

تقریباً (تحقیق در عملیات) Operation research تحقیق در عملیات به مجموعه‌ای از روش‌های علمی

تلفه می‌شود که در شناخت مسائل علمی کاربرد دارد و هدف آن یافتن جواب بهینه برای مسائل مذکور است.

تحقیق در عملیات عبارت است از کاربرد روش‌های علمی برای مطالعه و بررسی فعالیت‌ها و عملیات‌های پیچیده در سازمان‌های بزرگ است.

برای شروع موضوع تحقیق در عملیات باید ابتدا بتوان مدلی برای مسئله نوشت. لذا مدلسازی توسط تحقیق در عملیات ابتدای هر کار در این زمینه است.

مدلسازی = مدل‌های تحقیق در عملیات خلاصه‌ای از مسئله است که قرار است با آن کار کنیم. مدل‌ها می‌توانند توسط روابط ریاضی یا شکل، جداول و ... باشند.

اما در تحقیق در عملیات غالباً مدل‌ها به صورت مسائل برنامه‌ریزی خطی که یک مدل ریاضی توسط نمادها و روابط ریاضی است، تشکیل می‌شوند.

مثال: فرض کنید یک موسسه تجاری طایفی را می‌خواهد بفروشد. هزینه تولید کالا 5 (واحد پول) و قیمت فروش آن 20 (واحد پول) است. کل سود حاصل از فروش کالا توسط رابطه ریاضی زیر بدست می‌آید.

حل: ابتدا لازم است تعداد کالاها مشخص شود.

این تعداد را متغیر تصمیم می‌نامیم $\leftarrow x = \text{تعداد کالاها}$

و سپس سود حاصل از فروش x کالا برابر است با: $Z = (20 - 5)x$ سود حاصل از فروش

ادامه مثال قبل: حال فرض کنیم این کالا توسط مواد اولیه مانند آهن ساخته شود و موسسه تجاری فقط 100 kg در دسترس دارد و برای تولید هر کالا نیاز به مصرف 4 kg آهن داریم. می‌توان برای افزایش سود مدلی به صورت زیر نوشت.

$$\begin{array}{ll} \text{حل:} & \max Z = 15x \\ & \text{s.t. } x \leq 25 \\ & L(P) \end{array}$$

• مدل فوق را به مسئله برنامه ریزی خطی یا همان Linear programming با به اختصار LP می نامیم.

• در مثال آموزشی ای که گفتیم، در حقیقت این موسسه تجاری به دنبال حداقل کردن سود خود از فروش x واحد بالاست.

در مدل قبل

- ← x را متغیر تصمیم می نامیم.
- ← $Z = 15x$ تابع هدف می نامیم.
- ← $x \leq 15$ را محدودیت می نامیم.

• در حالت کلی برای مدل کردن یک مسئله توسط برنامه ریزی خطی الگوریتم زیر را داریم:

(1) متغیر تصمیم را مشخص کنید

(2) تابع هدف را بر حسب متغیرهای تصمیم بنویسید

(3) محدودیت های مسئله را بر حسب متغیرهای تصمیم بنویسید.

• برای تولیدی در مثال قبل باید مقاری حسابی داشته باشند.

لذا باید قید $x \geq 0$ و x یک عدد صحیح باشد را به مسئله اضافه کنیم.

پس داریم:

$$\max Z = 15$$

$$s.t. \quad x \leq 25$$

$x \geq 0$ و integer

Integer LP

• به مسئله فوق، برنامه ریزی خطی عدد صحیح گفته می شود.

• در این درس غالباً مسائلی رو بررسی می کنیم که تابع هدف و محدودیت ها قید مسئله مون، خطی و متغیرهای تصمیم، بزرگتر مساوی صفر هستند.

• x ها (متغیرهای تصمیم) می توانند

- ← صحیح باشند integer
- ← boolean باشند
- ← بزرگتر مساوی صفر باشند

در ادامه با بیان چند مثال به مدل سازی مسائل برنامه ریزی خطی می پردازیم.

مثال ۱: شرکتی می خواهد بداند که از هر ۳ محصولش چقدر تولید کند تا با رعایت محدودیت منابع به حداکثر سود برسد. برای تولید هر واحد کالا (محصول) مواد اولیه و نیروی انسانی لازم است. نیروی انسانی و مواد اولیه و سود حاصل از فروش هر کالا در جدول زیر آمده است.

منابع	مقدار در دسترس		
	محصول ۱	محصول ۲	محصول ۳
نیروی کار (ساعت)	5	2	4
مواد اولیه kg	4	6	3
سود حاصل از تولید	3	5	2

حل: • متغیرهای تصمیم: • تابع هدف: $Z = 3x_1 + 5x_2 + 2x_3$

x_1 : تعداد تولید محصول اول

x_2 : " " " " دوم • محدودیت ها:

x_3 : " " " " سوم • محدودیت نیروی کار: $5x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 240$

محدودیت مواد اولیه: $4x_1 + 6x_2 + 3x_3 \leq 400$

پس:

$$\begin{cases} \max Z = 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 \\ \text{s.t. } 5x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 240 \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 \leq 400 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \rightarrow \text{قیود همواره} \end{cases}$$

تابع هدف:

$$Z = 0.85x_1 + 0.05x_2 + 0.065x_3 + 0.13x_4$$

max Z

← نس 8

$$s.t. \quad x_1 - 0.2 \times 10m \leq 0$$

$$x_2 - x_1 - x_3 - x_4 \leq 0$$

$$x_2 + x_3 - 1.2x_1 - 1.2x_4 = 0$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

مسئله حمل و نقل

یک شرکت حمل و نقل مقصد دارد. تلوزیون های تولیدی از سه کارخانه A، B، C به سه مرکز حمل کنند. عرفه ما خانه هر B، خانه و تقاضای ما خانه هر مرکز در جدول زیر آمده است.

کارخانه	عرفه تلوزیون	سهم	تقاضا
1 تهران	300	A شیراز	150
2 اراک	200	B بومهر	250
3 اصفهان	200	C اهواز	200

هزینه حمل و نقل هر دستگاه تلوزیون از هر کارخانه به هر مرکز به نسبت مسافت و کیفیت راه تغییر می کند. در جدول زیر آمده

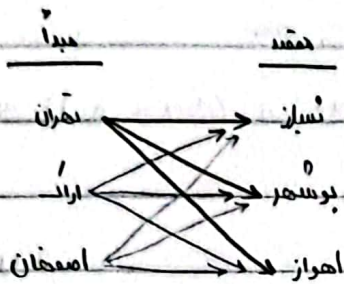
است:

	A	B	C
1	16	18	11
2	14	12	13
3	13	15	17

مسئله را به گونه ای مدل کنید که ضمن تأمین تقاضا هر سهم کل هزینه حمل نیز حداقل گردد.

Subject:

Date:



A, B, C
 $1, 2, 3$

متغیرهای تصمیم

تعداد واحدهای تولیدی که از هر کارخانه به هر شهر ارسال می شود

ارسال می شود

تابع هدف

300	x_{1A}	x_{1B}	x_{1C}
200	x_{2A}	x_{2B}	x_{2C}
200	x_{3A}	x_{3B}	x_{3C}

$$Z = 16x_{1A} + 18x_{1B} + 11x_{1C} + 14x_{2A} + 12x_{2B} + 13x_{2C} + 13x_{3A} + 15x_{3B} + 17x_{3C}$$

محدودیتها

قید ظرفیتها

$$x_{1A} + x_{1B} + x_{1C} \leq 300$$

$$x_{2A} + x_{2B} + x_{2C} \leq 200$$

$$x_{3A} + x_{3B} + x_{3C} \leq 200$$

قید تقاضاها

$$x_{1A} + x_{2A} + x_{3A} = 150$$

$$x_{1B} + x_{2B} + x_{3B} = 250$$

$$x_{1C} + x_{2C} + x_{3C} = 200$$

$$x_{ij} \geq 0 \text{ \& } x : \text{integer}$$

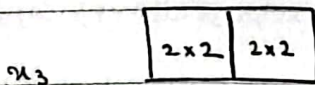
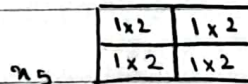
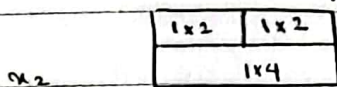
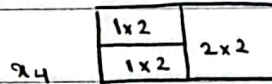
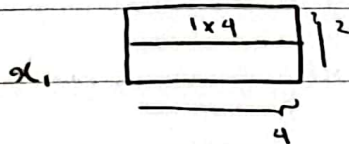
Subject :

Date :

مسئله برش چوب (Cutting Stock Problem)

مقدار سفارش	ابعاد
1300	1" x 2" x 11'
1000	1" x 4" x 11'
700	2" x 2" x 11'

شرط چوب‌بری باید چوب‌های سفارشی را به ابعاد زیر بقیه کند.

این چوب‌ها باید از تخته‌های استاندارد به ابعاد $2 \times 4 \times 11$ بقیه شوند. شرط در نظر دارد برای این کار از حداقل تخته استفاده کند.

$$\min Z = x_1 + \dots + x_5$$

تابع هدف

$$2x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 1300$$

محدودیت‌ها

$$2x_1 + x_2 = 1000$$

$$2x_3 + x_4 = 700$$

$$x_1, \dots, x_5 \geq 0$$

مثال: زمان بندی چند دوره ای: شرکت تولید کننده رایانه های شخصی در صدر تهیه برنامه زمان بندی برای تولید محصولات خود است.

شرکت عادی برای شرکت 160 (رایانه هفتگی است). همچنین شرکت برای تولید 50 رایانه را در نوبت اضافه کاری

دارد. هزینه هفتگی، بارزسی و بسته بندی در وقت عادی 190,000 و در وقت اضافه کاری 260,000

است. هزینه نامزدی هر رایانه در ایام برای تحویل در هفته آینده 10,000 است. جدول زیر نشان دهنده تعداد سفارشات

سفرشات	هفته	در 6 هفته است.
105	1	
170	2	
230	3	
180	4	
150	5	
250	6	

نیازها

شرکت تولید کننده می خواهد تهیه سفارشات در زمان مقدار انجام شود و حاضر نیست هیچ یک از مشتریان خود را نیز

از دست بدهد.

مسئله رایانه ای فرموله کنید که ضمن حداقل کردن هزینه های تولید و انبارداری، برنامه زمانی لازم برای تولید را در

شرکت عادی و اضافه کاری مشخص کند. (در پایان هفته ششم موجودی انبار صفر می باشد).

و تغییر های تصمیم

x_i : رایانه های تولید شده در نوبت عادی در هفته i ام $i = 1, 2, \dots, 6$

y_i : رایانه های تولید شده در نوبت اضافه کاری در هفته i ام $i = 1, 2, \dots, 6$

z_i : رایانه های انبار شده در هفته i ام $i = 1, 2, \dots, 5$
 که چون در هفته ششم انبار باید خالی شه

$$\min Z = 190000 \left(\sum_{i=1}^6 x_i \right) + 260000 \left(\sum_{i=1}^6 y_i \right) + 10000 \left(\sum_{i=1}^5 z_i \right)$$

تابع هدف:

$$x_i \leq 160 \quad \text{هفته سیم} \quad x_3 + y_3 + z_2 \geq 230$$

$$y_i \leq 50 \quad \text{هفته چهارم} \quad x_4 + y_4 + z_3 \geq 180$$

$$x_1 + y_1 \geq 150 \quad \text{هفته اول} \quad x_5 + y_5 + z_4 \geq 150 \quad \text{هفته پنجم}$$

$$x_i, y_i, z_i \geq 0$$

$$x_2 + y_2 + z_1 \geq 170 \quad x_6 + y_6 + z_5 = 250$$

تولیدی نوبت عادی و تولیدی اضافه کاری و انبار شده های در روز

چون در هفته ششم باید انبار خالی شه و در آن رایانه ای انبار نشده

دییم که مسأله برنامه ریزی خطی به فرم زیر بوده:

$$\max (\min) \quad Z = C_1 x_1 + \dots + C_n x_n$$

$$s.t. \quad a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n \leq (>) b_1$$

$$a_{21} x_1 + \dots + a_{2n} x_n \leq (>) b_2$$

.

.

$$a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n \leq (>) b_m$$

$$x_i \geq 0, \quad i=1, 2, \dots, n$$

که در آن C_i ها برای $i=1, \dots, n$ را ضرایب متغیرهای تابع هدف، a_{ij} برای $i=1, \dots, m$ و $j=1, \dots, n$

ضرایب متغیرها در محدودیت (ضرایب فن)، b_i ها برای $i=1, \dots, m$ مقادیر سمت راست و x_i ها برای

$i=1, \dots, n$ متغیرهای تصمیم نامیده می شوند. Z را مقدار تابع هدف می گوئیم.

الغرض می خواهیم روش حل تحت عنوان حل هندسی مطرح کنیم. در این نوع حل خود را به مسائل با 2 متغیر تصمیم

معروف می کنیم. (زیرا بیشتر از 2 بعد در صفحه قابل نمایش نیست.)

برای این منظور ابتدا محدودیت های مسئله را همچون خطوطی در صفحه در نظر گرفته و آن را در مفاصل x_1, x_2

رسم می کنیم.

سپس برای یافتن نقطه بهینه ناحیه جواب را مشخص کرده و در جهت افزایش تابع هدف از مبدأ پس می رویم. راه

دیگر این است که نقاط گوشه ای از ناحیه جواب هدف قرار داده و بهینه جواب را معرفی کنیم. دستور فوق را در مثال زیر

پیاده سازی می کنیم.

مثال: کارخانه ای مقدار تولید دو نوع محصول دارد که میزان مصرف هر واحد از آنها از منابع به صورت جدول زیر است.

همچنین سود حاصل از هر محصول نیز در جدول داده شده است.

سود	مواد اولیه (kg)	نیروی کار	محصول
40	4	1	1
50	3	2	2

منابع موجود برای نیروی کار 40 ساعت و برای مواد اولیه 120 kg است. ابتدا مسئله را مدل و سپس آن را با استفاده از روش هندسی حل نمایید.

• متغیرهای تصمیم:

حل:

x_1 : مقدار تولید سله از محصول اول

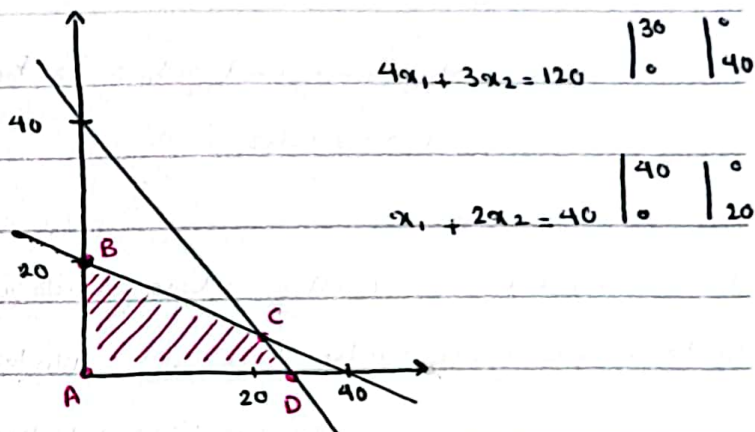
x_2 : مقدار تولید سله از محصول دوم

$$\max \quad Z = 40x_1 + 50x_2$$

$$\text{s.t.} \quad 4x_1 + 3x_2 \leq 120$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 40$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



ناحیه هاست، حوزده را ناحیه جواب را ناحیه هوج می نامند.

