \end{array} \right.$$

به صورت

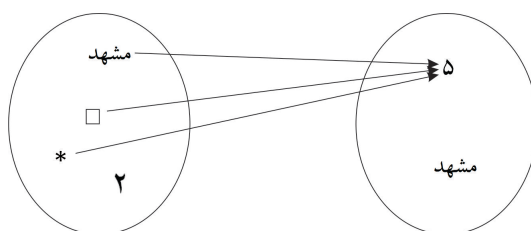


و نمودار پیکانی آن به صورت



می باشد.

مثال ۱۰.۲ تابع



عبارت است از

$$\begin{cases} g : A \longrightarrow B \\ g = \{(\text{مشهد}, ۵), (\square, ۵), (*, ۵)\} \end{cases}$$

یا

$$\begin{cases} g : A \longrightarrow B \\ D_g = \{\text{مشهد}, \square, *\} \\ g(x) = ۵ \end{cases}$$

فرض کنیم f و g دو تابع حقیقی با حوزه‌ی تعریف D_f و D_g و λ عددی حقیقی باشد.

در این صورت توابع حقیقی $f+g$ ، $f-g$ ، fg ، $\frac{f}{g}$ ، و $f \circ g$ به ترتیب با ضابطه‌های ذیل

تعریف می‌شوند.

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

با توجه به ضابطه‌ی این توابع، حوزه تعریف سه تابع اول $D_f \cap D_g$ است. به علاوه

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \in D_g | g(x) = ۰\}$$

$$D_{\lambda f} = D_f$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

مثال ۱۱.۲ فرض کنید

$$f = \{(1, -1), (-2, 0), (3, 1), (4, 0)\}$$

$$g = \{(0, \sqrt{2}), (1, 0), (-2, 5), (5, \frac{1}{4})\}$$

در این صورت

$$D_f = \{1, -2, 3, 4\} \quad , \quad D_g = \{0, 1, -2, 5\}$$

و چون $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ پس

$$\begin{aligned} f+g &= \{(1, f(1) + g(1)), (-2, f(-2) + g(-2))\} \\ &= \{(1, -1), (-2, 5)\} \end{aligned}$$

همچنین

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \in D_g \mid g(x) = 0\} = \{1, -2\} - \{1\} = \{-2\}$$

پس

$$\frac{f}{g} = \left\{ \left(-2, \frac{f(-2)}{g(-2)} \right) \right\} = \{(-2, 0)\}$$

به علاوه

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in \{1, -2, 3, 4\} \mid f(x) \in \{0, 1, -2, 5\}\}$$

$$= \{-۲, ۳, ۴\}$$

و چون $(gof)(x) = g(f(x))$ پس

$$gof = \{(-۲, g(f(-۲))), (۳, g(f(۳)))\} = \{(-۲, \sqrt{۲}), (۳, ۵)\}$$

مثال ۱۲.۲ اگر $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = x^۲$ و $h(x) = \frac{1}{x}$ آن گاه

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = \sqrt{x} - x^۲ ; \quad D_{f-g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R}^{\geq 0} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}^{\geq 0}$$

$$(gof)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^۲ = x ; \quad D_{gof} = \{x \in \mathbb{R}^{\geq 0} | \sqrt{x} \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^{\geq 0}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^۲) = \sqrt{x^۲} = |x| ; \quad D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} | x^۲ \in \mathbb{R}^{\geq 0}\} = \mathbb{R}$$

$$(hoh)(x) = h(h(x)) = h\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x ; \quad D_{hoh} = \left\{x \in \mathbb{R} - \{0\} \mid \frac{1}{x} \in \mathbb{R} - \{0\}\right\} = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$(\mathfrak{V}h)(x) = \mathfrak{V}h(x) = \frac{\mathfrak{V}}{x} ; \quad D_{\mathfrak{V}h} = D_h = \mathbb{R} - \{0\}$$

۴.۲ انواع تابع

فرض کنید $f: A \rightarrow B$ یک تابع با حوزه‌ی تعریف D_f باشد.

۱. f را یک به یک گویند هرگاه

$$\forall x_۱, x_۲ \in D_f; (x_۱ \neq x_۲ \implies f(x_۱) \neq f(x_۲))$$

یا به طور معادل (به کمک عکس نقیض)

$$\forall x_۱, x_۲ \in D_f; (f(x_۱) = f(x_۲) \implies x_۱ = x_۲)$$

از نظر نمودار پیکانی، تابع یک به یک آن است که به هر عضو مجموعه‌ی پایان، حداکثر یک پیکان وارد شود.

از نظر نمودار دکارتی، تابع حقیقی یک به یک آن است که هر خط موازی محور x ها نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

۲. f را پوششی گویند هرگاه $R_f = B$. به عبارت دیگر

$$\forall y \in B \exists x \in D_f; f(x) = y$$

از نظر نمودار پیکانی، تابع پوششی آن است که به هر عضو مجموعه‌ی پایان، حداقل یک پیکان وارد شود.

از نظر نمودار دکارتی، یک تابع حقیقی پوششی آن است که هر خط موازی محور x ها نمودار تابع را در حداقل یک نقطه قطع کند.

۳. f را دوسویی، یا یک به یک-پوشا یا تناظر یک به یک می‌نامند هرگاه هم یک به یک و هم پوششی باشد.

۴. f را تابع ثابت می‌گویند هرگاه R_f تک‌عضوی باشد یعنی ضابطه‌ی تابع به صورت $y = f(x) = c$ (که در آن c شیء معین است) باشد.

از نظر نمودار پیکانی یک تابع، ثابت است هرگاه همه‌ی پیکان‌ها به یک عضو در مجموعه‌ی پایان وارد شده باشند.

از نظر نمودار دکارتی، یک تابع حقیقی ثابت است هرگاه نمودارش قسمتی از یک خط موازی محور x ها باشد.

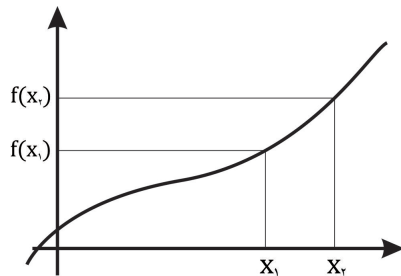
۵.۲ انواع تابع حقیقی

فرض کنید f یک تابع حقیقی با حوزه‌ی تعریف D_f باشد.

۱. f را صعودی می‌گویند هرگاه

$$\forall x_1, x_2 \in D_f; (x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2))$$

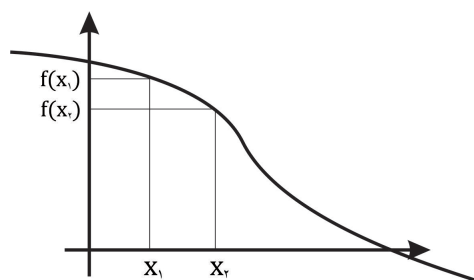
از نظر نمودار دکارتی تابع f صعودی است هرگاه وقتی روی محور x ها به سمت راست حرکت کنیم، عرض نقاط واقع بر نمودار f افزایش یابد.



۲. f را نزولی می‌گویند هرگاه

$$\forall x_1, x_2 \in D_f; (x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2))$$

از نظر نمودار دکارتی تابع f نزولی است هرگاه وقتی روی محور x ها به سمت راست حرکت کنیم، عرض نقاط واقع بر نمودار f کاهش یابد.

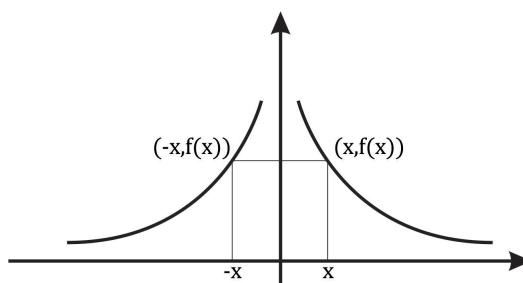


گزاره ۳.۲ اگر در تعریف تابع صعودی یا نزولی به جای $\leq$ از $<$ استفاده کنیم به تعریف تابع اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی دست می‌یابیم.

