≡ آنالیز تابعی مقدماتی ≡

تعریف. فضای برداری X روی $\mathbb{C}$ (گاهی $\mathbb{R}$) را یک فضای نرمدار می‌گوییم هرگاه دارای یک نرم باشد. منظور از نرم، یک تابع $\|\cdot\|: X \longrightarrow \mathbb{R}$ است که دارای خواص زیر است:

الف) $\|x\|=0$ اگر و تنها اگر $x=0$

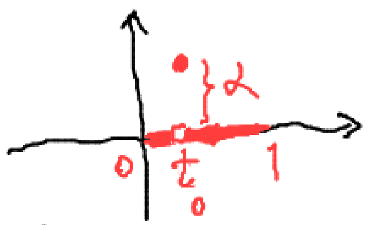
ب) $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$

ج) $\|x+y\| \leq \|x\|+\|y\|$

تبصره. $0=\|0\|=\|x+(-x)\|\leq \|x\|+\|-x\|=2\|x\|$. پس همیشه $\|x\|\geq 0$.

تعریف. اگر $\|\cdot\|: X\to\mathbb{R}$ شرایط (ب) و (ج) را داشته باشد ولی (الف) به صورت $x=0 \Rightarrow \|x\|=0$ برقرار باشد آنگاه $\|\cdot\|$ را که معمولاً با p نمایش می‌دهند، نیم‌نرم یا seminorm می‌گویند.

مثلاً $p(f)=\int_0^1 |f(t)|\,dt$ برای $f\in \underbrace{L^\infty([0,1])}_{\text{توابع کراندار روی } [0,1]}$ آنگاه p یک نیم‌نرم است زیرا



$$f_0(t)=\begin{cases}0 & t\neq t_0\\ \alpha & t=t_0\end{cases} \Rightarrow p(f_0)=0$$

اما $L^\infty([0,1])$ یک فضای نرمدار تحت $\|f\|=\sup_{t\in[0,1]}|f(t)|$ است. فقط نامساوی مثلث را ثابت می‌کنیم:

$$\forall t;\quad |f(t)+g(t)|\leq |f(t)|+|g(t)|$$
$$\leq \underbrace{\underbrace{\sup_s|f(s)|}_{\|f\|}+\underbrace{\sup_u|g(u)|}_{\|g\|}}_{\text{کران بالا}}$$

$$\therefore\ \|f+g\|=\sup_t|f(t)+g(t)|\leq\|f\|+\|g\|$$

۲) فرض کنید Ω یک فضای متریک فشرده باشد و $C(\Omega)$ فضای توابع پیوسته روی Ω باشد

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in\Omega} |f(t)|;\quad f\in C(\Omega)$$

۳) روی $\mathbb{R}^n = M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ چندین نرم تعریف می‌شود:

$$\underline{x}=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$$

$$\|\underline{x}\|_e = \sqrt{|x_1|^2+\cdots+|x_n|^2}\ ,\quad \|\underline{x}\|_\sigma=\sum_{i=1}^n |x_i|\ ,\quad \|\underline{x}\|_m = \max_{1\le i\le n}|x_i|$$

نرم اقلیدسی

$$\|\underline{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

مسئله. ثابت کنید $\lim_{p\to\infty}\|x\|_p=\|x\|_m$

۴) روی $M_{m\times n}(\mathbb{C})$ چندین نرم همچون نرمهای در (۳) می‌توان تعریف کرد. اما دو نرم دیگر هم قابل تعریفند:

$$\|[a_{ij}]\|_c = \max_{1\le j\le n}\left(\sum_{i=1}^m |a_{ij}|^2\right)^{\frac12} \longleftarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{1j} & \\ a_{21} & \vdots & \\ \vdots & \vdots & \\ a_{m1} & a_{mj} & \end{bmatrix}$$

$$\|[a_{ij}]\|_r = \max_{1\le i\le m}\left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2\right)^{\frac12} \longleftarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & & & \end{bmatrix}$$

۵) $\ell^\infty = \{\{x_n\} \mid \{x_n\}$ کراندار است$\} \supseteq c = \{\{x_n\} \mid \{x_n\}$ همگراست$\} \supseteq c_0 = \{\{x_n\} \mid \{x_n\}$ همگرا به صفر است$\}$

$\exists M\ \forall n;\ |x_n|\le M$

همراه نرم سوپریمم $\|\{x_n\}\| = \sup_n |x_n|$ فضای نرمدار هستند.

۶) فرض کنیم $p\ge 1$، $\ell^p=\{\{x_n\} \mid \sum_{n=1}^\infty |x_n|^p<\infty\}$ همراه نرم $\|x\|_p=\left(\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p\right)^{\frac1p}$ فضای نرمدار است.