می توان نشان داد که جواب بهینه همواره در نقاط گوشه ای اتفاق می افتد.

یادآوری: تابع چند متغیره $F(x_1, x_2)$ را در نظر بگیرید. بردار گرادیان این تابع به صورت زیر تعریف می شود:

$$\nabla F = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2} \right)$$

$$\text{مثال} \rightarrow F(x_1, x_2) = 40x_1 + 50x_2$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 40$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = 50$$

$$\nabla F = (40, 50)$$

برای یافتن مقدار و جواب بهینه، نقاط گوشه ای را در تابع هدف بررسی می کنیم.

$$A(0,0) \Rightarrow Z_A = 0$$

در مثال بالا داریم:

$$B(0,20) \Rightarrow Z_B = 1000$$

$$D(30,0) \Rightarrow Z_D = 1200$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 = 120 \\ x_1 + 2x_2 = 40 \end{cases}$$

$$-5x_2 = -40 \Rightarrow x_2 = 8$$

برای یافتن نقطه C باید خطوط را با هم قطع دهیم.

PRESTIGE

Subject :

Date :

$$C(24, 8) \Rightarrow Z_c = 1360$$

پس جواب بهینه نقطه $C(24, 8)$ و مقدار تابع هدف بهینه برابر 1360 است.

نکته: ما هر تعداد متغیر و هر تعداد معادله داشته باشیم، تعداد نقاط گوشه‌ای ما متناهی است.

$$\text{تعداد نقاط گوشه‌ای} = \binom{m+n}{n} = \frac{(m+n)!}{m!n!}$$

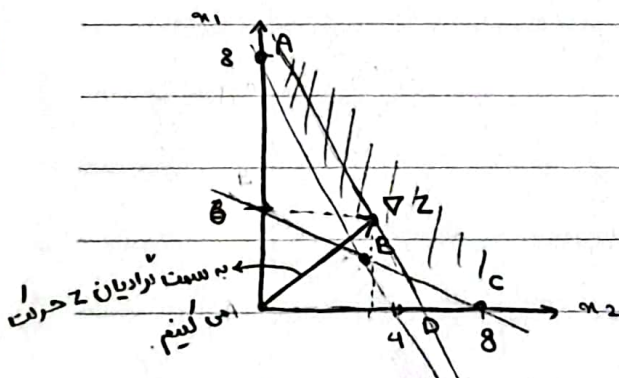
$$\min Z = 6x_1 + 3x_2$$

مثال: مسئله برنامه ریزی خطی را به روش هندسی حل کنید

$$\text{s.t. } 2x_1 + 4x_2 \geq 16$$

$$4x_1 + 3x_2 \geq 24$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



$$2x_1 + 4x_2 = 16 \quad \begin{cases} x_1 = 0 & x_2 = 4 \\ x_2 = 0 & x_1 = 8 \end{cases}$$

$$4x_1 + 3x_2 = 24 \quad \begin{cases} x_1 = 0 & x_2 = 8 \\ x_2 = 0 & x_1 = 6 \end{cases}$$

$$\nabla Z = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2} \right) = (6, 3) \quad \text{گرادیان تابع } Z$$

$$A \quad \begin{cases} x_1 = 8 \\ x_2 = 0 \end{cases} \rightarrow Z = 0$$

$$B \quad \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 16 \\ 4x_1 + 3x_2 = 24 \end{cases} \rightarrow 5x_2 = 8 \rightarrow x_2 = 1.6, x_1 = 4.8 \rightarrow B \quad \begin{cases} x_1 = 4.8 \\ x_2 = 1.6 \end{cases}$$

$$C \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 8 \end{cases} \rightarrow Z = 0 + 24 = 24$$

PRESTIGE

حالت های خاص در مسائل برنامه ریزی خطی (روش هندسی)

در این بحث به معرفی حالت های خاص در برنامه ریزی خطی شامل بهینه چند گانه، ناحیه جواب بی کران، ناحیه جواب خالی و بهینه بی نظیر می پردازیم.

۱. بهینه چند گانه: در این حالت نقطه جواب بهینه مسئله منحصر به فرد نیست، یعنی چندین نقطه داریم که مقادیر تابع هدف بهینه را ارائه می دهند. در این حالت ارتباطی بین محدودیت ها و تابع هدف وجود دارد که در ادامه بررسی می کنیم.

مثال زیر را ببینید.

$$\max \quad Z = 40x_1 + 30x_2$$

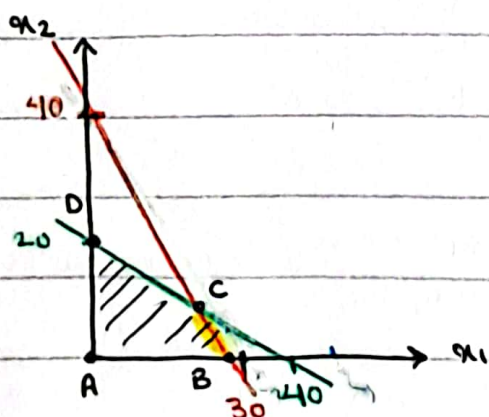
$$\text{s.t.} \quad x_1 + 2x_2 \leq 40$$

$$4x_1 + 3x_2 \leq 120$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 40 \\ 4x_1 + 3x_2 = 120 \end{cases} \quad \begin{array}{c|c} 40 & 0 \\ 0 & 20 \end{array} \quad \begin{array}{c|c} 30 & 0 \\ 0 & 40 \end{array}$$

حل:



$$C: \begin{cases} x_2 = 8 \\ x_1 = 24 \end{cases}$$

$$Z_A = 0$$

$$Z_B = 1200$$

$$Z_C = 1200$$

$$Z_D = 600$$

مسئله 8: با توجه به مثال فوق، اگر هدف تابع ایجاد شده توسط قیود مسئله موازی باشند، آنگاه احتمالاً

جواب بهینه چندگانه داریم. (اگر محدودیت زائد نباشد، حتماً جواب بهینه چندگانه داریم.)

این حالت مورد علاقه مدیران است زیرا با انتخاب جواب‌های مختلف بین نقطه C و B مقدار تابع هدف بسیار بدست می‌آورند.

2) حالت ناحیه موجه (ناحیه جواب): در این حالت قیود مسئله هیچ ناحیه اشتراکی را ایجاد نمی‌کنند و مسئله فاقد

ناحیه جواب و در نتیجه مسئله جوابی نخواهد داشت.

$$\max z = 5x_1 + 3x_2$$

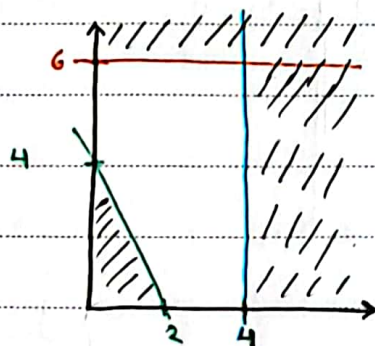
مثال:

$$\text{s.t. } 4x_1 + 2x_2 \leq 8$$

$$x_1 \geq 4$$

$$x_2 \geq 6$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



حل 8

3) ناحیه جواب بی‌کران: در این حالت ناحیه اشتراک قیود مسئله بی‌کران است و می‌تواند دو حالت زیر را نتیجه دهد.

1) جواب ممکن است بی‌کران باشد
2) جواب ممکن است متناهی باشد

$$\max z = 4x_1 + 2x_2$$

مثال: مسئله زیر را حل کنید.

$$\text{s.t. } x_1 \geq 4$$

$$4x_2 \leq 8$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

LINOMAX

4) جواب بیا هیله

توجه داریم هر x_1 و x_2 دو بعدی از برخورد حداقل 2 محدودیت ایجاد می شود. این اتفاق در فضای 3 بعدی
از برخورد 3 محدودیت اتفاق خواهد افتاد. حال اگر x_1 و x_2 در فضای 2 بعدی توسط 3 محدودیت ایجاد شود (در حالتی
که در فضای n بعدی توسط $n+1$ محدودیت ایجاد شود). آنگاه نقطه (نقطه) حاصل را x_1 و x_2 بیا هیله
می نامیم. اکنون اگر این x_1 و x_2 جواب بهینه مسئله باشد آنگاه جواب بهینه را جواب بیا هیله می نامیم.

مثال، مسئله زیر را حل کنید

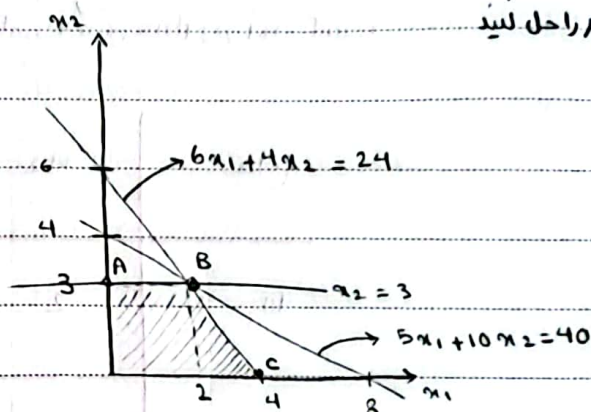
$$\max \quad z = 4x_1 + 6x_2$$

$$6x_1 + 4x_2 \leq 24$$

$$x_2 \leq 3$$

$$5x_1 + 10x_2 \leq 40$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



$$6x_1 + 4x_2 = 24 \quad \begin{matrix} x_1=0 \rightarrow x_2=6 \\ x_2=0 \rightarrow x_1=4 \end{matrix}$$

$$5x_1 + 10x_2 = 40 \quad \begin{matrix} x_1=0 \rightarrow x_2=4 \\ x_2=0 \rightarrow x_1=8 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 3 & 2 & 12 \\ 6x_1 + 4x_2 = 24 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 3 \times (5x_1 + 10x_2 = 40) \\ 15x_1 + 30x_2 = 120 \end{matrix} \quad \begin{matrix} - \\ 4x_2 = 12 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \rightarrow x_2 = 3 \\ x_1 = 2 \end{matrix} \quad \rightarrow (2, 3) \quad \text{نقطه بیا هیله}$$

$$A \quad \begin{matrix} x_1=0 \\ x_2=3 \end{matrix} \rightarrow z = 18$$

$$B \quad \begin{matrix} x_1=2 \\ x_2=3 \end{matrix} \rightarrow z = 8 + 18 = 26 \quad \rightarrow \text{جواب بهینه بیا هیله}$$

$$C \quad \begin{matrix} x_1=4 \\ x_2=0 \end{matrix} \rightarrow z = 16 + 0 = 16$$

روش میمیدلس Simplex

روش Simplex یک روش ریاضی (استفاده از ماتریس) مفاهیم جبر خطی برای حل مسائل بهینه سازی خطی است. اما این روش بر روی محدودیت های استاندارد انجام می شود. لذا ابتدا باید محدودیت های استاندارد را در مسائل برنامه ریزی خطی بیان کنیم. این کار را بر روی مثال زیر توضیح می دهیم.

مثال، فرض کنید کارخانه ای 2 محصول x_1 و x_2 تولید می کند. برای تولید محصول x_1 و x_2 مواد اولیه بر حسب فیوژم و نیروی انسانی بر حسب ساعت نیاز است که در جدول زیر آمده است.

منابع	x_2	x_1	محصول
40	2	1	مواد اولیه
120	3	2	نیروی انسانی
	50	40	سود

شیط مدل مسئله بر حسب برنامه ریزی خطی به صورت زیر است:

$$\max z = 40x_1 + 50x_2$$

$$s.t. \quad x_1 + 2x_2 \leq 40$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 120$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

مقتور از استاندارد سازی مسائل برنامه ریزی خطی این است که

محدودیت های مسئله به فرم تساوی باشند در حالت کلی

باید متغیرهایی به محدودیت ها اضافه یا از آن کم کنیم که

تساوی حاصل شود.

در مثال قبل فرم استاندارد محدودیت ها به صورت زیر است.

$$x_1 + 2x_2 + S_1 = 40$$

$$2x_1 + 3x_2 + S_2 = 120$$

در حقیقت متغیرهای S_1 و S_2 مقابری هستند که مقدار نسبت چپ نامساوی را به حد استاندارد منابع می رسانند

فرم لیند در محدودیت های فوق قرار دهیم $x_1 = 10$, $x_2 = 10$

در این صورت داریم:

$$10 + 2(10) + S_1 = 40 \rightarrow S_1 = 10$$

$$2 \times 10 + 3 \times 10 + S_2 = 120 \rightarrow S_2 = 70$$

یعنی اگر از محصول x_1 ، 10 عدد و از محصول x_2 ، 10 عدد تولید شود آنطه همچنان 10 لیونتر مواد اولیه در 70 ساعت نیروی انسانی باقی مانده است.

لذا به S_1 و S_2 منابع استقاده نشده نیز می گویند.

به S_1 و S_2 به محدودیت ها اضافه شده اند، متغیر لبور (Slack variables) می گویند. حال اگر محدودیت

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - S_1 = 40 \\ 2x_1 + 3x_2 - S_2 = 120 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 40 \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 120 \end{cases}$$

$$S_1, S_2 \geq 0$$

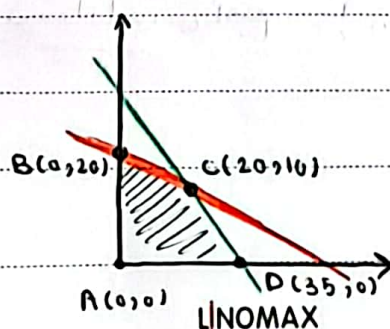
در این حالت S_1 و S_2 را منابع مازاد بر موجودی می نامیم و آن ها را متغیرهای مازاد (surplus variables) می نامیم.

محدودیت های تساوی نیز جای خود باقی می مانند.

به طور کلی S_1 و S_2 همیشه بزرگتر مساوی صفرند.