۳. f را زوج می‌گویند هرگاه

$$\forall x \in D_f; (-x \in D_f \ \& \ f(-x) = f(x))$$

چون (x, y) و $(-x, y)$ قرینه‌ی هم نسبت به محور y ها هستند، نمودار یک تابع زوج نسبت به محور y ها تقارن دارد.

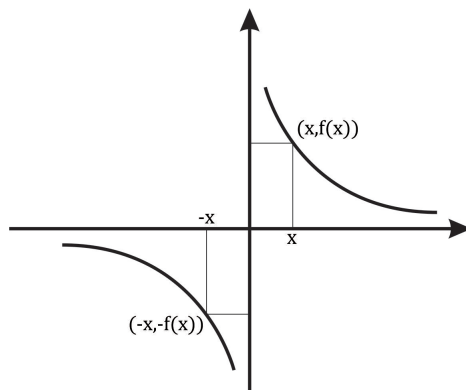


۴. f را فرد می‌گویند هرگاه

$$\forall x \in D_f; (-x \in D_f \ \& \ f(-x) = -f(x))$$

چون (x, y) و $(-x, -y)$ قرینه‌ی هم نسبت به مبدأ هستند، نمودار یک تابع فرد

نسبت به مبدأ مختصات تقارن دارد.

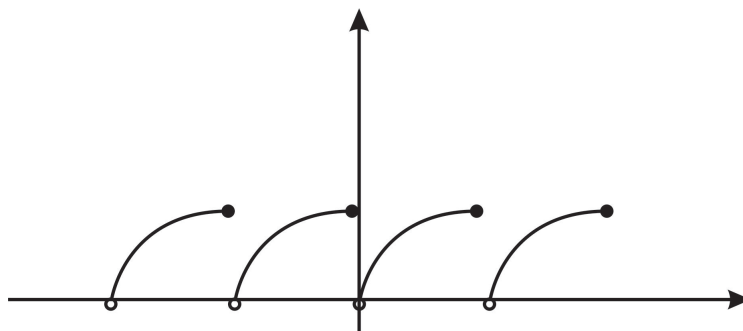


۵. f را متناوب می‌گویند هرگاه

$$\exists T > 0, \forall x \in D_f; (x + T \in D_f \text{ \& } f(x + T) = f(x))$$

کوچک‌ترین عدد $T > 0$ را (در صورت وجود) دوره‌ی تناوب f می‌گویند. (در

زیر تابعی مثال می‌زنیم که متناوب است ولی دوره تناوب ندارد.)



از نظر نمودار دکارتی، نمودار یک تابع متناوب از انتقال‌های متوالی به چپ و

راست یک قسمت معین از نمودارش که به ازای $x \in D_f$ های در یک فاصله‌ی به

طول T رسم شده است، به دست می‌آید.

مثال‌ها

۱. تابع $f(x) = x^3 + 2x$ اکیداً صعودی است زیرا به ازای هر x_1 و x_2 در $\mathbb{R}$

$$x_1 < x_2 \implies x_1^3 < x_2^3 \implies x_1^3 + 2x_1 < x_2^3 + 2x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$$

۲. تابع $f(x) = 5$ نزولی است زیرا

$$\forall x_1, x_2 \in D_f = \mathbb{R}; \quad x_1 < x_2 \implies f(x_1) = 5 \geq 5 = f(x_2)$$

همچنین این تابع ثابت است.

۳. تابع $f(x) = 2x^2 + \cos x$ زوج است زیرا

$$\forall x \in D_f = \mathbb{R}; \quad -x \in D_f \text{ \& } f(-x) = 2(-x)^2 + \cos(-x) = f(x)$$

۴. تابع $f(x) = \frac{-1}{x^3}$ فرد است زیرا

$$\forall x \in D_f = \mathbb{R} - \{0\}; \quad -x \in D_f \text{ \& } f(-x) = \frac{-1}{(-x)^3} = \frac{-1}{-x^3} = -f(x)$$

۵. تابع $f(x) = 3 \sin x$ متناوب است زیرا اگر $T = 4\pi$ ، آن‌گاه

$$\forall x \in D_f = \mathbb{R}; \quad x + T \in D_f \text{ \& } f(x + T) = 3 \sin(x + 4\pi) = f(x)$$

۶. تابع ثابت $f(x) = c$ متناوب است زیرا اگر $T > 0$ دلخواه باشد، آن‌گاه

$$\forall x \in D_f = \mathbb{R}; \quad x + T \in D_f \text{ \& } f(x + T) = c = f(x)$$

ولی کوچک‌ترین دوره‌ی تناوب ندارد.

تعریف ۴.۲ اگر $f : A \rightarrow B$ یک تابع باشد، با تعویض جای مؤلفه‌های اول و دوم زوج‌های f (یا در نمودار پیکانی با تغییر جهت پیکان‌ها) به یک رابطه مانند g از B به A دست می‌یابیم. این g تابع است فقط و فقط وقتی که f یک به یک باشد، زیرا

$$(a, b), (a, c) \in g \iff (b, a)(c, a) \in f$$

اگر f یک به یک باشد، آن را معکوس‌پذیر می‌گویند و در این حالت تابع g بالا را با f^{-1} نمایش می‌دهند و آن را معکوس f می‌گویند. لذا

$$(x, y) \in f \iff (y, x) \in f^{-1}$$

$$y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$$

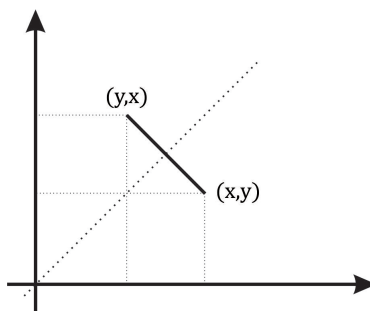
در این صورت بنا به تعریف

$$\begin{cases} f^{-1} : B \rightarrow A \\ D_{f^{-1}} = R_f \\ x = f^{-1}(y) \iff y = f(x) \end{cases}$$

و $R_{f^{-1}} = D_f$.

چون (x, y) و (y, x) قرینه‌ی یکدیگر نسبت به خط $y = x$ هستند، اگر نمودارهای $y = f(x)$ و $y = f^{-1}(x)$ در یک دستگاه رسم شوند، قرینه‌ی یکدیگر نسبت به خط $y = x$ خواهد بود.

لذا برای رسم نمودار f^{-1} می‌توان نمودار f را روی کاغذ رسم کرد، کاغذ را ۹۰ درجه چرخاند و از پشت به کاغذ نگاه کرد.



مثال ۱۳.۲ نشان دهید که تابع

$$\begin{cases} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ D_f = \mathbb{R}^{\geq 0} \\ y = f(x) = x^2 \end{cases}$$

معکوس پذیر است و سپس f^{-1} را بیابید.

حل. فرض کنیم x_1 و x_2 دو عدد دلخواه در D_f باشند، داریم

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow \sqrt{x_1^2} = \sqrt{x_2^2} \Rightarrow x_1 = x_2$$

زیرا x_1 و x_2 نامنفی هستند. پس f یک به یک و لذا معکوس پذیر است. چون

$$y = f(x) = x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{y}$$

و چون $x \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ پس $x = \sqrt{y}$ بنابراین

$$\begin{cases} f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ D_{f^{-1}} = R_f = \mathbb{R}^{\geq 0} \\ x = f^{-1}(y) = \sqrt{y} \end{cases}$$

□

مثال ۱۴.۲ معکوس تابع حقیقی $f = \{(1, -1), (-1, 2), (0, 0)\}$ چیست؟

حل.

$$f^{-1} = \{(-1, 1), (2, -1), (0, 0)\}$$

□

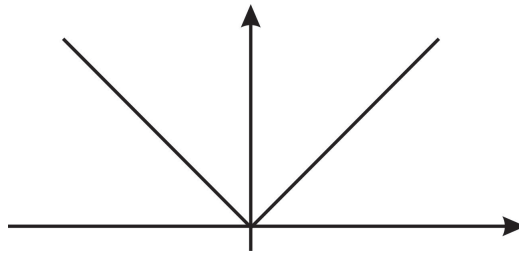
۶.۲ توابع خاص

الف) تابع قدرمطلق:

تابع

$$\left\{ \begin{array}{l} | \cdot | : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ D_{|\cdot|} = \mathbb{R} \\ y = |x| = \begin{cases} x & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -x & x < 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

را تابع قدرمطلق می نامند.