توجه: $\{\frac{1}{2^n}\}\in\ell^p$ ، $\mathbb{C}^n\subseteq\ell^p$

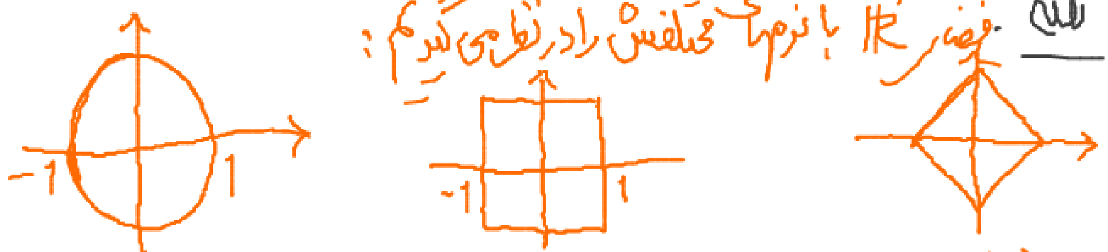
$\underline{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{C}^n \Rightarrow \underbrace{x_1}_{y_1},\underbrace{x_2}_{y_2},\dots,\underbrace{x_n}_{y_n},\underbrace{0}_{y_{n+1}},0,\dots \Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{\infty}|y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

$=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{1/p}=\|\underline{x}\|_p$

__قضیه.__ اگر $(X,\|\cdot\|)$ یک فضای نرمدار باشد آنگاه $d(x,y)=\|x-y\|$ یک متر است.

__نکته.__ فضای $\mathbb{R}^2$ با نرم‌های مختلفش را در نظر می‌گیریم:

هر همسایگی در فضای نرمدار یک مجموعه محدب است.



$N(0)_{\|\cdot\|_e}$ $\quad N(0)_{\|\cdot\|_m}$ $\quad N(0)_{\|\cdot\|_\sigma}$

$\{(x,y) \mid \underbrace{\|(x,y)-(0,0)\|_\sigma}_{|x|+|y|}<1\}$

مثال نقض) یک فضای متریک $d(x,y)$ که متر آن به وسیله هیچ نرمی القا نشود یعنی

$\nexists \|\cdot\| \ \forall x,y\in X;\ d(x,y)=\|x-y\|$

فرض کنید X فضای تمام دنباله‌های $\{s_n\}$ باشد و $s_n\in\mathbb{C},\ n=1,2,\dots$

$d(\{s_n\},\{t_n\})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|s_n-t_n|}{2^n(1+|s_n-t_n|)}$

(بنا به $\frac{|s_n-t_n|}{2^n(1+|s_n-t_n|)}<\left(\frac{1}{2}\right)^n$ و آزمون مقایسه، سری بالا همیشه همگراست) اگر d توسط یک نرم $\|\cdot\|$ القا شود و $\{t_n\}$ دنباله ثابت صفر بگیریم، باید داشته باشیم $\|\{s_n\}\|=d(\{s_n\},0)=\sum\frac{|s_n|}{2^n(1+|s_n|)}$ اما به وضوح

$\|2\{s_n\}\|\neq 2\|\{s_n\}\|$ $\square$

۱۳۹۵/۱۱/۱۰

یک فضای نرم‌دار، که متر القا شده توسط نرم، کامل باشد را فضای باناخ می‌گوییم.

تعریف. یک نگاشت $T: X\to Y$ را خطی گوییم هرگاه

$$\forall x,y\in X\ \forall \lambda\in\mathbb{C};\quad T(\lambda x+y)=\lambda Tx+Ty$$

هر نگاشت خطی $f:X\to\mathbb{C}$ را یک تابعک خطی می‌گویند.

نگاشت خطی = تبدیل خطی = عملگر خطی

مثال) $T:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2$ خطی است.

$$T(x,y)=(2x+y,\ y-x)$$

مثال) هر تابعک خطی $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ به صورت $f(x)=ax$ به ازای یک $a\in\mathbb{R}$ است زیرا

$$f(x)=f(x\cdot 1)=x\,f(1).$$

تعریف. عملگر خطی $T: X\to Y$ را کراندار می‌گویند هرگاه

$$\|T\|=\sup\{\|Tx\|;\ \|x\|\le 1\}<\infty$$

$\{\|Tx\|:\|x\|\le 1\}$ کراندار است.

تمرین.

$$\underbrace{\sup_{\|x\|\le 1}\|Tx\|}_{\alpha}=\underbrace{\sup_{\|x\|=1}\|Tx\|}_{\beta}=\underbrace{\sup_{\|x\|<1}\|Tx\|}_{\gamma}=\underbrace{\sup_{x\neq 0}\frac{\|Tx\|}{\|x\|}}_{\delta}\ (=\|T\|)$$

$\boxed{\left\|\frac{x}{\|x\|}\right\|=1}$

حل.