حال مثال را به روش هندسی حل می کنیم

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + S_1 = 40 \\ 2x_1 + 3x_2 + S_2 = 120 \end{cases}$$



اما گوشه‌های این مسئله برابر است با :

$$A(0,0) \rightarrow S_1=40, S_2=70$$

$$B(0,20) \rightarrow S_1=0, S_2=10$$

$$C(20,10) \rightarrow S_1=0, S_2=0$$

$$D(35,0) \rightarrow S_1=5, S_2=0$$

در واقع ما باید دستگاه 4 مجهولی و 2 محدودیت زیر سر و کار داریم.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + S_1 = 40 \\ 2x_1 + 3x_2 + S_2 = 70 \\ x_1, x_2, S_1, S_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$2x_1 + 3x_2 + S_2 = 70$$

$$x_1, x_2, S_1, S_2 \geq 0$$

الگوریتم Simplex

می‌دانیم که در استاندارد سازی محدودیت‌های مسئله، بنا به نوع محدودیت (کوچتر مساوی یا بزرگتر مساوی) متغیر کمکی از نوع کمبود یا اضافی به طرف چپ نامساوی اضافه می‌کردیم.

برای شروع روش Simplex لازم است درباره مسئله min سازی یا max سازی نتایج بررسی کنیم و از آنجایی که $\min Z = \max(-Z)$ می‌توان این دو مسئله را به هم تبدیل نمود.

لذا از اینجا به بعد در مورد مسائل max سازی الگوریتم را بررسی کرده و توفیق خواهیم داد.

الگوریتم Simplex باید فقط شروع نهایی از گوشه‌های ناحیه مجبه است، شروع می‌کنیم (در حقیقت با این کار دو متغیر را مقدار ثباتی می‌دهیم)

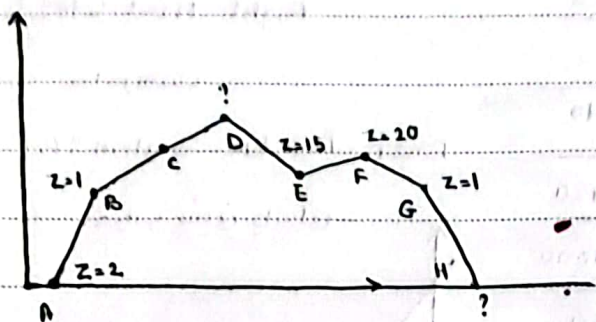
حداقل

در حالت شروع الگوریتم، مبدأ محتملات بهترین نقطه شروع است. در حقیقت این نقطه به معنی $x_1=0, x_2=0, Z=0$ و

S_1 ها برای n و $i=1, \dots, n$ مقادیر موجود در سمت راست محدودیت‌ها هستند. این نقطه به گوشه‌ای از فضای

(مجبه) است را جواب پایه‌ای یا گوشه اساسی می‌نامیم.

مثال: خطه بهینه max را بیابید.



مطالب فوق و اداهه الگوریتم را در مثال زیر می نویسیم

مسئله: همان کارخانه تولید کننده 2 محصول x_1 و x_2 موجودیهای منابع اولیه بر حسب لیونگرم و نیروی انسانی بر حسب نفر/ساعت است. مدل مسئله به صورت زیر بیان شده است:

$$\max Z = 40x_1 + 50x_2$$

$$s.t. \quad x_1 + 2x_2 \leq 40$$

$$4x_1 + 3x_2 \leq 120$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

حل:

$$\max Z = 40x_1 + 50x_2$$

ابتدا مسئله را به فرم استاندارد می نویسیم.

$$s.t. \quad x_1 + 2x_2 + s_1 = 40$$

$$4x_1 + 3x_2 + s_2 = 120$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$$

برای شروع الگوریتم Simplex لازم است از یک گوشه موسوم به

گوشه اساسی (جواب پایه ای) به حل مسئله مبادرت بنماییم.

بهترین گوشه، مبدأ مختصات است.

لازم است تابع هدف و محدودیت های استاندارد را وارد جدولی به نام Simplex کنیم.

Subject

Date

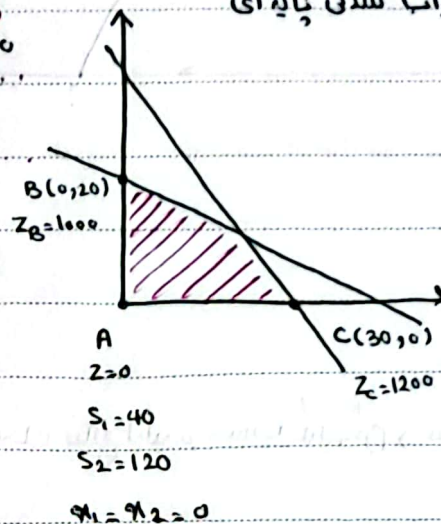
BFS	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
Z_0	1	-40	-50	0	0	0
s_1	0	1	2	1	0	40
s_2	0	4	3	0	1	120
Z_1	1	-15	0	25	0	1000
x_2	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	20
s_2	0	$\frac{5}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$	1	60
Z_2	1	0	0	16	6	1360
x_2	0	0	1	0.8	-0.2	8
x_1	0	1	0	$-\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	24

Right Hand side: RHS

مقادیر سمت

Basic Feasible solution: BFS

جواب شدن پایه ای



در جدول A مقادیر $x_1 = x_2 = 0$ و $s_1 = 40$ و $s_2 = 120$ و $Z = 0$ داریم. به این جدول بهینه نیست!

چون سطح هدف اعدادی منفی دارد. یعنی می توان با وارد کردن آن ها به سمتون پایه مقدار سود را افزایش داد. لذا باید یکی از x_1 یا x_2 که مقدار منفی دارند وارد پایه شوند. (کدام یک؟)

x_2 را وارد می کنیم زیرا مقدار سود به ازای هر واحد آن افزایش پیدا می کند. (بیشتر از x_1).

حال باید مشخص کنیم کدام متغیر از پایه خارج شود. این کار را با انجام تست min انجام می دهیم.

باید مقادیر سمت راست را بر مقادیر مثبت سمتون متغیر وارد شونده (سمتون لولا) را حساب کرده و min آن را

انتخاب کنیم. متغیر متناظر با مقدار min از پایه خارج می شود. (متغیر لولا).

$$\min \left\{ \frac{40}{2}, \frac{120}{3} \right\} = 20 \rightarrow s_1$$

پس x_2 وارد و s_1 خارج می شود.

مثال ۲: مسئله برنامه ریزی خطی را به روش Simplex حل کنید.

$$\max Z = 3x_1 + 5x_2$$

$$s.t. \quad x_1 \leq 4$$

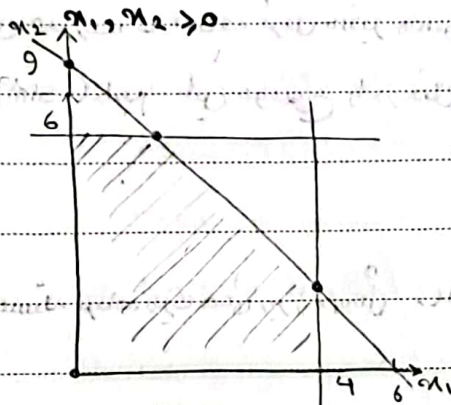
$$x_1 + S_1 = 4$$

$$2x_2 \leq 12$$

$$2x_2 + S_2 = 12$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

$$3x_1 + 2x_2 + S_3 = 18$$



$$3x_1 + 2x_2 = 18$$

$$x_1 = 0 \rightarrow x_2 = 9$$

$$x_2 = 0 \rightarrow x_1 = 6$$

مستویان اولیه

BFS	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	RHS
-----	---	-------	-------	-------	-------	-------	-----

$$Z_0 \quad 1 \quad -3 \quad -5 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$$

$$S_1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 4 \rightarrow \frac{RHS}{x_2} = \infty$$

$$S_2 \quad 0 \quad 0 \quad 2 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 12 \rightarrow \frac{RHS}{x_2} = 6 \checkmark \Rightarrow S_2 \text{ جای } x_2$$

$$S_3 \quad 0 \quad 3 \quad 2 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 18 \rightarrow \frac{RHS}{x_2} = 9$$

$$Z_0 \quad 1 \quad -3 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{5}{2} \quad 0 \quad 30$$

$$S_1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 4$$

$$S_2 \rightarrow x_2 \quad -5 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad \frac{1}{2} \quad 0 \quad 6$$

$$S_3 \quad 0 \quad 3 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 6$$

$$Z_0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{3}{2} \quad 1 \quad 36$$

$$S_1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad \frac{1}{3} \quad -\frac{1}{3} \quad 2$$

$$x_2 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad \frac{1}{2} \quad 0 \quad 6$$

$$x_1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad -\frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \quad 2$$

روش سیمپلکس برای min سازی

در این قسمت به حل مسائل min سازی توسط الگوریتم simplex می پردازیم. با توجه به این حقیقت که $\min z = \max(-z)$ پس می توان تابع هدف مسائل min سازی را به صورت مسئله max سازی نوشت. اما در مسائل min سازی غالباً محدودیت ها از نوع $\geq$ هستند که ایجاد مشکل می کند. در این حالت دیگر متغیر کمبود نداریم بلکه متغیر لغی از نوع مازاد خواهیم داشت. در این صورت با اضافه کردن متغیر مصنوعی سعی در پیدا کردن یک جواب اولیه (یک پایه شروع کننده روش simplex) داریم. این موضوع را در مثال زیر توضیح می دهیم.

مسئله برنامه ریزی خطی زیر را به روش simplex حل کنید

$$\min z = 6x_1 + 3x_2$$

$$\min z = 6x_1 + 3x_2 + 0s_1 + 0s_2$$

$$s.t. \quad 2x_1 + 4x_2 \geq 16$$

$$s.t. \quad 2x_1 + 4x_2 - s_1 = 16$$

$$4x_1 + 3x_2 \geq 24$$

$$4x_1 + 3x_2 - s_2 = 24$$

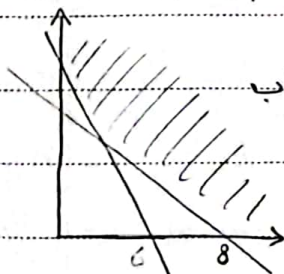
$$x_1, x_2 \geq 0$$

پس با تغییر min به max تابع هدف به صورت زیر خواهد بود

$$\max -z = -6x_1 - 3x_2 + 0s_1 + 0s_2$$

اما در ابتدا محققان پایه شروع کننده روش simplex نیست زیرا در این حالت $x_1 = x_2 = 0$ داریم ؟

$$s_1 = -16 \quad s_2 = -24$$



مثلاً فقط مبدأ در محدوده جواب

نمیست

پس باید یک روش مناسب برای شروع الگوریتم simplex معرفی کرد (بمجز مبدأ) این کار با دو روش M-بزرگ و روش دو غازی (دو مرحله ای) انجام می گیرد.

① روش ۲ - بزرگ (جریه ای)

برای اینکه در محدودیت های مسئله پایه همان ایجاد کنیم متغیرهای مصنوعی به محدودیت ها اضافه می کنیم.
 مثلاً در مثال قبل 2 متغیر مصنوعی R_1 و R_2 را به محدودیت ها اضافه می کنیم پس داریم :

$$2x_1 + 4x_2 - S_1 + R_1 = 16$$

$$R_1, R_2 \geq 0$$

$$4x_1 + 3x_2 - S_2 + R_2 = 24$$

پس فرم مسئله به صورت زیر حاصل می شود:

$$\text{max } -Z + 6x_1 + 3x_2 + MR_1 + MR_2 = 0$$

$$\text{s.t. } 2x_1 + 4x_2 - S_1 + R_1 = 16$$

$$4x_1 + 3x_2 - S_2 + R_2 = 24$$

$$x_1, x_2, R_1, R_2 \geq 0$$

حال مسئله فوق را به روش simplex حل می کنیم.

BFS	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	R_1	R_2	RHS
Z_0	-1	6	3	0	0	M	M	0
R_1	0	2	4	-1	0	1	0	16
R_2	0	4	3	0	-1	0	1	24
Z_0	-1	$-6M+6$	$-7M+3$	$+M$	$+M$	0	0	$-40M$
R_1	0	2	4	-1	0	1	0	16
R_2	0	4	3	0	-1	0	1	24
Z_0	-1	$-\frac{5}{2}M+\frac{9}{2}$	0	$\frac{13}{4}M+\frac{3}{4}$	M	$\frac{7}{4}M-\frac{3}{4}$	0	$-12M+12$
x_2	0	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	4
R_2	0	$\frac{5}{2}$	0	$\frac{3}{4}$	0	$-\frac{3}{4}$	1	12
Z_0	0	0	0	$-\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}+M$	$M-\frac{2}{5}$	$-\frac{168}{5}$
x_2	0	0	1	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{8}{5}$
x_1	0	1	0	$\frac{3}{10}$	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{24}{5}$

Subject _____

Date _____

① $\min z = x_1 - 2x_2$

جدول زیر را حل کنید (به روش Simplex)

s.t. $x_1 + x_2 \geq 2$

$-x_1 + x_2 \geq 1$

$x_2 \leq 3$

$x_1, x_2 \geq 0$

این روش برای کاهش فضای روش M-بزرگ ایجاد شده است. این روش بر دو مرحله انجام می شود.
مرحله اول برای یافتن یک پایه هرجه مسئله را حل می کند و سپس در مرحله دوم به حل مسئله اصلی می پردازیم. در عمل در
 فاز یک متغیرهای مصنوعی در محدودیت های مسئله را با مجموع آنها در نظر گرفته و این مجموع را به عنوان یک
 تابع هدف min می کنیم. (مقاوت می کند به مسئله max ضرایب یا min ضرایب باشند) با این تابع هدف
 و نیز مسئله اصلی به فاز اول وارد می شویم. و تا جایی که متغیرهای مصنوعی از پایه خارج شوند پیش می رویم. لذا
 در این حالت مقدار تابع هدف صفر خواهد بود. جدول بهینه فاز اول همان پایه هرجه شروع فاز دوم خواهد بود.
 فاز دوم را با جدول بهینه فاز یک و این بار با تابع هدف مسئله اصلی شروع می کنیم و تا جایی که جدول پیش می رویم.
 این الگوریتم را در مثال زیر نشان می دهیم.

$$\max Z = 4x_1 + x_2$$

$$\text{s.t. } 3x_1 + x_2 = 3$$

$$4x_1 + 3x_2 \geq 6$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

مثال: مسئله زیر را حل کنید. (به روش Simplex دو ضرایب)

$$\max Z = 4x_1 + x_2$$

حل:

$$\text{s.t. } 3x_1 + x_2 + R_1 = 3$$

$$4x_1 + 3x_2 - S_1 + R_2 = 6$$

$$x_1 + 2x_2 + S_2 = 3$$

$$x_i, R_j, S_k \geq 0$$

چون فقط باید با max, min, یا max تبدیل کردیم.

$$\min Z = R_1 + R_2$$

$$\max Z = -R_1 - R_2$$

فاز اول

$$\text{s.t. } 3x_1 + x_2 + R_1 = 3$$

$$\text{s.t. } 3x_1 + x_2 + R_1 = 3$$

$$4x_1 + 3x_2 - S_1 + R_2 = 6$$

$$4x_1 + 3x_2 - S_1 + R_2 = 6$$

$$x_1 + 2x_2 + S_2 = 3$$

$$x_1 + 2x_2 + S_2 = 3$$

$$x_i, R_j, S_k \geq 0$$

L/NOMAX

$$x_i, R_j, S_k \geq 0$$

	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	R_1	R_2	RHS
	-1	0	0	0	0	1	1	0
R_1	0	3	1	0	0	1	0	3
R_2	0	4	3	-1	0	0	1	6
S_2	0	1	2	0	1	0	0	3
	-1	-7	-4	1	0	0	0	-9
R_1	0	3	1	0	0	1	0	3
R_2	0	4	3	-1	0	0	1	6
S_2	0	1	2	0	1	0	0	3
	-1	0	$-\frac{5}{3}$	1	0	$\frac{7}{3}$	0	-2
x_1	0	1	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	0	1
R_2	0	0	$\frac{5}{3}$	-1	0	$-\frac{4}{3}$	1	2
S_2	0	0	$\frac{5}{3}$	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	2
	-1	0	0	0	0	1	1	0
x_1	0	1	0	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$
x_2	0	0	1	$-\frac{3}{5}$	0	$-\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{6}{5}$
S_2	0	0	0	1	1	1	-1	0

با جدول بهینه فاز اول و می‌تود مسئله اصلی و تابع هدف اصلی وارد فاز دوم خواهیم شد. ستون‌های R_1 و R_2 را حذف می‌کنیم.