تمرین ۱.۲ ثابت کنید تابع قدرمطلق خواص زیر را داراست.

$$|-x| = |x|$$

$$|x \pm y| \leq |x| + |y|$$

$$-|x| \leq x \leq |x|$$

$$\|x\| = |x|$$

$$|x| < a \iff -a < x < a \quad (a > 0)$$

$$||x| - |y|| \leq |x \pm y|$$

$$|xy| = |x| |y|$$

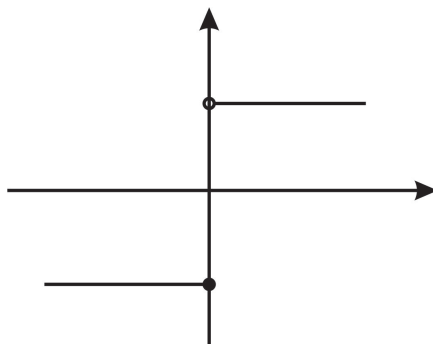
$$x^2 \leq a^2 \iff |x| \leq |a|$$

(ب) تابع علامت:

تابع

$$\left\{ \begin{array}{l} sgn : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ D_{sgn} = \mathbb{R} \\ sgn \ x = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

را تابع علامت می‌نامند.



تمرین ۲.۲ ثابت کنید تابع علامت خواص زیر را داراست.

$$sgn(sgn \ x) = sgn \ x$$

$$x = sgn \ x \cdot |x|$$

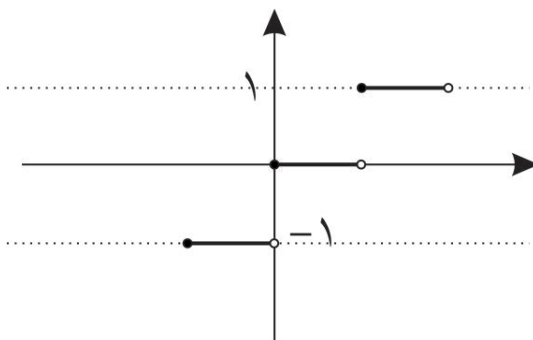
$$sgn(-x) = -sgn \ x$$

(پ) تابع جزء صحیح

می‌دانیم به ازای هر عدد حقیقی x یک عدد صحیح منحصر به فرد n وجود دارد که $n \leq x < n + 1$ این عدد صحیح را جزء صحیح x می‌خوانند و با $[x]$ نشان می‌دهند و تابع

$$\left\{ \begin{array}{l} [.] : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ D_{[.]} = \mathbb{R} \\ y = [x] = n \iff n \leq x < n + 1 \quad (n \in \mathbb{Z}) \end{array} \right.$$

را تابع جزء صحیح می‌نامند.



تمرین ۳.۲ ثابت کنید تابع جزء صحیح خواص زیر را داراست.

$$0 \leq x - [x] < 1$$

$$x - 1 < [x] \leq x$$

$$[-x] = \begin{cases} -[x] & x \in \mathbb{Z} \\ -[x] - 1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\forall k \in \mathbb{Z} ; [x + k] = [x] + k$$

$$\exists x ; [\lceil x \rceil] \neq \lceil [x] \rceil$$

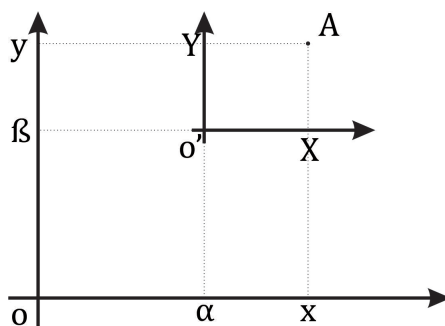
$$\left[\frac{x}{n} \right] = \left[\frac{\left[\frac{x}{n} \right]}{x} \right]$$

۷.۲ رسم نمودار بعضی توابع از روی نمودار f

دستگاه xoy و نقطه‌ی $o' |_{\beta}^{\alpha}$ از صفحه را در نظر بگیرید. دستگاه xoy را به نقطه‌ی o' انتقال می‌دهیم و فرض می‌کنیم محورهای جدید به طور متناظر موازی محورهای قدیم باشند. دستگاه جدید را $XO'Y$ می‌نامیم. اگر نقطه‌ای از صفحه باشد، مختصات آن در دستگاه

قدیم (x, y) و در دستگاه جدید (X, Y) باشد، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x = X + \alpha \\ y = Y + \beta \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} X = x - \alpha \\ Y = y - \beta \end{cases}$$



مثال ۱۵.۲ دستگاه xoy را به نقطه‌ی $o' |_{2}^{1}$ انتقال می‌دهیم. در این صورت معادله‌ی خط

$y = 3x - 1$ در دستگاه جدید عبارت خواهد بود از

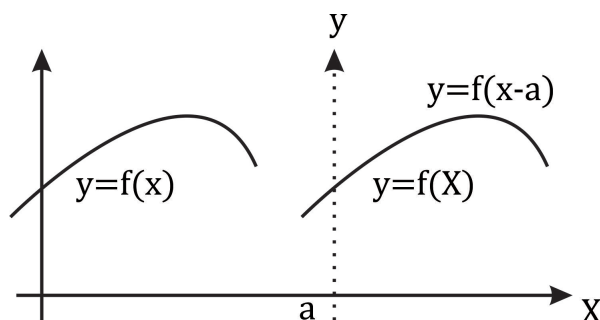
$$Y = 3X - 2 \quad \text{یا} \quad (Y + 2) = 3(X + 1) - 3$$

تعریف ۵.۲ انتقال نقطه‌ی $A|_y^x$ به اندازه‌ی a در راستای محور X ها یعنی در نظر گرفتن

$$A_1|_y^{x+a} \text{ و انتقال به اندازه‌ی } b \text{ در راستای محور } y \text{ ها یعنی در نظر گرفتن } A_2|_{y+b}^x$$

۱. رسم نمودار تابع $y = f(x - a)$

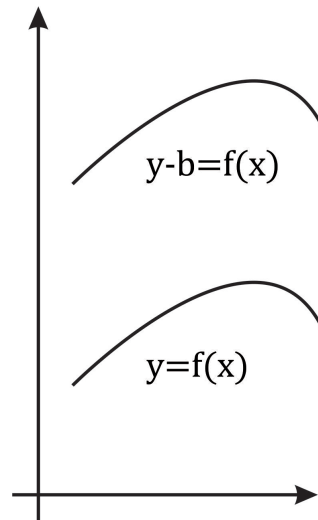
دستگاه xoy را به نقطه‌ی $o'|^a$ انتقال می‌دهیم، در این صورت معادله‌ی تابع $y = f(x - a)$ عبارت خواهد شد از $Y = f(X)$ که نمودار آن طبق فرض معلوم است. آن را رسم می‌کنیم. حال دستگاه $Xo'Y$ را به نقطه‌ی O که در این دستگاه دارای مختصات $|-^a$ است انتقال می‌دهیم تا دوباره به دستگاه xoy برسیم. بدین ترتیب نمودار $y = f(x - a)$ به دست می‌آید. توجه کنید که ما دستگاه محورها را منتقل می‌کنیم نه نقاط صفحه و به ویژه منحنی رسم شده را. می‌توان گفت که نمودار $y = f(x - a)$ با انتقال نمودار تابع $y = f(x)$ در راستای محور x ها به اندازه‌ی a و به راست یا چپ بسته به مثبت یا منفی بودن a به دست می‌آید.



۲. رسم نمودار تابع $y - b = f(x)$

به طریق مشابه با $y = f(x - a)$ می‌توان گفت که نمودار $y - b = f(x)$ با انتقال

نمودار تابع $y = f(x)$ به اندازه‌ی b در راستای محور y ها (به بالا یا پایین بسته به مثبت یا منفی بودن b) به دست می‌آید.



۳. رسم نمودار تابع $y = g(x) = cf(x)$ (که $c \neq 0$)

اگر (x_0, y_0) نقطه‌ای از نمودار $y = f(x)$ باشد، نقطه‌ی (x_0, cy_0) نقطه‌ای از نمودار

$$y = g(x) \text{ است زیرا } g(x_0) = cf(x_0) = cy_0$$

و بالعکس اگر (u, v) نقطه‌ای از نمودار تابع g باشد، آن گاه $(u, \frac{v}{c})$ نقطه‌ای از نمودار

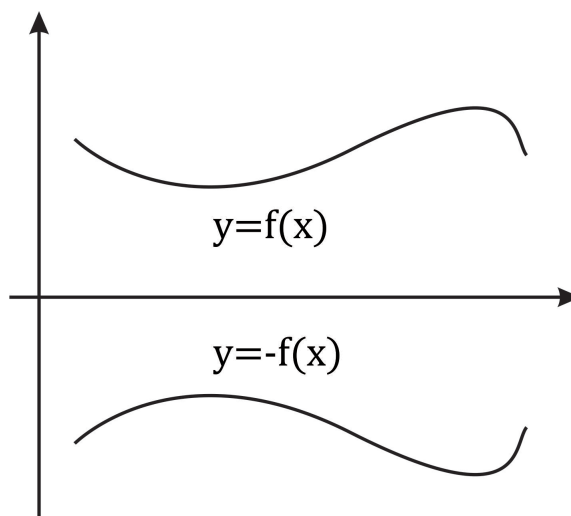
f است، زیرا $v = g(x) = cf(x)$ و لذا $\frac{v}{c} = f(x)$. پس برای به دست آوردن

نمودار تابع $g = cf$ از روی نمودار f ، عرض نقاط نمودار f را (البته با حفظ طول

آن‌ها) c برابر می‌کنیم.

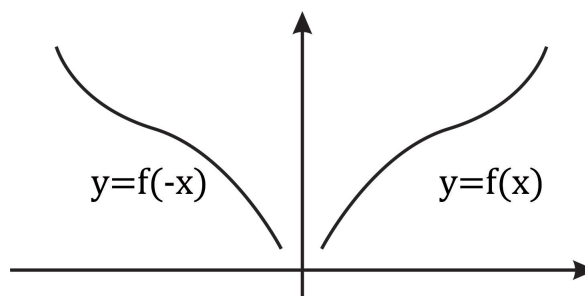
به ویژه وقتی که $c = -1$ ، نتیجه می‌شود که نمودار $y = -f(x)$ قرینه‌ی نمودار

$$y = f(x) \text{ نسبت به محور } x \text{ هاست.}$$



۴. رسم نمودار تابع $y = g(x) = f(dx)$ (که $d \neq 0$)

چون $(x_0, y_0) \in g$ فقط و فقط وقتی که $(dx_0, y_0) \in f$ ، پس می‌توان گفت که عرض نقطه‌ی نظیر x_0 از نمودار g عبارت است از عرض نقطه‌ی نظیر dx_0 از نمودار f . به ویژه وقتی $d = -1$ ، نتیجه می‌شود که نمودار $y = f(-x)$ قرینه‌ی نمودار $y = f(x)$ نسبت به محور y ها است.

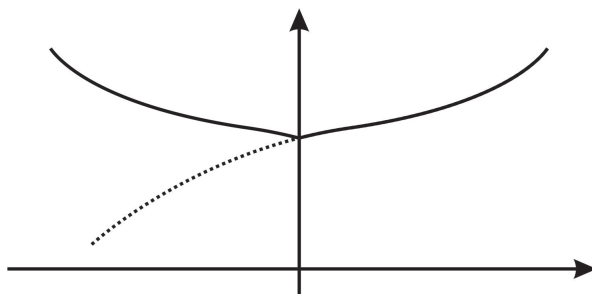


۵. رسم نمودار تابع $y = g(x) = f(|x|)$

چون

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & x \geq 0 \\ f(-x) & x \leq 0 \end{cases}$$

پس نمودار g برای x های نامنفی عبارت است از نمودار f در نیم صفحه ی سمت راست و برای x های نامثبت قرینه ی نمودار f در نیم صفحه ی سمت راست نسبت به محور y ها است.



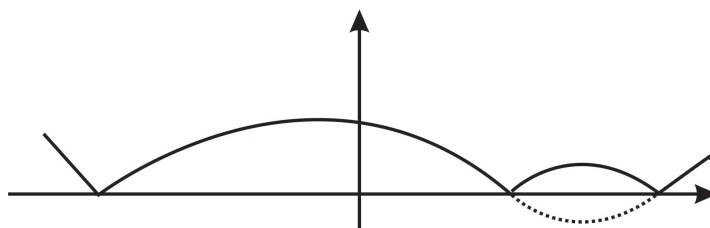
۶. رسم نمودار تابع $y = g(x) = |f(x)|$

چون

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & f(x) \geq 0 \\ -f(x) & f(x) \leq 0 \end{cases}$$

پس نمودار g برای x هایی که نمودار f بالا یا روی محور x ها است همان قسمت از نمودار f و برای x هایی که نمودار f زیر محور x ها است، قرینه ی همین قسمت از نمودار f نسبت به محور x ها است.

۷. رسم نمودار تابع $y = g(x) = f(\operatorname{sgn} x)$

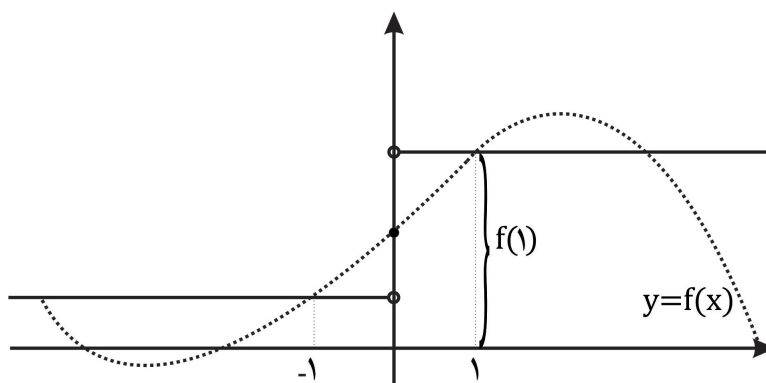


چون

$$g(x) = \begin{cases} f(1) & x > 0 \\ f(0) & x = 0 \\ f(-1) & x < 0 \end{cases}$$

پس نمودار g قسمتی از خطوط $y = f(1)$ و $y = f(-1)$ است.

ضمناً $f(0) = g(0)$.

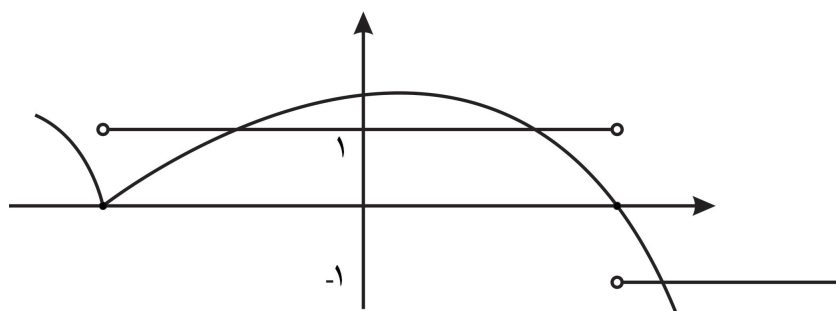


۸ رسم نمودار تابع $y = g(x) = \text{sgn}(f(x))$.