همه بسط می‌دهند و می‌توان آنها را حذف نمود.

	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
	1	-4	-1	0	0	0
x_1	0	1	0	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$
x_2	0	0	1	$-\frac{3}{5}$	0	$\frac{6}{5}$
S_2	0	0	0	1	1	0
	1	0	0	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{18}{5}$
x_1	0	1	0	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$
x_2	0	0	1	$-\frac{3}{5}$	0	$\frac{6}{5}$
S_2	0	0	0	1	1	0

$$x_1^* = \frac{3}{5}, x_2^* = \frac{6}{5}, Z^* = \frac{18}{5}$$

$$s_1^* = 0, s_2^* = 0$$

LINOMAX⁵

حالت های خاص در روش Simplex

1. بهینه چندانکه این حالت زمانی اتفاق می افتد که یکی از متغیر غیر زائد مسئله موازی خط تابع هدف است. یعنی ضرایب تابع هدف، ضریبی از ضرایب متغیر مورد نظر باشد، حال میخواهیم این حالت خاص را در الگوریتم مسیله بررسی کنیم.
این کار را در مثال زیر انجام می دهیم.

$$\max Z = 40x_1 + 30x_2$$

$$s.t. \quad x_1 + 2x_2 \leq 40$$

$$4x_1 + 3x_2 \leq 120$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

مسئله برنامه ریزی خطی زیر را حل کنید.

$$\max Z - 40x_1 - 30x_2 = 0$$

$$s.t. \quad x_1 + 2x_2 + S_1 = 40$$

$$4x_1 + 3x_2 + S_2 = 120$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

BFS	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	RHS
Z_0	1	-40	-30	0	0	0
S_1	0	1	2	1	0	40
S_2	0	4	3	0	1	120
Z_0	1	0	0	0	10	1200
S_1	0	0	$\frac{5}{4}$	1	$-\frac{1}{4}$	10
x_1	0	1	$\frac{3}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	30
Z_0	1	0	0	0	10	1200
x_2	0	0	1	$\frac{4}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{40}{5}$
x_1	0	1	0	$-\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	24

همانطور که مشاهده می کنید جدول دوم بهینه

بود زیرا برای مشخص شدن بهینه چندانکه متغیر

x_2 را وارد پایه کنیم و باز هم جدول بهینه باقی

ماند. نشان می دهد این مسئله بهینه خط مرز به فرد

ندارد.

در سطر متغیر نیز تعداد متغیرها به 2 می رسد.

پایه است. در حقیقت در جدول دوم در سطر

هدف مقدار $x_2 = 0$ است که غیر عادی است.

این مورد از نشانه های جواب بهینه چندانکه

است.

2) فاقد ناحیه مجبه (جواب)؛ این حالت را در روش ترسیمی دیدیم و مشاهده شد که می‌تود مسئله هیچ استرایی ایجاد نمی‌کرد. حال این وضعیت را در روش Simple x بررسی می‌کنیم.

مثال: مسئله بهینه سازی خطی زیر را حل کنید.

$$\max z = 5x_1 + 3x_2$$

$$s.t. \quad 4x_1 + 2x_2 \leq 8$$

$$x_1 \geq 4$$

$$x_2 \geq 6$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\max z = 5x_1 - 3x_2$$

$$s.t. \quad 4x_1 + 2x_2 + S_1 = 8$$

$$x_1 - S_2 + R_2 = 4$$

$$x_2 - S_3 + R_3 = 6$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

BFS	z	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	R_2	R_3	RHS
z_0	1	-5	-3	0	0	0	M	M	0
S_1	0	4	2	1	0	0	0	0	8
R_2	0	1	0	0	-1	0	1	0	4
R_3	0	0	1	0	0	-1	0	1	6
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
z_0	1	$1+M$	0	$\frac{3}{2} + \frac{M}{2}$	M	M	0	0	$12-6M$
x_2	0	2	1	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	4
R_2	0	1	0	0	-1	0	1	0	4
R_3	0	-2	0	$-\frac{1}{2}$	0	-1	0	1	4

همانطور که مشاهده می‌شود در جدول بهینه ما سه معنوی R_2 و R_3 وجود دارند. این نشان می‌دهد مسئله از نوع فاقد ناحیه جواب است و مسئله جواب ندارد. در حالت کلی اگر در روش M - بزرگ یا دو قاری متغیرهای معنوی در پایه قرار داشتند مسئله از نوع فاقد ناحیه جواب است.

3 ناحیه بی‌کران به ما می‌دهد. این حالت در روش ترسیمی به صورت ناحیه جوابی نامتناهی بود. یعنی اشتباه می‌تواند مسئله ناحیه محدود نتیجه نمی‌داد. اکنون می‌خواهیم این حالت را در روش Simplex بررسی کنیم. مثال زیر را ببینید.

مثال: $\max Z = x_1 + 3x_2$

s.t. $x_1 - 2x_2 \leq 4$

$-x_1 + x_2 \leq 3$

$x_1, x_2 \geq 0$

حل: $\max Z - x_1 - 3x_2 = 0$

s.t. $x_1 - 2x_2 + S_1 = 4$

$-x_1 + x_2 + S_2 = 3$

$x_1, x_2 \geq 0$

BFS	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	RHS
Z_0	1	-1	-3	0	0	0
S_1	0	1	-2	1	0	4
S_2	0	-1	1	0	1	3
Z_0	1	-4	0	0		9
S_1	0	-1	0	1	2	10
x_2	0	-1	1	0	1	3

می‌بینیم که عنصر خروجی از پایه وجود ندارد چون نسبت min نسبت جوابی نمی‌دهد. این حالت نشان‌دهنده آن است که مسئله ناحیه جوابی بی‌کران با جواب ده دارد. در حالتی که ناحیه جوابی بی‌کران باشد، جواب بهینه موجود باشد روش Simplex هیچ نشانه‌ای ندارد. یعنی بعد حل مسئله به جواب بهینه خواهیم رسید.

۴- جواب تباهیده: دیدیم این حالت زمانی رخ می دهد که یک گوشه توسط $n+1$ محدودیت در مسئله ای با n متغیر ایجاد شود.

حال می خواهیم این حالت را در روش Simplex بررسی کنیم.

مثال: مسئله برنامه ریزی خطی زیر را به روش Simplex حل کنید.

$$\max Z = 4x_1 + 6x_2$$

$$\text{s.t. } 6x_1 + 4x_2 \leq 24$$

$$x_2 \leq 3$$

$$5x_1 + 10x_2 \leq 40$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\max Z - 4x_1 - 6x_2 = 0$$

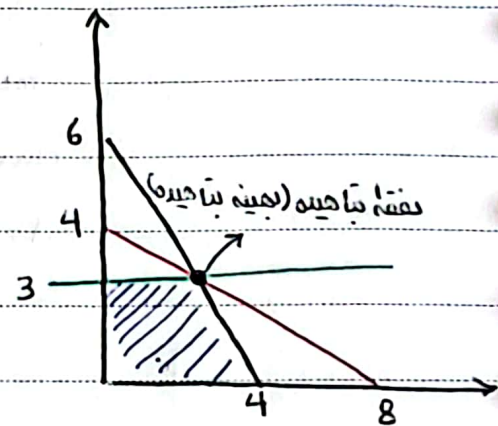
$$\text{s.t. } 6x_1 + 4x_2 + S_1 = 24$$

$$x_2 + S_2 = 3$$

$$5x_1 + 10x_2 + S_3 = 40$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

BFS	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	RHS
Z_0	1	-4	-6	0	0	0	0
S_1	0	6	4	1	0	0	24
S_2	0	0	1	0	1	0	3
S_3	0	5	10	0	0	1	40
Z_0	1	-4	0	0	6	0	18
S_1	0	6	0	1	-4	0	12
x_2	0	0	1	0	1	0	3
S_3	0	5	0	0	-10	1	10
Z_0	1	0	0	$\frac{4}{6}$	$\frac{20}{6}$	0	26
x_1	0	1	0	$\frac{1}{6}$	$-\frac{4}{6}$	0	2
x_2	0	0	1	0	1	0	3
S_3	0	0	0	$-\frac{5}{6}$	$-\frac{40}{6}$	1	0



متغیرهای آزاد در علامت

در مسائل بهینه سازی خطی که تا اینجا بررسی کردیم، نامتناهی بودن متغیرها نقش اساسی در روش حل داشت. اکنون می خواهیم حالتی را بررسی کنیم که متغیرها علامت آزاد داشته باشند. (یعنی داریم مثبت یا منفی). در این حالت می توان متغیر آزاد در علامت را توسط دو متغیر نامنفی بنویسیم. مثلاً فرض کنید x_1 متغیری آزاد در علامت باشد می توان نوشت: $x_1 = x_1' - x_1''$ که x_1' و x_1'' هر دو نامنفی اند. حال می توان بجای متغیر x_1 ، $x_1' - x_1''$ قرار داد با این تفاوت که اکنون x_1' و x_1'' هر دو نامنفی اند. مثال زیر را ببینید.

مسئله برنامه ریزی خطی را به روش Simplex حل کنید.

$$\max \quad z = 9x_1 + 18x_2$$

$$\text{s.t.} \quad 6x_1 + 3x_2 \geq 18$$

$$2x_1 + 2x_2 \leq 16$$

$$x_2 \geq 0, \quad x_1 \text{ is Free}$$

با تعریف $x_1 = x_1' - x_1''$ داریم:

$$\max \quad z = 9x_1' - 9x_1'' + 18x_2$$

$$\text{s.t.} \quad 6x_1' - 6x_1'' + 3x_2 \geq 18$$

$$2x_1' - 2x_1'' + 2x_2 \leq 16$$

$$x_1', x_1'', x_2 \geq 0$$

به فرم استاندارد تبدیل می کنیم

$$\max \quad z = 9x_1' - 9x_1'' - 18x_2 + MR_1 = 0$$

$$\text{s.t.} \quad 6x_1' - 6x_1'' + 3x_2 - S_1 + R_1 = 18$$

$$2x_1' - 2x_1'' + 2x_2 + S_2 = 16$$

$$x_1', x_1'', x_2, S_1, S_2, R_1 \geq 0$$

BFS	Z	x_1'	x_1''	x_2	s_1	s_2	R_1	RHS
Z_0	1	-9	+9	-18	0	0	M	0
R_1	0	6	-6	3	-1	0	1	18
S_2	0	2	-2	2	0	1	0	16
Z_0	1	$-9-6M$	$9+6M$	$-18-3M$	$+M$	0	0	$-18M$
R_1	0	6	-6	3	-1	0	1	18
S_2	0	2	-2	2	0	1	0	16
Z_0	1	0	0	$-\frac{27}{2}$	$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{3}{2}+M$	27
x_1'	0	1	-1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$	3
S_2	0	0	0	1	$\frac{1}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	10
Z_0	1	27	-27	0	$-\frac{1}{3}$	0	$6+M$	108
x_2	0	2	-2	1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	6
S_2	0	-2	2	0	$\frac{2}{3}$	1	$-\frac{2}{3}$	4
Z_0	1	0	0	0	3	$\frac{27}{2}$	$-3+M$	162
x_2	0	0	0	1	$\frac{1}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	10
x_1''	0	-1	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	2

$$Z^* = 162, x_2^* = 10, x_1''^* = 2, x_1'^* = 0, s_1 = 0, s_2 = 0, R_1 = 0$$

$$x_1 = x_1' - x_1'' \rightarrow x_1 = 0 - 2 = -2$$

نرم ماتریسی مسئله برنامه ریزی خطی

مسئله برنامه ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید.

$$\max z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$

$$\text{s.t. } a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n \leq b_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n \leq b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n \leq b_m$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

غیر امکان ندارد مسئله به صورت زیر است.

$$\max z = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n$$

$$\text{s.t. } a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n + s_1 = b_1$$

$$a_{21} x_1 + \dots + a_{2n} x_n + s_2 = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n + s_m = b_m$$

$$x_1, \dots, x_n \geq 0$$

$$s_1, \dots, s_m \geq 0$$

مسئله مذکور را می توان به صورت ماتریسی زیر نوشت:

$$\max z = Cx$$

$$\text{s.t. } [A, I] \begin{bmatrix} x \\ s \end{bmatrix} = b$$

$$x, s \geq 0$$

که در آن $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ بردار متغیرهای تصمیم $C = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ بردار ضرایب تابع هدف،

$A = (a_{ij})$ ماتریس ضرایب $n \times m$ بردار متغیرهای کمبود (اضافه) $s = (s_1, \dots, s_m)$ و

$b = (b_1, \dots, b_m)$ بردار مقادیر سمت راست است. یعنی می توان در جدول Simplex این عناصر را نشان داد.

BFS	Z	RHS
	$a_{11} \dots a_{1n}$	$1 \ 0 \dots 0$
	$a_{21} \dots a_{2n}$	$0 \ 1 \dots 0$
	$\vdots$	
	$a_{m1} \dots a_{mn}$	$0 \dots 0 \ 1$
		b
		LINOMAX

حال چند متغیر معرفی می کنیم ؟

$Z_j - C_j$: ضریب متغیر Z_j در سطر هدف، C_j در سطر x simple

$\bar{a}_{ij}$: ضریب متغیر x_j در محدودیت i ام

$\bar{p}_j$: بردار بسطی متغیر x_j در سمت راست

$\bar{b}$: بردار بسطی مقادیر سمت راست

$\bar{b}_i$: مقدار سمت راست محدودیت i ام

Z : مقدار Z در سمت راست.

این تعاریف در جدول اول روش Simplex بصورت زیر است:

$$Z_j - C_j = -C_j$$

$$\bar{a}_{ij} = a_{ij}$$

$$\bar{p}_j = p_j$$

$$\bar{b}_i = b_i$$

$$\bar{b} = b$$

پس ماتریس $[A, I]$ بصورت زیر نوشته می شود:

$$[A, I] = [P_{x_1}, P_{x_2}, \dots, P_{x_n}, P_{s_1}, \dots, P_{s_m}]$$

با تعریف متغیرهای اساسی برابر x_B ، متغیرهای غیر اساسی برابر x_N ، متغیرهای اساسی برابر

B ، و متغیرهای غیر اساسی برابر با N داریم.

$$[A, I] \begin{bmatrix} x \\ s \end{bmatrix} = b$$

$$\Rightarrow Ax + Is = b$$

با تعریف قبل معادله فوق بصورت زیر نوشته می شود:

$$\bar{B}'x \rightarrow Bx_B + Nx_N = b \Rightarrow \bar{B}'Bx_B + \bar{B}'Nx_N = \bar{B}'b \quad (1)$$

$$\Rightarrow x_B = \bar{B}'^{-1}b$$

از رابطه (1) داریم:

$$x_B + \bar{B}'^{-1}Nx_N = \bar{B}'^{-1}b$$

$$x_B + \bar{B}'^{-1}Px_n = \bar{B}'^{-1}b$$

$$x_B + \bar{P} x_N = \bar{b}$$

با استفاده از ① $\bar{P} = B^{-1}P$ داریم:

$$x_B = \bar{B}^{-1}b = \bar{b} \quad \text{چون } x_N = 0 \text{ پس}$$

در مسئله برنامه ریزی خطی داریم: (تابع هدف)

$$z = C_B x_B + C_N x_N \quad \text{با استفاده از ① یعنی } x_B = \bar{B}^{-1}b - \bar{B}^{-1}N x_N$$

$$= C_B (\bar{B}^{-1}b - \bar{B}^{-1}N x_N) + C_N x_N$$

$$z = x_N (C_N - C_B \bar{B}^{-1}N) + C_B \bar{B}^{-1}b$$

$$\Rightarrow z - x_N (C_N - C_B \bar{B}^{-1}N) = C_B \bar{B}^{-1}b$$

$$\Rightarrow z + x_N (C_B \bar{B}^{-1}N - C_N) = C_B \bar{B}^{-1}b$$

$$\Rightarrow z + x_N (C_B \bar{P} - C_N) = C_B \bar{b}$$

$$\Rightarrow z + x_N (C_B \bar{P} - C_N) = C_B \bar{b}$$

در رابطه بالا چون $x_N = 0$ پس $z^* = C_B \bar{b}$

از طرفی $C_B \bar{P} - C_N$ همان مقادیر سفر منفی در روش Simple x هستند و باید در بهینه

$$z_j - c_j = C_B \bar{B}^{-1}P_j - c_j$$

$$z_j - c_j = C_B \bar{P} - c_j$$

$$\max \quad z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$$

$$\text{s.t.} \quad x_1 + 2x_2 + x_3 + S_1 = 430$$

$$3x_1 + 2x_3 + S_2 = 460$$

$$x_1 + 4x_2 + S_3 = 420$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

برنامه ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید.

Subject

Date

BFS	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	RHS
z_0	1	-3	-2	-5	0	0	0	0
s_1	0	1	2	1	1	0	0	430
s_2	0	3	0	2	0	1	0	460
s_3	0	1	4	0	0	0	1	420
z_0	1	$\frac{9}{2}$	-2	0	0	$\frac{5}{2}$	0	1150
s_1	0	$-\frac{1}{2}$	2	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	200
x_3	0	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	230
s_3	0	1	4	0	0	0	1	420
z_0	1	4	0	0	1	2	0	1350
x_2	0	$-\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	100
x_3	0	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	230
s_3	0	2	0	0	-2	1	1	20

$$C_B = (s_1, x_3, s_3)$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$z^* = 1350, x_2^* = 100, x_3^* = 230, s_3^* = 20$$

$$x_1 = 0, s_1 = 0, s_2 = 0$$

$$\max \quad z = 6x_1 + 2x_2 + 12x_3$$

$$s.t. \quad 4x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 24$$

$$2x_1 + 6x_2 + 3x_3 \leq 30$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

مسئله برنامه ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید.

جدول دجینه این مسئله برنامه ریزی خطی به روش Simple x داده شده است. عناصر در جدول را بنویسید.

	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	RHS
z_0	1	a	2	0	d	0	e
x_3	0	b	$\frac{1}{3}$	h	i	f	f
s_2	0	c	0	j	k	m	g

$$B = [x_3, s_2]$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{p}_j = B^{-1} p_j$$

$$\bar{b} = B^{-1} b$$

$$0 \leq z_j - c_j = c_B \bar{p}_j - c_j$$

$$z^* = c_B \bar{b}$$

حل:

$$B = [x_3, s_2]$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{b} = \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} = B^{-1} b = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 24 \\ 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\bar{p}_{x_3} = B^{-1} p_{x_3} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{p}_{x_1} = B^{-1} p_{x_1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$z_{x_1} - c_{x_1} = c_B \bar{p}_{x_1} - c_{x_1} = (12, 0) \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ -2 \end{bmatrix} - 6 = 10$$

$$Z_{s_1} - C_{s_1} = C_B \bar{P}_{s_1} - C_{s_1} = (12, 0) \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -1 \end{pmatrix} - 0 = 4$$

$$Z^* = C_0 (12, 0) \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} = 96$$

$$i = \frac{1}{2}, \quad l = 0$$

$$k = 1, \quad m = 1$$

$$p = 8, \quad q = 6$$

$$h = 1, \quad j = 0$$

$$b = \frac{4}{3}, \quad c = 2$$

$$a = 10, \quad d = 4$$

$$e = 96$$

دوطان مسائل برنامه ریزی خطی

برای شروع دوطان ابتدا لازم است مفهوم قیمت سایه ای را تعریف کنیم.

قیمت سایه ای: در حل مسائل برنامه ریزی خطی به روش Simplex علاوه بر جواب های دهی به اطلاعاتی دیگر نیز می توان بدست آورد که یکی از آنها قیمت سایه ای است. طای اوقات قیمت سایه ای را ارزش اقتصادی منابع نیز می گویند.

تعریف قیمت سایه ای: قیمت سایه ای عبارت است از ارزش نهایی منابع به کار رفته در تولید مثلاً قیمت سایه ای منبع i ام (که آن را با y_i نمایش می دهیم) بیانگر آهنگ افزایش Z در اثر افزایش یک واحد به این منبع (b.i) است.

در روش Simplex قیمت سایه ای هر منبع مورد نظر را می توان از طریق متغیر متغیر y_i آن منبع در سطر متغیر جدول دهی بدست آورد.

مفهوم در نظر داریم که قیمت سایه ای با فرض ثابت نه داشتن سایر شرایط معنی دار است.

موارد فوق را در یک مثال بررسی می کنیم

مثال ۲: یک شرکت تولیدی در نظر دارد سه نوع محصول مختلف تولید کند. برای تولید آنها به منابع ① نیروی کار و ② مواد اولیه نیاز دارد. سود هر محصول و منابع مورد نیاز برای هر محصول در جدول زیر آمده است.

منابع مورد نیاز	محصول			منابع موجود
	3	2	1	
نیروی کار	1	2	2	430
مواد اولیه	2	1	3	460
سود حاصل از تولید	5	3	3	—

مدل برنامه ریزی خطی این مسئله به فرم زیر است:

$$\max z = 3x_1 + 3x_2 + 5x_3$$

$$s.t. \quad 2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 430$$

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 460$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

مسئله فوق را به روش Simplex حل کردیم. جدول بهینه این مثال به صورت زیر حاصل شد:

	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	RHS
z_0	1	$\frac{14}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{400}{6} + 1150$
x_2	0	$\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{400}{3}$
x_3	0	$\frac{4}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{490}{3}$

قیمت سایه ای منبع اول (نیروی کار) برابر $\frac{1}{3}$ است. یعنی با افزایش یک واحد منبع اول به مقدار $\frac{1}{3}$ به z^* اضافه خواهد شد.

با توجه به توضیحات فوق می توان گفت که قیمت سایه ای برای منبع z_1 هم معرف حدالتر عینی است که پرداخت آن برای افزایش یک واحد از این منبع مقرون به صرفه است.

مسئله دوگان:

دوگان یک مسئله برنامه ریزی خطی عبارت است از یک مسئله برنامه ریزی خطی دیگر به منظور یافتن ارزش هایی که ملاک ارزیابی منابع مورد استفاده قرار می گیرند. منظور از ارزش های گفته شده، قیمت های سایه ای است.

در حقیقت منابع باید به نحوی تعیین گردد که مجموع ارزشی نسبت داده شده به منابع به طرفت حداقل گردد.

$$\min \quad w = 430 y_1 + 460 y_2$$

$$\text{s.t.} \quad 2y_1 + 3y_2 \geq 3$$

$$2y_1 + y_2 \geq 3$$

$$y_1 + 2y_2 \geq 5$$

$$y_1, y_2 \geq 0$$

برای نوشتن مسئله دوگان یک مسئله برنامه ریزی خطی فقط می توان از جدول زیر استفاده کرد.

	مسئله min	مسئله max
متغیرها	≥ 0	≤ 0
محدودیت ها	≤ 0	≥ 0
نامعین (آزاد)	$\leftarrow$	$\rightarrow$
محدودیت ها	≥ 0	≥ 0
متغیرها	≤ 0	≤ 0
نامعین (آزاد)	$\rightarrow$	$\leftarrow$

مثلاً برای مسئله دوگان مثال قبل به صورت زیر است.

$$\min \quad w = 430 y_1 + 460 y_2$$

$$\text{s.t.} \quad 2y_1 + 3y_2 \geq 3$$

$$2y_1 + y_2 \geq 3$$

$$\text{P4PCO} \quad y_1 + y_2 \geq 5$$

$$y_1, y_2 \geq 0$$

مثال ۲: برای مسئله دوگان مسئله برنامه ریزی خطی زیر را بنویسید.

$$\max \quad z = 8x_1 + 3x_2 - 2x_3$$

$$\text{s.t.} \quad x_1 - 6x_2 + x_3 \geq 2$$

$$5x_1 + 7x_2 - 2x_3 = -4$$

$$x_1, x_2, x_3 \text{ نامقید (آزاد)}, x_2 \geq 0$$

$$\min \quad w = 2y_1 - 4y_2$$

$$\text{s.t.} \quad y_1 + 5y_2 \leq 8$$

$$-6y_1 + 7y_2 \geq 3$$

$$y_1 - 2y_2 = -2$$

$$y_1, y_2 \text{ نامقید (آزاد)}$$

حقیقتی مسئله دوگان

با استفاده از مسئله P (اولیه) و D (دوگان) می توان نتایجی بر حسب نوع جواب بدست آورد. در زیر به ارائه آن می پردازیم:

حقیقت ۱) دوگان دوگان یک مسئله خود مسئله است.

$$\max \quad z = 3x_1 + 3x_2 + 5x_3$$

برای مثال دوگان مثال قبل را می نویسیم:

$$\text{s.t.} \quad 2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 430$$

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 460$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

نه همان مسئله اولیه است

حقیقت ۲) مقدار تابع هدف به ازای هر جواب شدنی مسئله $\min$ ملای همواره بزرگتر مساوی مقدار تابع هدف به ازای هر جواب شدنی مسئله $\max$ سازی است.

مسائل اولیه و دوگان را در حالت کلی در نظر بگیرید.

$$(P) \begin{cases} \min & cx \\ \text{s.t.} & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{cases} \quad (D) \begin{cases} \max & wb \\ \text{s.t.} & wA \leq c \\ & w \geq 0 \end{cases}$$

همچنین فرض کنید x_0 یک جواب شدن از مسئله (P) و w_0 یک جواب شدن برای مسئله (D) باشد.
پس داریم:

$$\begin{cases} x_0 \geq 0 \\ Ax_0 \geq b \end{cases}, \quad \begin{cases} w_0 \geq 0 \\ w_0 A \leq c \end{cases}$$

حال قید $Ax_0 \geq b$ از طرف چپ در $w_0 \geq 0$ و قید $w_0 A \leq c$ را از راستا در $x_0 \geq 0$ ضرب می‌کنیم و داریم:

$$\begin{aligned} Ax_0 \geq b &\Rightarrow w_0 Ax_0 \geq w_0 b \\ w_0 A \leq c &\Rightarrow w_0 Ax_0 \leq c x_0 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} Ax_0 \geq b \\ w_0 A \leq c \end{aligned}} \right\} \Rightarrow w_0 b \leq w_0 Ax_0 \leq c x_0$$

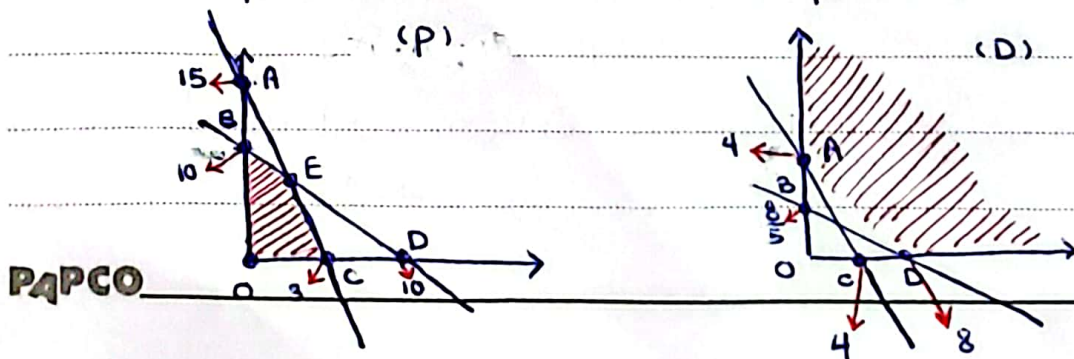
تابع هدف (D) $\downarrow$ max
تابع هدف (P) $\downarrow$ min

دوگان قوی ←

مقیه 3 اگر یکی از مسائل اولیه یا دوگان جواب بهینه داشته باشد آن‌ها هر دو مسئله جواب بهینه دارند و مقادیر تابع هدف آنها با هم برابر است یعنی $cx^* = w^*b$

$$(P) \begin{cases} \max & z = 8x_1 + 4x_2 \\ \text{s.t.} & x_1 + x_2 \leq 10 \\ & 5x_1 + x_2 \leq 15 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \quad (D) \begin{cases} \min & w = 15y_1 + 15y_2 \\ \text{s.t.} & y_1 + 5y_2 \geq 8 \\ & y_1 + y_2 \geq 4 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

این دو مسئله را توسط روش هندسی حل می‌کنیم. نقاط گوشه‌ای هر دو را در جدولی وارد می‌کنیم.