چون

$$g(x) = \begin{cases} 1 & f(x) > 0 \\ 0 & f(x) = 0 \\ -1 & f(x) < 0 \end{cases}$$

پس نمودار g قسمتی از خطوط $y = 1$ و $y = 0$ و $y = -1$ است.



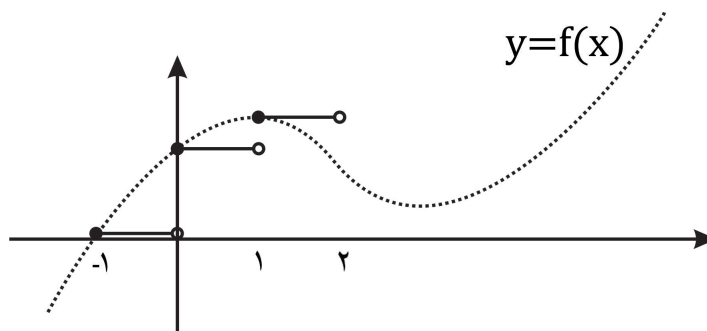
۹. رسم نمودار تابع $y = g(x) = f([x])$.

چون

$$g(x) = \begin{cases} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ f(-1) & -1 \leq x < 0 \\ f(0) & 0 \leq x < 1 \\ f(1) & 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

پس برای هر n نمودار g در فاصله $1 \leq x < n+1$ قسمتی از خط $y = f(n)$

است.



۱۰. رسم نمودار تابع $y = g(x) = [f(x)]$

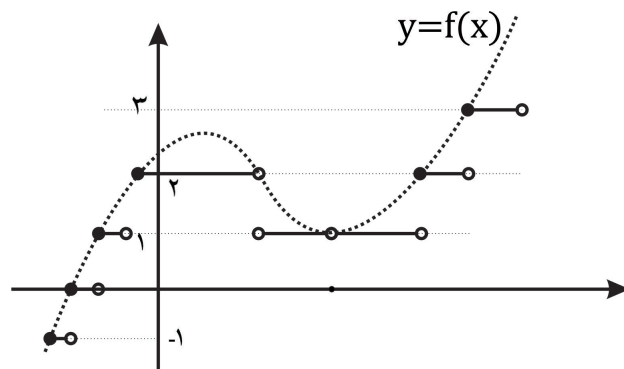
چون

$$g(x) = \begin{cases} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ -1 & -1 \leq f(x) < 0 \\ 0 & 0 \leq f(x) < 1 \\ 1 & 1 \leq f(x) < 2 \end{cases}$$

پس برای هر x اگر $n \leq f(x) < n+1$ آن گاه $g(x) = n$ یعنی برای هر n قسمتی

از نمودار f که بین دو خط $y = n$ و $y = n+1$ واقع است بر خط $y = n$ تصویر

می شود.



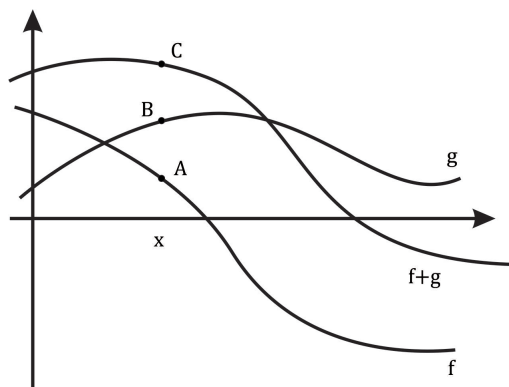
۸.۲ رسم نمودار بعضی از توابع از روی نمودار توابع f

و g

۱. رسم نمودار تابع $f + g$

چون $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ ، پس برای هر $x \in D_{f+g} = D_f \cap D_g$ اگر

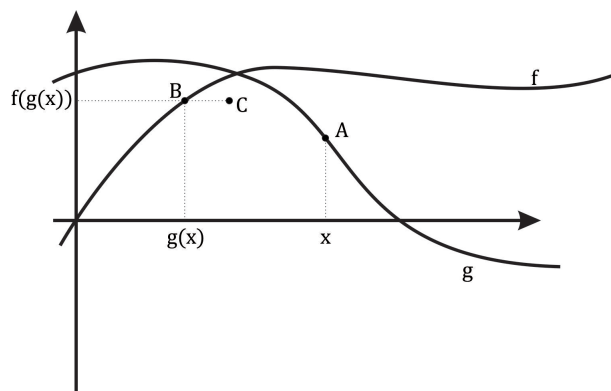
$A|_{f(x)}^x$ و $B|_{g(x)}^x$ آن گاه $C|_{f(x)+g(x)}^x$ نقطه‌ی نظیر طول x از نمودار $f + g$ است.



۲. رسم نمودار تابع $f \circ g$

چون $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ ، پس برای هر $x \in D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$

اگر $A|_{g(x)}^x$ و $B|_{f(g(x))}^{g(x)}$ آن گاه $C|_{f(g(x))}^x$ نقطه‌ی نظیر x بر نمودار $f \circ g$ است.



فصل ۳

حد

فرض کنیم $+\infty$ و $-\infty$ دو شیء ریاضی باشند که عدد حقیقی نیستند قرار می دهیم

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

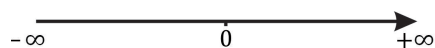
و $\mathbb{R}^*$ را دستگاه وسعت یافته ی اعداد حقیقی می نامیم. برای هر $x \in \mathbb{R}$ ، قرار می دهیم

$$-\infty < x < +\infty$$

$+\infty$ و $-\infty$ را اعداد جدیدی (به نام مثبت بی نهایت و منفی بی نهایت) که عدد حقیقی

نیستند تصور می کنیم (گاهی آن ها را اعداد نامتناهی می گویند).

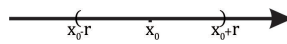
$+\infty$ و $-\infty$ را می توان به ترتیب انتهای راست و چپ محور اعداد حقیقی تصور کرد.



تعریف ۱.۳ الف) فرض کنیم $x_0 \in \mathbb{R}$ و $r > 0$.

$$\begin{aligned} N_r(x_0) &= \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < r\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid -r < x - x_0 < r\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x_0 - r < x < x_0 + r\} \\ &= (x_0 - r, x_0 + r) \end{aligned}$$

را همسایگی به مرکز x_0 و شعاع r می گویند.



همچنین

$$N'_r(x_0) = N_r(x_0) - \{x_0\}$$

را همسایگی محذوف x_0 و به شعاع r می گویند.

ب) فرض کنیم $M > 0$

$$\begin{aligned} N_M(+\infty) &= \{x \in \mathbb{R} \mid x > M\} \\ &= (M, +\infty) \end{aligned}$$

را همسایگی به مرکز $+\infty$ و به شعاع M می گویند.

ج) فرض کنیم $M' > 0$

$$N_{M'}(-\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -M'\}$$

$$= (-\infty, -M')$$

را همسایگی به مرکز $-\infty$ و به شعاع M' می گویند.

تعریف ۲.۳ فرض کنیم $\ell \in \mathbb{R}^*$. می گوئیم حد $f(x)$ وقتی x به a میل کند برابر ℓ است و می نویسیم

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$$

هرگاه مقادیر $f(x)$ هر قدر که بخواهیم بتوانیم به ℓ نزدیک کنیم وقتی که x به اندازه‌ی کافی به a نزدیک شده باشد، به عبارت دیگر به ازای هر همسایگی ℓ یک همسایگی از a موجود باشد که برای هر $x \neq a$ در آن همسایگی، $f(x)$ در همسایگی مورد نظر ℓ قرار گیرد. با توجه به این که a و ℓ معلومند، همسایگی‌های مزبور با شعاع‌هایشان مشخص می‌شوند، پس می‌توان گفت:

$$\forall \alpha \exists \beta \forall x \in D_f - \{a\}; \quad (x \in N_\beta(\alpha) \implies f(x) \in N_\alpha(\ell))$$

جدول مقابل نامگذاری مجدد α و β را بر حسب این که a یا ℓ متناهی یا نامتناهی باشند به دست می‌دهد.