نقاط (x_1, x_2, s_1, s_2)	شدن	w	نقاط (x_1, x_2, s_1, s_2)	شدن	Z
$A(0, 4, -12, 0)$	بله	60	$(0, 15, -5, 0)$	خیر	60
$B(0, \frac{12}{5}, 0, 0)$	خیر	24	$B(0, 10, 0, 5)$	بله	40
$O(0, 0, 8, 4)$	خیر	0	$O(0, 0, 10, 15)$	بله	0
$C(4, 0, 4, 0)$	خیر	40	$C(3, 0, 7, 0)$	بله	24
$D(8, 0, 0, -4)$	بله	80	$D(10, 0, 0, -5)$	خیر	80
$E(3, 1, 0, 0)$	بله	45	$E(\frac{5}{4}, \frac{35}{4}, 0, 0)$	بله	45

شرایط حائل زائد (لغوی)

در مسئله اولیه فرض کنید متغیرهای تصمیم را با x و متغیرهای زائد (لغوی) را با s و در مسئله دوم فرض کنید متغیرهای تصمیم را با y و متغیرهای زائد (لغوی) را با t نمایش دهیم. در این صورت شرایط زیر در هر تفرقه شدنی متناظر در مسائل اولیه و دومان برقرار است.

$$\begin{cases} x + t = 0 \\ y + s = 0 \end{cases}$$

حاصل زائد دیتاست

اگر در مسئله دوم ارزش منابع به کار رفته در تولید یک واحد بیشتر از بهره‌وری حاصل از فروش آن باشند ($t > 0$) تولید را باید متوقف کرد یعنی $x = 0$.

نظیر مسئله برای مسئله اولیه اگر تصمیم به تولید مالایی گرفته شود (یعنی $x > 0$) یعنی ارزش منابع به کار رفته در تولید یک واحد آن دقیقاً برابر است با بهره‌وری حاصل از تولید آن (یعنی $t = 0$).

رابطه $s + y = 0$ نشان می‌دهد اگر در مسئله اولیه از ظرفیت موجودی منبع استفاده نشود (یعنی $s > 0$) پس آن منبع غیر لایزال است و باید در مسائل آن فرضی از دست نخواهد رفت پس قیمت سایه‌ای آن مساوی 0 است (یعنی $y = 0$).

از طرف دیگر اگر قیمت سایه‌ای مثبتی است (یعنی $y > 0$) باشند نشان می‌دهد آن منبع لایزال است و از ظرفیت موجودی > تولید محصولات استفاده شده است (یعنی $s > 0$).

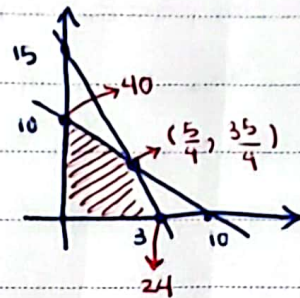
مثال: مسئله برنامه ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید و دوگان آن را بنویسید، جواب مسائل اولیه و دوگان را بیست

$$\max z = 8x_1 + 4x_2$$

$$s.t. \quad x_1 + x_2 \leq 10$$

$$5x_1 + x_2 \leq 15$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



آورد
اوج (بهینه)

RHS	Z0	x_1	x_2	s_1	s_2	BFS
Z	1	-8	-4	0	0	0
s_1	0	1	1	1	0	10
s_2	0	5	1	0	1	15
Z	1	0	$-\frac{12}{5}$	0	$\frac{8}{5}$	24
s_1	0	0	$\frac{4}{5}$	1	$-\frac{1}{5}$	7
x_1	0	1	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	3
Z	1	0	0	3	1	45
x_2	0	0	1	$\frac{5}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{35}{4}$
x_1	0	1	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{5}{4}$

حل 3: $z - 8x_1 - 4x_2 = 0$
 $x_1 + x_2 + s_1 = 10$
 $5x_1 + x_2 + s_2 = 15$

دوگان: $\min w = 10y_1 + 15y_2$
 $s.t. \quad y_1 + 5y_2 \geq 8$
 $y_1 + y_2 \geq 4$
 $y_1, y_2 \geq 0$

پس جواب بهینه مسئله اولیه برابر است با: $x_1^* = \frac{5}{4}$, $x_2^* = \frac{35}{4}$, $Z^* = 45$, $s_1^* = s_2^* = 0$

$$t \cdot x = 0 \quad \begin{cases} t_1 x_1 = 0 \\ t_2 x_2 = 0 \end{cases} \quad s \cdot y = 0 \quad \begin{cases} s_1 y_1 = 0 \\ s_2 y_2 = 0 \end{cases}$$

از شرط ملحق زائد (مربود) داریم:

چون $x_1^* \neq 0$ و $x_2^* \neq 0$ پس $t_1^* = 0$ و $t_2^* = 0$ لذا از محدودیت های مسئله دوگان داریم:

$$\begin{cases} y_1^* + 5y_2^* = 8 \\ y_1^* + y_2^* = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} y_1^* = 3 \\ y_2^* = 1 \end{cases}$$

$$w^* = 45$$

$$t_1^* = t_2^* = 0$$

توجه: هرگز استاندارد مسئله دوگان نداریم

$$\begin{cases} w - 10y_1 - 15y_2 = 0 \\ y_1 + 5y_2 - t_1 = 8 \\ y_1 + y_2 - t_2 = 4 \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

هنگام: مسئله برنامه ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید.

$$\min \quad Z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5$$

$$\text{s.t.} \quad x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 \geq 4$$

$$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 \geq 3$$

$$x_1, x_2, \dots, x_5 \geq 0$$

جواب بهینه مسئله فوق و دوگان آن را بیابید.

$$\max \quad w = 4y_1 + 3y_2$$

حل: نرم دوگان مسئله برای نوشتن و به روش هندسی حل می کنیم

$$y_1 + 2y_2 \leq 2$$

$$y_1 - 2y_2 \leq 3$$

$$2y_1 + 3y_2 \leq 5$$

$$y_1 + y_2 \leq 2$$

$$3y_1 + y_2 \leq 3$$

$$y_1, y_2 \geq 0$$

به روش هندسی مسئله دوگان را حل کردیم و جواب بهینه برابر شد با $y_1^* = 0.8$ و $y_2^* = 0.6$

اما از قیود مسئله دوگان باید متغیر t_1 و t_5 را پیدا کنیم.

$$y_1 + 2y_2 + t_1 = 2$$

$$y_1 - 2y_2 + t_2 = 3$$

$$2y_1 + 3y_2 + t_3 = 5$$

$$y_1 + y_2 + t_4 = 2$$

$$3y_1 + y_2 + t_5 = 3$$

$$t_1^* = 0, \quad t_5^* = 0, \quad t_2^* = 3.4, \quad t_3^* = 1.6, \quad t_4^* = 0.6$$

با استفاده از قیدهای فوق داریم:

از شرط اصل، ابتدا (لغوب) داریم:

$$x \cdot t = 0 \begin{cases} x_1 t_1 = 0 \\ \vdots \\ x_5 t_5 = 0 \end{cases}$$

چون x_2, x_3, x_4 و x_5 صفر نیستند پس $x_2^* = x_3^* = x_4^* = 0$

با جایگذاری $x_2^* = x_3^* = x_4^* = 0$ در مقید مسئله اولیه داریم:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_5 - s_1 = 4 \\ 2x_1 + x_5 - s_2 = 3 \end{cases}$$

از شرط s_1, s_2 داریم:

$$\begin{cases} s_1, y_1 = 0 \\ s_2, y_2 = 0 \end{cases}$$

چون y_1, y_2 صفر نیستند پس $s_1^* = s_2^* = 0$

لذا از دستگاه فوق داریم:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_5 &= 4 & x_1^* = x_5^* &= 1 & z^* = w^* &= 5 \\ 2x_1 + x_5 &= 3 \end{aligned}$$

روابط بین ناحیه مسئله اولیه و دوگان

① هرگاه مسئله اولیه دارای ناحیه جواب محدود باشد، مسئله دوگان آن دارای ناحیه هوجب بی‌دران باشد بهینه است.

② هرگاه مسئله اولیه دارای ناحیه جواب بی‌دران بدون گوشه بهینه باشد آنگاه دوگان آن فاقد ناحیه جواب است.

مثال: مسئله برنامه ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید.

$$\max Z = 4x_1 + 2x_2$$

$$\text{s.t. } x_1 \geq 4$$

$$x_2 \leq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

دوگان مسئله و ناحیه جواب هر دو مسئله اولیه و دوگان را رسم کنید.

③ هرگاه مسئله اولیه فاقد ناحیه هوجب باشد آنگاه دوگان آن یا ناحیه جواب بی‌دران بدون گوشه بهینه است.

یا فاقد ناحیه هوجب خواهد بود.

مثال: مسائل بهینه سازی خطی زیر را در نظر بگیرید.
دوگان آنها را بنویسید و ناحیه جواب مسائل اولیه و دوگان را رسم کنید.

$$\max Z = 3x_1 + 3x_2$$

$$s.t. \quad 2x_1 + x_2 \leq 2$$

$$3x_1 + 4x_2 \geq 12$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\max Z = 3x_1 + 3x_2$$

$$s.t. \quad x_1 - x_2 \geq 1$$

$$-x_1 + x_2 \geq 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

الگوریتم سیجیلس دوگان

در الگوریتم Simplex دیدیم، مایه جواب اولیه وجود نداشته می توانستیم از دوروش M-بزرگ و دوخاز استفاده کنیم. حال اگر در مسئله اولیه جواب موجود باشد (یعنی همبدا محقق باشد) شروع بسته روش Simplex (بنابراین) اما مسئله دوگان در حالت استاندارد خود باشند می توانیم از الگوریتمی موسوم به سیجیلس دوگان استفاده کنیم. در زیر این الگوریتم را ارائه می دهیم:

① مسئله به نرم استاندارد Simplex دوگان تبدیل می کنیم (max سازی با محدودیت های مقفله و متغیرهای تقسیم در تابع هدف ضرایب غیر مثبت دارند $C_j > 0$)

② یک جواب اساسی اولیه انتخاب کنید بهینه اما غیرموجود باشد و سپس قابلیت اول Simplex را ایفا کنید

③ حقیقی ترین مقدار سمت راست (b) را به عنوان مقدار لولا انتخاب کنید. متغیر مربوط به سفر لولا را متغیر خروجی می نامیم. در صورتیکه تماماً یا عدد سمت راست مقداری غیر حقیقی داشته باشد جواب اساسی موجود و بهینه است.

④ برای انتخاب متغیر ورودی از حداقل حاصل تقسیم عناصر ردیف (سفر) Z بر قدر حطلق عناصر غیر حقیقی سفر لولا استفاده کنید.

عناصر لولا حتماً یک عدد حقیقی است. اگر تماماً عناصر سفر لولا غیر حقیقی باشند، آن گاه مسئله فاقد ناحیه جواب است.

⑤ عملیات ردیفی روش Simplex را به طور معمول انجام دهید تا به جدول جدید برسید و به ③ برگردید.

مثال: مسئله بهینه سازی زیر را در نظر بگیرید

$$\min Z = 10x_1 + 5x_2 + 4x_3$$

$$s.t. \quad 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 \geq 3$$

$$4x_1 + 2x_3 \leq 10$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

حل: فرم استاندارد Simplex دوگان به صورت زیر است.

$$\max -z = -10x_1 - 5x_2 - 4x_3 \rightarrow -z + 10x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 0$$

$$\text{s.t.} \quad -3x_1 - 2x_2 + 3x_3 \leq -3$$

$$-4x_1 - 2x_3 \leq$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

BFS	z_0	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	RHS
z_0	-1	10	5	4	0	0	0
s_1	0	-3	-2	3	1	0	-3
s_2	0	-4	0	-2	0	1	-10
z_0	-1	2	5	0	0	2	-20
	0	-9	-2	0	1	$\frac{3}{2}$	-18
	0	2	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	5
" z_0 "	-1	0	$\frac{41}{9}$	0	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{3}$	-24
	0	1	$\frac{2}{9}$	0	$-\frac{1}{9}$	$-\frac{1}{6}$	2
	0	0	$-\frac{4}{9}$	1	$-\frac{2}{9}$	$-\frac{1}{6}$	1

توجه داریم که در مسئله اولیه به روش حل Simplex از یک جواب اولیه یابد و شروع کرده و به جواب بهینه می‌رسیم. در حقیقت مسئله اولیه به روش حل Simplex به دنبال بهینه در

موجه بودن جواب هاست. حال آنکه در روش Simplex دوگان از یک جواب غیر موجه و بهینه شروع کرده و به یک جواب بهینه و موجه می‌رسیم. در واقع الگوریتم Simplex دوگان به دنبال جواب بودن در عین بهینه جواب هاست.

$$s_1^* = s_2^* = 0, \quad x_1^* = 2, \quad x_2^* = 0, \quad x_3^* = 1, \quad z^* = 24$$

مسئله بهینه سازی زیر را به روش Simplex دوگان حل کنید:

$$\min z = 2x_1 + x_2$$

$$\text{s.t.} \quad 3x_1 + x_2 \geq 3$$

$$4x_1 + 3x_2 \geq 6$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

حل: فرم استاندارد Simplex دوگان

$$\max -z = -2x_1 - x_2$$

$$\text{s.t.} \quad -3x_1 - x_2 \leq 3$$

$$-4x_1 - 3x_2 \leq 6$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 3$$

$$\max -z + 2x_1 + x_2 = 0 \quad \text{حال داریم:}$$

$$\text{s.t.} \quad -3x_1 - x_2 + s_1 = 3$$

$$-4x_1 - 3x_2 + s_2 = 6$$

INOMAX

$$x_1 + 2x_2 + s_3 = 3$$

BFS	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	RHS
z_0	-1	2	1	0	0	0	0
s_1	0	-3	-1	1	0	0	-3
s_2	0	-4	-3	0	1	0	-6
s_3	0	1	2	0	0	1	3
z_0	-1	$\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	0	-2
s_1	0	$-\frac{5}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	-1
x_2	0	$\frac{4}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	2
s_3	0	$-\frac{5}{3}$	0	0	$\frac{2}{3}$	1	-1
z_0	-1	0	0	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	$-\frac{12}{5}$
x_1	0	1	0	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$
x_2	0	0	1	$\frac{4}{5}$	$-\frac{3}{5}$	0	$\frac{6}{5}$
s_3	0	0	0	-1	1	1	0

تحلیل حساسیت در برنامه ریزی خطی

در این بخش به دنبال بررسی بازه ای از ضرایب مسئله برنامه ریزی خطی هستیم که جواب بهینه در این بازه بهینه باقی بماند. در حقیقت تحلیل حساسیت را یافتن تغییرات مناسب برای روی مسائل برنامه ریزی خطی تعریف می کنیم که در آن جواب مسئله بهینه باقی بماند.