β	α	
δ	ε	متناهی
M	N	نامتناهی

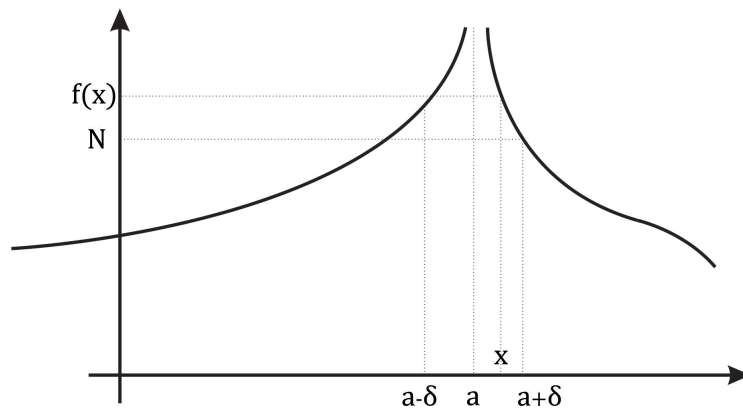
تعریف ۳.۳ اگر $a \in D_f$ عددی حقیقی باشد و $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ آن گاه می‌گوییم f در a پیوسته است.

مثال ۱.۳ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ که در آن a عددی حقیقی است یعنی هر قدر بخواهیم می‌توانیم $f(x)$ ها را بزرگ کنیم مشروط بر این که x به قدر کافی به a نزدیک شده باشد. به عبارت دیگر

$$\forall N \exists \delta \forall x \in D_f; \quad (x \in N'_\delta(a) \implies f(x) \in N_n(+\infty))$$

یا

$$\forall N \exists \delta \forall x \in D_f; \quad 0 < |x - a| < \delta \implies f(x) > N$$

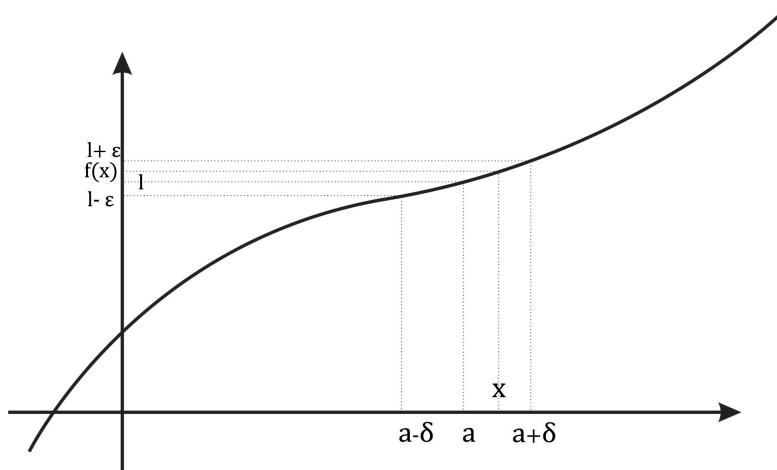


مثال ۲.۳ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ که در آن a و ℓ اعدادی حقیقی هستند یعنی هر قدر بخواهیم می‌توانیم $f(x)$ ها را به ℓ نزدیک کنیم مشروط بر این که x به قدر کافی به a نزدیک شده باشد. به عبارت دیگر

$$\forall \epsilon \exists \delta \forall x \in D_f - \{a\}; \quad (x \in N'_\delta(a) \implies f(x) \in N_\epsilon(\ell))$$

یا

$$\forall \epsilon \exists \delta \forall x \in D_f - \{a\}; \quad 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - \ell| < \epsilon$$



مثال ۳.۳ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ یعنی هر قدر بخواهیم می‌توانیم مقادیر $f(x)$ را

کوچک کنیم مشروط بر این که x به قدر کافی کوچک شده باشد. به عبارت دیگر

$$\forall N \exists M \forall x \in D_f; \quad (x \in N_M(-\infty) \implies f(x) \in N_N(-\infty))$$

یا

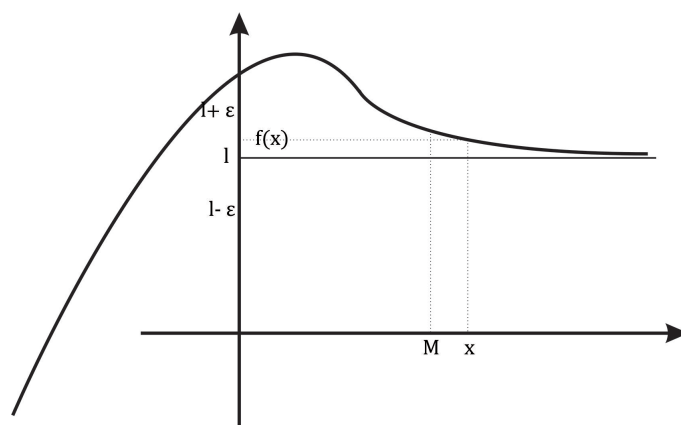
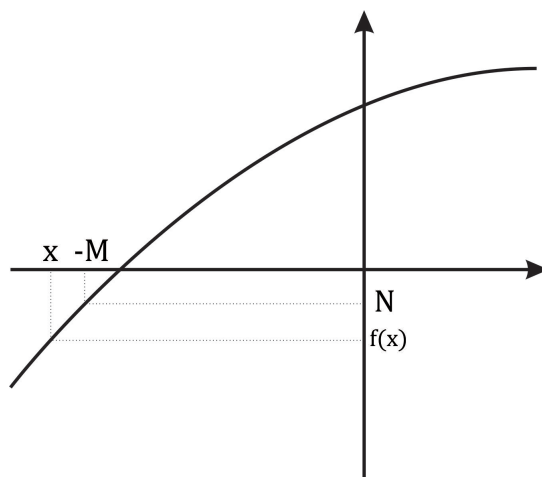
$$\forall N \exists M \forall x \in D_f; \quad (x < -M \implies f(x) < -N)$$

مثال ۴.۳ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ یعنی هر قدر بخواهیم می‌توانیم مقادیر $f(x)$ را به ℓ

نزدیک کنیم مشروط بر این که x به قدر کافی بزرگ شده باشد. به عبارت دیگر

$$\forall \epsilon \exists M \forall x \in D_f; \quad (x \in N_M(+\infty) \implies f(x) \in N_\epsilon(\ell))$$

یا $\forall \epsilon \exists M \forall x \in D_f; (x > M \implies |f(x) - \ell| < \epsilon)$



تعریف ۴.۳ می‌گوییم حد راست (چپ) f در a برابر ℓ است و می‌نویسیم

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \ell \quad \text{یا} \quad f(a^+) = \ell$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \ell \quad \text{یا} \quad f(a^-) = \ell$$

هرگاه هر قدر بخواهیم بتوانیم مقادیر $f(x)$ را به ℓ نزدیک کنیم مشروط بر این که x به قدر کافی با مقادیر بزرگتر از a (کوچکتر از a) به a نزدیک شده باشد. به عبارت دیگر

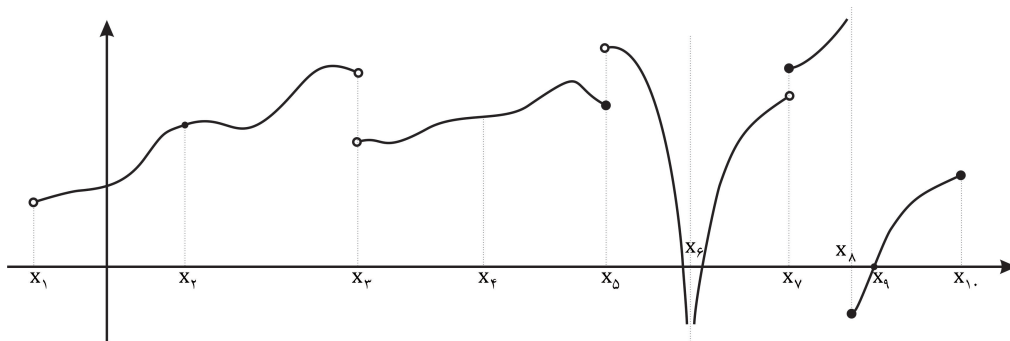
$$\forall \alpha \exists \beta \forall x \in (a, +\infty) \cap D_f \quad (x \in N_\alpha(a) \implies f(x) \in N_\beta(\ell))$$

$$\forall \alpha \exists \beta \forall x \in (-\infty, +\infty) \cap D_f \quad (x \in N_\alpha(a) \implies f(x) \in N_\beta(\ell))$$

می توان نشان داد که تابع f در a دارای حد ℓ است فقط و فقط وقتی که در a دارای حد راست و حد چپ مساوی ℓ باشد.