این تغییرات می تواند تغییر مقادیر سمت راست، تغییر ضرایب تابع هدف، تغییر ضرایب فنی فیتود، اضافه شدن یک متغیر جدید به مسئله و یا اضافه شدن یک محدودیت جدید به مسئله باشد. در ادامه به بررسی تغییرات سمت راست مسئله می پردازیم.

تغییر در مقادیر سمت راست

مسئله برنامه ریزی خطی با مقادیر سمت راست b را در نظر بگیرید. تغییر در تغییر این مقادیر ممکن است بر شدنی بودن مسئله تأثیر بگذارد. ($b > 0$) در حقیقت تغییر مقادیر b تأثیر شدنی را تغییر می دهد. ممکن است ناحیه بزرگتر، کوچکتر یا تهی شود.

لذا باید طبق حالت هایی که جواب بهینه ممکن است تغییر کند بررسی شود. به یاد داریم که در نرم ماتریسی برای یافتن جواب

$$x^* = B^{-1}b$$

بهینه از مقادیر b به صورت زیر استفاده می شود. پس می توان با استفاده از رابطه فوق برای بهینه باقی ماندن جواب بدست آورد.

$$\max \quad Z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3$$

$$\text{s.t.} \quad x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 5$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 2$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

مثال ۵: مسئله برنامه ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید
الف) اثر سمت راست مسئله از $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ به $\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$ تغییر کند چه تاثیری

بر مسئله دارد؟

ب) اثر سمت راست مسئله از $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ به $\begin{pmatrix} 3 \\ 10 \end{pmatrix}$ تغییر کند چه تاثیری

بر مسئله دارد؟

ج) دامنه تغییرات منابع اول و دوم را به گونه ای تعیین کنید که مسئله شدن نباشد.

توجه داریم که جدول بهینه مسئله به صورت زیر داده شده است

	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	RHS
Z_0	1	0	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{2}{5} + M$	$\frac{14}{5}$
x_2	0	0	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{8}{5}$
x_1	0	1	0	$\frac{7}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{9}{5}$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1}b = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12}{5} \\ \frac{11}{5} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (\text{حل الف})$$

پس مسئله شدن باقی می ماند و جواب بهینه از $\begin{pmatrix} \frac{8}{5} \\ \frac{9}{5} \end{pmatrix}$ به $\begin{pmatrix} \frac{12}{5} \\ \frac{11}{5} \end{pmatrix}$ تغییر می کند.

$$B^{-1}b = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{23}{5} \end{bmatrix}$$

حل ب) مسئله شدن نیست چون یکی از b_i ها منفی است. باید مسئله را توسط simplex دوباره حل کنیم.

برای حل این مسأله باید بردار $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ را بیابیم. برای این منظور ابتدا b_1 را ثابت فرض کرده و برای b_2 پیدا می‌کنیم و سپس بالعکس.

فرض کنیم $b_1 = 5$ پس باید $B^{-1} \begin{pmatrix} 5 \\ b_2 \end{pmatrix} \geq 0$

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - \frac{b_2}{5} \\ 1 + \frac{2b_2}{5} \end{bmatrix} \geq 0 \quad \left. \begin{array}{l} \rightarrow \frac{b_2}{5} \leq 2 \Rightarrow b_2 \leq 10 \\ \rightarrow 1 + \frac{2b_2}{5} \geq 0 \Rightarrow b_2 \geq -\frac{5}{2} \end{array} \right\} \rightarrow -\frac{5}{2} \leq b_2 \leq 10$$

در واقع $-2.5 \leq b_2 \leq 10$ درست‌تر است چون b_1 ما نمی‌تواند منفی باشند.

برای یافتن کران‌های b_1 داریم:

$$B^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ 2 \end{pmatrix} \geq 0$$

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ 2 \end{pmatrix} \geq 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{2b_1}{5} - \frac{2}{5} \\ \frac{b_1}{5} + \frac{4}{5} \end{bmatrix} \geq 0 \quad \left. \begin{array}{l} \rightarrow \frac{2b_1}{5} - \frac{2}{5} \geq 0 \Rightarrow b_1 \geq 1 \\ \rightarrow \frac{b_1}{5} + \frac{4}{5} \geq 0 \Rightarrow b_1 \geq -4 \end{array} \right\} \rightarrow b_1 \geq 1$$

(2) تحلیل حساسیت در فنرایب تابع هدف

تغییر در فنرایب تابع هدف به سطر منفی تاثیر دارد. توسط فرمول $\bar{c}_j = z_j - c_j$ بدست می‌آید:

$$\bar{c}_j = c_j - B^{-1} p_j$$

(3) تحلیل حساسیت در فنرایب متغیرها (زاویه‌ها)

تغییر این مقادیر بر روی فنرایب متغیر داخل جدول Simplex تاثیر می‌گذارد. می‌توان این تغییر را توسط فرمول $\bar{p}_j = B^{-1} p_j$ بدست آورد.

با توجه به دو حالت قبل اگر $\bar{c}_j$ منفی باشد آن‌گاه جدول از جهت بیرون خارج می‌شود. لذا متغیرهای منفی مانده ورودی باید هستند و در این حالت جواب قبلی بهینه نیست.

در حالتی که $\bar{P}$ منفی باشد و متغیر x نامزد ورود به پایه باشد آنگاه مسئله جواب نخواهد داشت زیرا نسبت
مینیم نسبت جواب می‌دهد.

مسئله برنامه ریزی خطی زیر همراه با جدول بهینه آن را در نظر بگیرید.

$$\max Z = 2x_1 + 3x_2 + x_3$$

$$s.t. Ax + S = b \quad S = (S_1, S_2)$$

$$x_1, x_2, S_1, S_2 \geq 0$$

BFS	Z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	RHS
Z_0	1	0	0	3	3	1	8
x_1	0	1	0	-1	3	-1	1
x_2	0	0	1	2	-1	1	2

الف) دامنه تغییرات C_2 (ضرایب متغیر x_2 در تابع هدف را به گونه ای تعیین کنید که مدل بهینه باشد.

ب) جواب بهینه را برای $C_2 = 1$ پیدا کنید.

ج) دامنه تغییر C_1 را به گونه ای تعیین کنید که جدول بهینه بماند.

د) ضرایب فنی متغیرهای x_1, x_2, x_3 را در مسئله بدست آورید.

ه) اثر ضرایب x_3 بر مقدار هدف از 1 به 4 تغییر کند چه تأثیری بر مسئله دارد؟

و) موجودی منابع اول و دوم را بیابید.

ز) صورت کلی مسئله را بنویسید.

حله: **الف)** چون x_2 در پایه قرار دارد لذا تغییرات C_2 به نحوی است که می توانیم بهینه جدول را تغییر دهیم. لذا باید
شرط بهینه $\bar{C} \geq 0$ بررسی شود.

$$\bar{C}_{x_1} = C_B \bar{P}_{x_1} - C_{x_1} = (2, C_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 = 0$$

$$\bar{C}_{x_2} = C_B \bar{P}_{x_2} - C_{x_2} = (2, C_2) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 = -2 + C_2 \geq 0 \Rightarrow C_2 \geq 3$$

$$\bar{C}_{S_1} = C_B \bar{P}_{S_1} - C_{S_1} = (2, C_2) \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} - 0 = 6 - C_2 \geq 0 \Rightarrow C_2 \leq 6$$

$$3 \leq C_2 \leq 6$$

(ج) در این حالت $C_B = (2, 1)$ لذا باید متناظر با هر دو باره محاسبه شود.

$$\bar{C}_{x_1} = C_B \bar{P}_{x_1} - C_{x_1} = (2, 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 = 0$$

$$\bar{C}_{x_2} = C_B \bar{P}_{x_2} - C_{x_2} = (2, 1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 = 0$$

$$\bar{C}_{x_3} = C_B \bar{P}_{x_3} - C_{x_3} = (2, 1) \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} - 1 = -1 < 0$$

$$\bar{C}_{s_1} = C_B \bar{P}_{s_1} - C_{s_1} = (2, 1) \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} - 0 = 5 > 0$$

$$\bar{C}_{s_2} = C_B \bar{P}_{s_2} - C_{s_2} = (2, 1) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 = -1 < 0$$

$$Z = C_B \bar{b} = (2, 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 4$$

همچنین Z برابر خواهد بود با

پس جدول به صورت زیر حاصل می شود:

BFS	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	RHS
z_0	1	0	0	-1	5	-1	4
x_1	0	1	0	-1	3	-1	1
x_2	0	0	1	2	-1	1	2
z_0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{9}{2}$	$-\frac{1}{2}$	5
x_1	0	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	2
x_2	0	0	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
z_0	1	0	1	1	4	0	6
x_1	0	1	1	1	2	0	3
s_2	0	0	1	2	-1	1	2

$$\bar{c}_{x1} = c_B \bar{P}_{x1} - c_{x1} = (c_1, 3) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - c_1 = 0$$

$$\bar{c}_{x2} = c_B \bar{P}_{x2} - c_{x2} = (c_1, 3) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 = 0$$

$$\bar{c}_{x3} = c_B \bar{P}_{x3} - c_{x3} = (c_1, 3) \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} - 1 \geq 0$$

$$\Rightarrow c_1 + 6 - 1 \geq 0$$

$$\Rightarrow c_1 \leq 5$$

$$\bar{c}_{s1} = c_B \bar{P}_{s1} - c_{s1} = (c_1, 3) \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} - 0 \geq 0$$

$$\Rightarrow 3c_1 - 3 \geq 0 \Rightarrow c_1 \geq 1$$

$$\bar{c}_{s2} = c_B \bar{P}_{s2} - c_{s2} = (c_1, 3) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 \geq 0 \Rightarrow -c_1 + 3 \geq 0 \Rightarrow c_1 \leq 3$$

$$1 \leq c_1 \leq 3$$

$$\bar{P}_{x1} = \bar{B}^{-1} P_{x1} = \bar{B}^{-1} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow a_{12} = \frac{1}{2}, a_{22} = \frac{3}{2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$$

$$\bar{P}_{x3} = \bar{B}^{-1} P_{x3} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3a_{11} - a_{21} = 1 \\ -a_{11} + a_{21} = 0 \end{cases} \Rightarrow a_{11} = \frac{1}{2} = a_{21}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a_{13} - a_{23} = -1 \\ -a_{13} + a_{23} = 2 \end{cases}$$

$$\bar{P}_{x2} = \bar{B}^{-1} P_{x2} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow a_{13} = \frac{1}{2}, a_{23} = \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a_{12} - a_{22} = 0 \\ -a_{12} + a_{22} = 1 \end{cases}$$

مطلوب

Subject:

Date:

چون x_3 متغیر غیر ای است پس فقط در سطر صف $\bar{C}_{x_3}$ تغییر ایجاد می‌کنیم. لذا فقط $\bar{C}_{x_3}$ را بررسی می‌کنیم.

$$\bar{C}_{x_3} = C_B \bar{P}_{x_3} - C_{x_3} = (2, 3) \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} - 4 = -2 + 6 - 4 = 0 \geq 0$$

پس در این حالت جواب بهینه است و بهینه چندان است.

$$\bar{b} = \bar{B}^{-1} b \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \bar{B}^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 = 3b_1 - b_2 \\ 2 = -b_1 + b_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1 = \frac{3}{2} \\ b_2 = \frac{7}{2} \end{cases}$$

$$\max \quad z = 2x_1 + 3x_2 + x_3$$

$$\text{s.t.} \quad \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \leq \frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_2 + \frac{5}{2}x_3 \leq \frac{7}{2}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

4) اضافه شدن یک متغیر تصمیم جدید به مسئله

این حالت تلفیق دو حالت تغییر در ضرایب تابع هدف و تغییر در ضرایب فن‌ی مسئله است و با توجه به دو حالت قبل ممکن است جواب بهینه و حتی ناحیه وجود جواب تغییر کند لذا ما فیسیت مانند دو حالت قبل مسئله را بررسی کنیم.

5) اضافه شدن یک محدودیت جدید به مسئله

اضافه شدن یک محدودیت جدید به مسئله ممکن است ناحیه جواب را کوچکتر کند یا تغییر ندهد در صورتی که ناحیه جواب تغییر نکند کوئیم محدودیت زائد است و در این حالت جواب بهینه در محدودیت داده شده معنی می‌کند. اگر محدودیت داده شده زائد نباشد کوئیم محدودیت موثر (active) است در این حالت لازم است مسئله را حل کنیم.

مثال 8: مسئله برنامه ریزی خطی زیر را با جدول بهینه آن بررسی کنید.

$$\max z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3$$

$$s.t. \quad x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 5$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 2$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

BFS	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	RHS
Z	1	0	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{29}{5}$	$M - \frac{2}{5}$	$\frac{141}{5}$
x_1	0	0	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{8}{5}$
x_2	0	1	0	$\frac{7}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{9}{5}$

الف) محدودیت جدید $x_1 + x_3 \geq 2$ به مسئله اضافه شده است. جواب بهینه چه تغییری می‌کند.

ب) محدودیت جدید $x_1 + x_2 \geq 3$ به مسئله اضافه شده است. جواب چه تغییری می‌کند.

ج) اگر متغیر جدید x_4 با $C_4 = 2$ و ضرایب فن‌ی (2) به مسئله اضافه شود جواب بهینه را پیدا کنید.

حل 8: جدول بهینه جوابی معادل $x_1^* = \frac{9}{5}$ و $x_2^* = \frac{8}{5}$ و $Z^* = \frac{141}{5}$ و $s_1^* = s_2^* = 0$ و $x_3^* = 0$ حل با

بررسی قید $x_1 + x_3 \geq 2$ با توجه به جواب‌های بهینه داریم: $\frac{9}{5} + 0 \geq 2$ ✗

پس باید مسئله را ادامه دهیم. $x_1 + x_3 - s_3 = 2 \Rightarrow x_1 + x_3 - s_3 + t_1 = 2$

و تابع هدف Mt_1 اضافه خواهد شد.

Subject: _____
Date: _____

BFS	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	t_1	RHS
Z	1	0	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{29}{5}$	$M - \frac{2}{5}$	M	-M	$\frac{141}{5}$
x_2	0	0	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	0	$\frac{8}{5}$
x_1	0	0	1	$\frac{7}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	0	0	$\frac{2}{5}$
t_1	0	1	0	1	0	0	-1	1	2

بیا با حایضاری $x_1^* = \frac{9}{5}$ و $x_2^* = \frac{8}{5}$ در هتد $x_1 + x_3 \geq 3$ داریم 0.
چون جواب ها در هتد داده شده صدق می کنند لذا $\frac{9}{5} + \frac{8}{5} \geq 3$ محدودیت زائد است و جواب مسئله تغییری نمی کند.

ج باید در این حالت $\bar{C}_4$ را حساب کنیم پس

$$\bar{C}_4 = C_B \bar{P}_4 - C_4$$

$$\bar{P}_4 = B^{-1} P_4 = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{C}_4 = (12, 5) \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} - 2 = 8 > 0$$

چون $\bar{C}_4$ مثبت است لذا جدول متلی دهینه است.

مسئله حمل و نقل

مسئله حمل و نقل یک مسئله برنامه‌ریزی خطی است که هدف آن ارسال میزان معینی کالا از مبدا به مقاصد مشخص در یک شبکه حمل و نقل است. صورت کلی این مسئله حمل و نقل در جدول زیر معرفی می‌شود:

مقاصد / مبدا	۱	۲	...	n	عرضه
۱	c_{11}	c_{12}		c_{1n}	S_1
۲	c_{21}	c_{22}		c_{2n}	S_2
...	...	...		...	...
m	c_{m1}	c_{m2}		c_{mn}	S_m
تقاضا	d_1	d_2		d_n	

که S_i میزان عرضه مبدأ i ام و d_j میزان تقاضا مقصد j ام است. c_{ij} هزینه حمل و نقل یک واحد کالا از مبدأ i ام به مقصد j ام است. x_{ij} میزان کالایی که از مبدأ i ام به مقصد j ام ارسال می‌شود.

با فرض اینکه عرضه و تقاضا مساوی باشد، می‌توان به صورت زیر است:

$$\min \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} = S_i \quad i=1, 2, \dots, m \quad \text{حدودیت عرضه}$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = d_j \quad j=1, 2, \dots, n \quad \text{محدودیت تقاضا}$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \sum_{i=1}^m S_i = \sum_{j=1}^n d_j \quad \text{اگرچه فرض کردیم عرضه و تقاضا برابر باشد یعنی}$$

برای مثال با توجه جدول مسئله حل نقل زیر به صرفه ایال کالا از ۳ کارخانه به ۴ مراکز مدل برنامه ریزی

حاصل آن رتبه بندی:

مصرف / کارخانه	A	B	C	D	مصرف
۱	۱۰	۲	۵	۱	۱۰۰
۲	۶	۸	۴	۳	۵۰
۳	۷	۱۲	۹	۲	۱۵۰
تقاضا	۷۰	۱۰۰	۱۸۰	۶۰	

$$\min Z = 10x_{1A} + 2x_{1B} + 5x_{1C} + x_{1D} + 6x_{2A} + 8x_{2B} + 4x_{2C} + 3x_{2D} + 7x_{3A} + 12x_{3B} + 9x_{3C} + 2x_{3D}$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{aligned} x_{1A} + x_{1B} + x_{1C} + x_{1D} &\leq 100 \\ x_{2A} + x_{2B} + x_{2C} + x_{2D} &\leq 50 \\ x_{3A} + x_{3B} + x_{3C} + x_{3D} &\leq 150 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{محدودیت مصرف}$$

$$\begin{aligned} x_{1A} + x_{2A} + x_{3A} &\leq 70 \\ x_{1B} + x_{2B} + x_{3B} &\leq 100 \\ x_{1C} + x_{2C} + x_{3C} &\leq 180 \\ x_{1D} + x_{2D} + x_{3D} &\leq 60 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \text{محدودیت تقاضا}$$

$$x_{ij} \geq 0$$

در حالت کلی مجموع یون مسئله حل و نقل این است که مصرف تقاضا برابر باشد یعنی

$$\sum_{i=1}^m S_i = \sum_{j=1}^n d_j$$

و موجب سوم آن برابر

$$x_{ij} = \frac{S_i d_j}{a}, \quad a = \sum_{i=1}^m S_i = \sum_{j=1}^n d_j$$

در این حالت چنانچه روش برسی یا مقایسه جواب سوم وجود دارد، این روش ها به صورت زیر تقریب می شوند:

۱- روش گوتنه (می لاغری) ۲- روش حداقل سطح ۳- روش حداقل ستون ۴- روش حداقل هزینه

۵- روش وگل (Vogel)

(سَوَن)

۲- روش حداقل سطر در این روش از سطر اول کار را شروع می کنیم و با توجه به کمترین هزینه در سطر اول

محال تخصیص را انجام می دهیم و این کار را تا مصرف کامل عرضه سطر اول ادامه می دهیم و

سپس همین روند را در سطرهای بعدی نیز سَوَن ها را حذف می کنیم تا تمام می دهیم.

در روش حداقل سَوَن فراشه بالا را به صورت سَوَن محال می کنیم.

مثال یک جواب موم آغازین برای مسئله حمل و نقل زیر به روش حداقل سطر و حداقل سَوَن به دست می آید

عرضه	A	B	C	D	
۱	۱۰	۲	۱۵	۱۱	۵۰
۲	۶	۹	۴	۳	۵۰
۳	۷	۵	۱۲	۹	۱۵
تقاضا	۶	۱	۲	۵	

پایین روش جواب موم آغازین برابر است با:

$$x_{1B} = 20 \quad x_{1D} = 20$$

$$x_{2C} = 20 \quad x_{3A} = 70$$

$$x_{3B} = 20 \quad x_{3C} = 30$$

گام های این روش به صورت زیر است:

۱- تخصیص: ۱۱ برابر ۵۰ - تخصیص به ۱۲ برابر ۵۰ - تخصیص به ۲۰ برابر ۵۰

۲- تخصیص: ۳۰ برابر ۷۰ - تخصیص به ۳۰ برابر ۳۰ - تخصیص به ۳۰ برابر ۵۰

همین مسئله با روش حداقل سَوَن به صورت زیر است:

۱- تخصیص: ۲۰ برابر ۵۰ - تخصیص به ۳۰ برابر ۲۰ - تخصیص به ۱۰ برابر ۱۰

۵ - ...

۴- تخصیص به ۱۰

۳- روش حداقل هزینه در این روش محل تخصیص را از خانه‌ای که کمترین هزینه را داشته باشد شروع

می‌کنیم و این روند را تا توقف کامل ادامه می‌دهیم.

مثال: مثال قبل را به روش کمترین هزینه انجام دهید.

	A	B	C	D	کمره
۱	۱۰	۴ (۵۰٪)	۵	۴ (۵۰٪)	۱۰٪
۲	۴	۸	۴ (۵۰٪)	X ۳	۵٪
۳	۷ (۷۰٪)	۱۲ (۲۰٪)	۹ (۳۰٪)	۲	۱۲٪
تقاضا	۷۰٪	۱۰۰٪	۲۰٪	۵۰٪	

- ۱- تخصیص به D برابر ۵۰
- ۲- ~ ~ 1B برابر ۵۰
- ۳- ~ ~ 2C برابر ۵۰
- ۴- ~ ~ 3A برابر ۷۰
- ۵- ~ ~ 3C برابر ۲۰
- ۶- ~ ~ 3B برابر ۵۰

۴- روش گویال

رأز به مسئله حمل و نقل روشن و اول را بررسی می کنیم.

روش وول (Vogel)

این روش برای هر سطر و ستون جدول، جریمه ای را تعریف می کنیم که برای آن با تفاضل دو هزینه

مقیم در همان سطر و همان ستون (البته از بین سطرها و ستون های خالی) تفاوتی این عمل صورت

می گیرد. سپس به ازای هر کمترین جریمه ممکن به کمترین هزینه سطر یا ستون محل تخصیص را

انتخاب می دهیم. این محل را تا زمانی که به یک سطر یا ستون خالی نرسد، پریم تکرار می کنیم و

در انتها سطر یا ستون باقی مانده را تا کمترین هزینه محل تخصیص را انتخاب می دهیم.

مثال: یک جواب موم آغازین برای مسئله حمل و نقل زیر به روش وول بدست آوریم.

حل: شرط لازم را داریم

کمره	A	B	C	D	تقاضا
تقاضا	10	20	5	1	36
1	6	8	4	3	21
2	7	12	9	2	30
3	7	10	4	0	21

مجموع عرضه ها = مجموع تقاضاها

است. هزینه را پیدا می کنیم.

$$2 - 1 = 1 \text{ : سطر اول}$$

$$4 - 3 = 1 \text{ : سطر دوم}$$

$$7 - 2 = 5 \text{ : سطر سوم}$$

$$7 - 6 = 1 \text{ : ستون اول}$$

$$8 - 2 = 6 \text{ : ستون دوم} \rightarrow \text{جریمه ها max}$$

$$5 - 4 = 1 \text{ : ستون سوم}$$

$$2 - 1 = 1 \text{ : ستون چهارم}$$

پس ستون دوم انتخاب می شود. کمترین هزینه مربوط به B است. min عرضه و تقاضا را انتخاب می کنیم و تخصیص می دهیم.

حالت سون گ را حذف می کنیم دوباره خانه نام قبل را انجام می دهیم، جریه ها را پیدا می کنیم (به عنوان سون گ)

$$7-6=1 \quad \text{سون لول} \quad 5-1=4 \quad \text{سطر اول}$$

$$5-4=1 \quad \text{سون دوم} \quad 4-3=1 \quad \text{سطر دوم}$$

$$2-1=1 \quad \text{سون چاب} \quad 7-2=5 \quad \text{سطر سوم}$$

پ سطر سوم انتخاب می شود. لیکن هزینه سطر سوم ۵ است و باید ۳۵ تخصیص دهیم،

باید به آن ۵ تخصیص دهیم.

حال باید بدون سطر سوم و سون دوم جریه ها را پیدا کنیم به همین جریه مربوط به سطر ۱ می باشد. خانه $2C$ باید

$$\text{تخصیص داده شود، } 2C=5.$$

دوباره جریه ها را پیدا می کنیم سطر سوم انتخاب می شود ابتدا خانه $3A$ و سپس خانه $3C$ تخصیص می یابد.

مسئله تخصیص یا والتاژ

مربط حل این مسئله از مسائل استیجاء و والتاژ و در قالب یک جدول به صورت زیر والتاژ n می باشد

به n رانده یا صول هزینه، در نظر بگیرید.

در حقیقت مسئله والتاژ، حالت خاص از مسئله حمل و نقل است که می توانیم آن را به هر مقدری برابر

می باشد. به یک مسئله حمل و نقل با جدول مربعی دریم.

ایستگاه	۱	۲	...	j	...	n
۱	C_{11}	C_{12}	...	C_{1j}	...	C_{1n}
۲	C_{21}	C_{22}	...	C_{2j}	...	C_{2n}
...	C_{i1}	C_{i2}	...	C_{ij}	...	C_{in}
n	C_{n1}	C_{n2}	...	C_{nj}	...	C_{nn}

مردمان وند هزینه‌های ساختن آلم به رشته‌های ات.

مقیارهای تخصیص مربوط به هر خانه را با وند نشان می‌دهیم با توجه به ماهیت حله تخصیص مقدر آن صفر یا ۱ است.

بی می‌توان فرض می‌کنیم مسئله تخصیص را به صورت زیر نوشت:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{اگر ماشین } i \text{ به رشته } j \text{ و آلم برود} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

چون مقدرات هر ماشین فقط به یک رشته و آلم برود داریم:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i=1, 2, \dots, n$$

و چون مقدرات هر رشته فقط به یک ماشین و آلم باید بدیم:

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, \quad j=1, 2, \dots, n$$

نذا:

$$\min Z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i=1, 2, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, \quad j=1, 2, \dots, n$$

$$x_{ij} = 0 \text{ یا } 1, \quad i, j=1, 2, \dots, n$$

الگوریتم مجارستانی (مجاره) برای حل مسئله تخصیص:

ابتدا باید مثال را به یک مسئله تخصیص حل‌پذیر کنیم:

گام ۱: ابتدا از هر سطر ماتریس، $\min$ عضو را از تقبیء عناصر آن سطر لستری می‌کنیم. در ماتریس حاصل

$\min$ عضو ستون را از تقبیء عناصر آن ستون لستری می‌کنیم. ماتریس حاصل را ماتریس تقلیل یافته می‌نامیم.

گام ۲: حداقل تعداد خطوط را رسم کنیم که کفها صفر در سطرها و ستون‌ها را پوشش بدهد (خطوط پوشش)

را طوری رسم می‌کنیم که در هر سطر یا ستون بیشترین صفرها را شامل شوند.

اگر تعداد خطوط پوشش برابر n شود جواب بهینه است. (نمبر ماتریس و اندازه است)

در بهترین صورت به گام ۳ می‌رویم

گام ۳: از بین عناصر خط نخورده، $\min$ عضو را از تقبیء عناصر خط نخورده لستری می‌کنیم و به عناصر

روی تقاطع خطوط اضافه می‌کنیم و عناصر روی خطوط را تغییر نمی‌دهیم. حالا به گام ۲ برمی‌گردیم.

مثال: ماتریس فزاینده مسئله و اندازه زیر را نظر بگیرید و جواب بهینه آن را بیابید.

	۱	۲	۳
۱	۱	۴	۷
۲	۸	۲	۱۰
۳	۳	۱	۸

	۱	۲	۳
۱	۵	۳	۴
۲	۶	۵	۸
۳	۲	۵	۷

	۱	۲	۳
۱	۰	۳	۰
۲	۶	۰	۲
۳	۲	۰	۱

ماتریس تقلیل یافته

به ۲ خط تا زیم است اما ۲ خط برابر صفر ماتریس ۳ نیست!

	۱	۲	۳
①	۱	۴	۷
۲	۸	۲	۱۰
③	۳	۱	۸

چون تعداد خطوط برابر صفر ماتریس برابر است نه این جواب

بهینه است.

تخصیص‌ها را ملن در جدول آفرین صفرهای است نه هزینه و اندازه صفر نه است.

جواب ها و توانم صورت زیر باشد:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \rightarrow 1 \\ 1 \rightarrow 3 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 2 \rightarrow 2 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 3 \rightarrow 2 \\ 3 \rightarrow 3 \end{array} \right\}$$

اولویت اول : $2 \rightarrow 2$
 اولویت دوم : $3 \rightarrow 3$
 اولویت سوم : $1 \rightarrow 1$

تعیین توانها و صفر باشد

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{11} = 1 \\ x_{22} = 1 \\ x_{33} = 1 \end{array} \right\}$$

توان ۱۱

مثال: جواب مینم مسئله اولان زیر را بدست آورید.

۶	۱	۳	۸	۲
۷	۱۰	۲	-۱	۵
۳	۱	۴	۱۲	۹
۸	۳	-۲	۱۵	۶
۷	۵	۴	۲	۱۰

۵	۰	۲	۷	۱
۸	۱۱	۳	۵	۶
۲	۵	۳	۱۱	۸
۱۰	۵	۰	۱۷	۸
۵	۳	۲	۵	۸

۳	۰	۲	۷	۵
۶	۱۱	۳	۵	۵
۵	۵	۲	۱۱	۷
۸	۵	۲	۵	۷
۳	۲	۲	۵	۷

مقدار ضلع ۱ است که با بعد سترس ۵ برابر

نتیجه