اگر $f(a^+) = f(a)$ ، $f(a^-) = f(a)$ می گوئیم f در a از راست (از چپ) پیوسته است.

مثال ۵.۳ تعیین کنید که آیا تابع زیر در نقاط داده شده دارای حد راست یا حد چپ است یا خیر.



x_{10}	x_9	x_8	x_7	x_6	x_5	x_4	x_3	x_2	x_1	
-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	حد راست
+	+	+	+	+	+	+	+	+	-	حد چپ
-	+	+	+	-	-	+	-	-	-	پیوستگی راست
+	+	-	-	-	+	+	-	-	-	پیوستگی چپ

فصل ۴

اعداد مختلط

۱.۴ تعریف اعداد مختلط

گیریم $\mathbb{C}$ مجموعه‌ی همه‌ی اشیایی (اعدادی) به شکل $a + bi$ باشد که در آن $a, b \in \mathbb{R}$.

هر یک از این اعداد را یک عدد مختلط می‌نامند.

دو عدد مختلط $a + bi$ و $c + di$ را مساوی گویند اگر و فقط اگر $a = c$ و $b = d$.

اعمال جمع و ضرب را در $\mathbb{C}$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

این اعمال خواص جابجایی و شرکت‌پذیری و پخشی دارند.

اعداد مختلط $0 + 0i$ و $1 + 1i$ به ترتیب عضو خنثی جمع و ضرب هستند، همچنین اگر $z = a + bi \in \mathbb{C}$ ، آن گاه قرینه‌ی z و وارون z را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$-z = -a + (-b)i$$

$$\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{-b}{a^2 + b^2}i, \quad (z \neq 0)$$

اگر $z = a + bi \in \mathbb{C}$ آن گاه a را قسمت حقیقی z می‌گویند و با $\operatorname{Re} z$ نشان می‌دهند، b را قسمت موهومی z می‌گویند و با $\operatorname{Im} z$ نمایش می‌دهند.

$\sqrt{a^2 + b^2}$ را قدر مطلق یا مدول z می‌گویند و با $|z|$ نشان می‌دهند.

$a + (-b)i$ را قسمت مزدوج z می‌گویند و با $\bar{z}$ نشان می‌دهند.

قرارداد:

(۱) عدد مختلط $a + 0i$ را با عدد حقیقی a یکی می‌گیریم. پس عدد حقیقی را می‌توان به عنوان یک عدد مختلط در نظر گرفت. لذا $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.

(۲) عدد مختلط $0 + bi$ را با نماد bi نمایش می‌دهیم، همچنین عدد مختلط $a \pm 1i$ را با نماد $a \pm i$ نمایش می‌دهیم.

(۳) عدد مختلط $a + (-b)i$ را با نماد $a - bi$ نمایش می‌دهیم.

(۴) عدد مختلط $a + bi$ را با نمادهای $bi + a$ و $a + ib$ نیز نمایش می‌دهیم.

تمرین ۱.۴ اگر $z_1 = 1 + 2i$ و $z_2 = -i$ و $z_3 = 2$ ، آن گاه $z_1 z_2$ ، $z_1 + z_2$ و $\frac{z_3}{z_2}$ را بیابید.

حل.

$$\begin{aligned}
 z_1 z_2 &= (1 + 2i)(0 + (-1)i) = (0 + 2) + (-1 + 0)i = 2 - i \\
 z_1 + z_2 &= (1 + 2i) + (0 + (-1)i) = 1 + 1i = 1 + i \\
 \frac{z_3}{z_2} &= z_3 \cdot \frac{1}{z_2} = 2 \times \frac{1}{0 \times (-1)i} = (2 + 0i) \times \left(\frac{0}{0+1} + \frac{1}{0+1} \right) i \\
 &= (0 - 0) + (2 + 0)i = 2i
 \end{aligned}$$

□

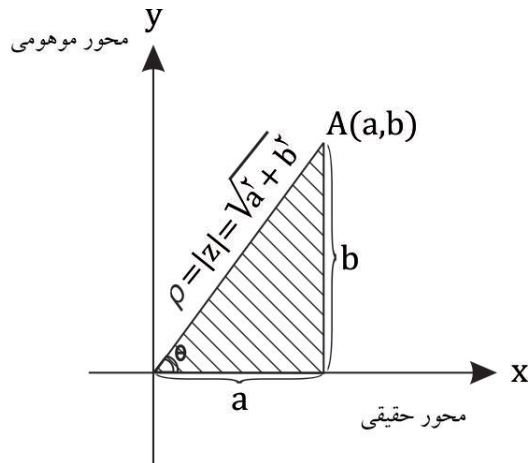
۲.۴ نمایش هندسی اعداد مختلط

دیدیم که هر عدد حقیقی را می‌توان با یک نقطه در روی یک محور یکی گرفت و بالعکس.

از آن جا که تابع $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^2$ یک تناظر یک به یک است،
 $f(a + bi) = (a, b), D_f = \mathbb{C}$
 می‌توان هر عدد مختلط $a + bi$ را با زوج مرتب (a, b) یعنی یک نقطه در صفحه‌ی مختصات
 یکی در نظر گرفت.

$$z = a + bi \sim (a, b)$$

$$\begin{cases} \theta : \text{آرگومان یا آوند} \\ \rho : \text{مدول یا قدر مطلق} \end{cases}$$



در مثلث قائم الزاویه $\triangle OAH$ داریم:

$$OA = \sqrt{OH^2 + HA^2} \Rightarrow OA = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|, \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{b}{a}$$

اگر ρ فاصله نقطه A تا مبدا و θ زاویه‌ای که نیم خط ox باید به اندازه‌ی آن دوران کند تا از A بگذرد (البته در جهت مثبت صفحه) باشد، داریم:

$$z = OA \cos(\widehat{HOA}) \Rightarrow a = \rho \cos \theta, \quad AH = OA \sin(\widehat{HOA}) \Rightarrow b = \rho \sin \theta$$

$$z = a + bi = \rho \cos \theta + i \rho \sin \theta = \rho(\cos \theta + i \sin \theta) = \rho \operatorname{cis} \theta$$

توجه: (همواره $\rho \geq 0$ و $0 \leq \theta < 2\pi$)

عبارت $z = \rho \operatorname{cis} \theta$ را شکل قطبی عدد مختلط z می‌گویند.

اگر $z_1 = \rho_1 \operatorname{cis} \theta_1$ و $z_2 = \rho_2 \operatorname{cis} \theta_2$ باشد، آن گاه:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (\rho_1 \cos \theta_1 + i \rho_1 \sin \theta_1) (\rho_2 \cos \theta_2 + i \rho_2 \sin \theta_2) \\ &= (\rho_1 \rho_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \rho_1 \rho_2 \sin \theta_1 \sin \theta_2) \\ &\quad + i (\rho_1 \rho_2 \sin \theta_1 \cos \theta_2 + \rho_1 \rho_2 \sin \theta_2 \cos \theta_1) \\ &= \rho_1 \rho_2 \cos (\theta_1 + \theta_2) + i \rho_1 \rho_2 \sin (\theta_1 + \theta_2) \\ &= \rho_1 \rho_2 \operatorname{cis} (\theta_1 + \theta_2) \end{aligned}$$

به همین ترتیب:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \operatorname{cis} (\theta_1 - \theta_2)$$

اگر تعریف نماییم: $z^0 = 1$ ، $z^1 = z$ و برای هر $n \geq 2$ ، $z^n = z \cdot z^{n-1}$ آن گاه چنانچه

$z = \rho \operatorname{cis} \theta$ به کمک استقرا روی n می توان نشان داد که

$$z^n = (\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis} (n\theta)$$

بالاخص اگر $\rho = 1$ داریم:

$$z^n = (\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis} (n\theta) \xrightarrow{\rho=1} (\operatorname{cis} \theta)^n = \operatorname{cis} (n\theta) \quad \text{«فرمول دموآور»}$$

تمرین ۲.۴ (۱) $(1+i)^5$ را بیابید.

(۲) نشان دهید: $\sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$ و $\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$.

حل.

(١)

$$\begin{aligned}
\rho &= \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \\
\operatorname{tg} \theta &= \frac{1}{1} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \\
(1+i)^5 &= \left(\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4} \right)^5 = 2\sqrt{2} \operatorname{cis} \left(\frac{5\pi}{4} \right) \\
&= 2\sqrt{2} \cos \left(\pi + \frac{\pi}{4} \right) + i 2\sqrt{2} \sin \left(\pi + \frac{\pi}{4} \right) \\
&= \left(2\sqrt{2} \times \frac{-1}{\sqrt{2}} \right) + i \left(2\sqrt{2} \times \frac{-1}{\sqrt{2}} \right) \\
&= -2 - 2i = -2(1+i)
\end{aligned}$$

(٢)

$$\operatorname{cis} n\theta = (\operatorname{cis} \theta)^n \Rightarrow \cos(n\theta) + i \sin(n\theta) = (\cos \theta + i \sin \theta)^n \quad (*)$$

$$\begin{aligned}
(\cos \theta + i \sin \theta)^3 &= \cos^3 \theta + i 3 \cos^2 \theta \sin \theta + 3 \cos \theta \sin^2 \theta i + i^3 \sin^3 \theta \\
&= \cos^3 \theta + 3i \cos^2 \theta \sin \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta - i \sin^3 \theta \\
&= \left(\cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta \right) \\
&\quad + i \left(3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta \right) \\
&= \left[\cos^3 \theta - 3 \cos \theta (1 - \cos^2 \theta) \right] \\
&\quad + i \left[3 \cos \theta (1 - \sin^2 \theta) - \sin^3 \theta \right] \\
&= \left(4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \right) + i \left(3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta \right)
\end{aligned}$$

اگر عبارات فوق را با طرف اول معادله‌ی (*) مقایسه نماییم خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \\ \sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta \end{cases}$$

□

می‌گوییم عدد مختلط w ریشه‌ای n ام z است هرگاه $w^n = z$.

یک ریشه‌ی n ام z را با نماد $z^{\frac{1}{n}}$ نشان می‌دهیم. اگر $z = \rho \operatorname{cis} \theta$ و $w = \eta \operatorname{cis} \varphi$

و $w = z^{\frac{1}{n}}$ ، آن‌گاه $z = w^n$ و بنابراین

$$\rho \operatorname{cis} \theta = (\eta \operatorname{cis} \varphi)^n = \eta^n \operatorname{cis} (n\varphi)$$

$$\begin{cases} \rho \cos \theta = \eta^n \cos(n\varphi) \\ \rho \sin \theta = \eta^n \sin(n\varphi) \end{cases}$$

طرفین معادلات دستگاه را به توان ۲ رسانده با هم جمع می‌کنیم

$$\rho^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = \eta^{2n} [\cos^2(n\varphi) + \sin^2(n\varphi)] \implies \rho^2 = \eta^{2n} \implies \eta = \sqrt[n]{\rho} \geq 0$$

پس

$$\begin{cases} \cos \theta = \cos(n\varphi) \\ \sin \theta = \sin(n\varphi) \end{cases}$$

بنابراین $n\varphi = 2k\pi + \theta$ و لذا $(k = 0, 1, \dots, n-1)$ $\varphi = \frac{2k\pi + \theta}{n}$.

تمرین ۳.۴ ریشه‌های دوم ۱- را بیابید.

حل.

$$-1 = -1 + 0i, \quad \varphi = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = 1$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{0}{-1} = 0 \Rightarrow \theta = \pi$$

$$-1 = 1 \operatorname{cis} \pi$$

$$(-1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{1} \operatorname{cis} \frac{2k\pi + \pi}{2} \quad (k = 0, 1)$$

بنابراین ریشه‌های دوم -1 برابرند با:

$$w_1 = \operatorname{cis} \frac{\pi}{2} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$$

$$w_2 = \operatorname{cis} \frac{3\pi}{2} = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} = -i$$

□

نکته ۱.۴ ما $\sqrt{-1}$ تعریف نمی‌کنیم. از دیدگاه ما i عدد مختلطی است که هم خودش و هم قرینه‌اش در رابطه‌ی $i^2 = -1$ صدق می‌کنند.

تمرین ۴.۴ ریشه‌های پنجم واحد (عدد ۱) را بیابید.

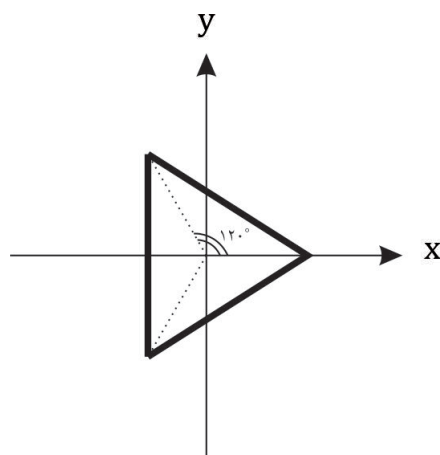
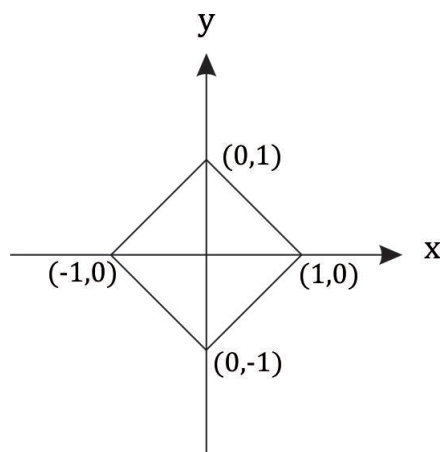
هر عدد مختلط z دقیقاً n ریشه‌ی n ام دارد. این مطلب از قضیه‌ی اساسی جبر نتیجه

می‌شود:

قضیه ۱.۴ (قضیه‌ی اساسی جبر) هر معادله از درجه‌ی n در $\mathbb{C}$ دقیقاً n ریشه دارد.

مثلاً معادله‌ی $x^2 + 1 = 0$ دقیقاً دو ریشه دارد. می‌توان نشان داد که i و $-i$ ریشه‌های آن هستند.

ریشه‌های n ام واحد را اگر در صفحه نمایش دهیم، رئوس یک n ضلعی منتظم هستند که یک راس آن نقطه‌ی $(1, 0)$ است.



برای حل معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ در $\mathbb{C}$ می‌توان از دستور b استفاده کرد، در

حالی که مبین (Δ) منفی باشد. دقت داریم که $\pm\sqrt{\Delta} = \pm\sqrt{|\Delta|}i$.

تمرین ۵.۴ تمام ریشه‌های $x^2 + x + 1 = 0$ را بیابید

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} = \frac{-1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

مثال ۱.۴ تمام ریشه‌های معادله‌ی $x^6 + x^3 + 1 = 0$ را بیابید.