$\{\|Tx\|:\|x\|=1\}\subseteq\{\|Tx\|:\|x\|\le 1\}\Rightarrow$ α یک کران بالا برای $\{\|Tx\|:\|x\|=1\}$ $\Rightarrow \beta\le\alpha$

فرض کنیم $\|x\|\le 1$. در این صورت $\left\|\frac{x}{\|x\|}\right\|=1$. پس بنا به تعریف β، $\left\|T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\|\le\beta$. لذا

$\|Tx\|\le\beta\|x\|\le\beta$. پس β کران بالایی برای $\{\|Tx\|:\|x\|\le 1\}$. پس $\alpha\le\beta$.

$$\therefore\ \alpha=\beta$$

$$\underbrace{\sup_{\|x\|<1}\|Tx\|}_{\gamma} = \underbrace{\sup_{\|x\|\le 1}\|Tx\|}_{\alpha}$$

به وضوح $\gamma \le \alpha$. فرض کنیم $\|x\| \le 1$. گیریم $0<\theta<1$ دلخواه باشد. پس $\|\theta x\| = \theta\|x\| < 1$.

لذا $\|T(\theta x)\| \le \gamma$ یعنی $\underbrace{\theta\|Tx\|}_{\varphi(\theta)} \le \underbrace{\gamma}_{\psi(\theta)}$ برای هر $\theta<1$. پس $\lim_{\theta\to 1}\varphi(\theta) \le \lim_{\theta\to 1}\psi(\theta)$. بنابراین

$\|Tx\| \le \gamma$. پس γ کران بالایی برای $\{\|Tx\| : \|x\|\le 1\}$. پس $\alpha \le \gamma$. □

$\boxed{\text{قانون تابلو}}$ تمرین

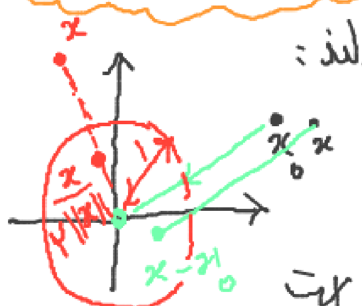
$$\|T\|<\infty \Rightarrow \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \le \|T\| \Rightarrow \boxed{\|Tx\| \le \|T\|\,\|x\|}$$

اگر $x\neq 0$ باشد

$$\cancel{T(0)}=T(0+0)=T(0)+\cancel{T(0)} \Rightarrow T(0)=0$$

نمادگذاری: $T(x)$ را با Tx نیز نشان می‌دهیم.

تمرین: $\|T\| = \inf\{M : \|Tx\| \le M\|x\|\}$.



$T(x-x_0) - T(0) = Tx - Tx_0$

قضیه. شرایط زیر در مورد یک نگاشت خطی $T: X\to Y$ معادلند:

الف) T کراندار است.

ب) T در مبدأ $x=0$ پیوسته است.

ج) T روی X پیوسته است یعنی T در هر نقطهٔ $x_0\in X$ پیوسته است.

برهان. (الف $\Leftarrow$ ب) فرض کنیم $\|T\|<\infty$ و بنابراین $\|Tx\| \le \|T\|\,\|x\|$. باید نشان دهیم

$$\forall \varepsilon\ \exists \delta\ \forall x;\ \underbrace{\|x-0\|<\delta}_{\|x\|<\delta} \Rightarrow \underbrace{\|Tx-T0\|<\varepsilon}_{\|Tx\|<\varepsilon}$$

$\cancel{\|Tx\| \le \|T\|\,\|x\| < \varepsilon}$

گیریم $\varepsilon>0$ داده شده باشد. قرار می‌دهیم $\delta = \frac{\varepsilon}{\|T\|}$. در این صورت

$$\|x\|<\delta \Rightarrow \|x\| < \frac{\varepsilon}{\|T\|} \Rightarrow \|Tx\| \le \|T\|\,\|x\| < \frac{\varepsilon}{\|T\|}\cdot\|T\| = \varepsilon.$$

(ب ⇒ ج). فرض کنیم T در $x=0$ پیوسته باشد و $x_0\in X$ باشد. نشان می‌دهیم:

$$\forall\varepsilon\ \exists\delta\ \forall x;\quad \|\underbrace{x-x_0}_{y-0}\|<\delta \Rightarrow \|\underbrace{Tx-Tx_0}_{T(\underbrace{x-x_0}_{y})-T0}\|<\varepsilon$$

گیریم $\varepsilon>0$ داده شده باشد. بنا به پیوستگی T در 0 داریم

$$\exists\delta\ \forall y;\quad \|y-0\|<\delta \Longrightarrow \|Ty-\underbrace{\cancel{T0}}_{0}\|<\varepsilon$$

پس

$$\forall x;\quad \|x-x_0\|<\delta \xRightarrow{y=x-x_0} \|T(x-x_0)-T0\|<\varepsilon \Rightarrow \|Tx-Tx_0\|<\varepsilon.$$

(ج ⇒ الف). اگر (ج) برقرار باشد، T در مبدأ پیوسته است. پس

$$\exists\delta\ \forall y;\quad \|y-0\|<\delta \Longrightarrow \|Ty-T0\|<1 \qquad (\star)$$

اینک فرض کنیم $0\neq x\in X$ دلخواه باشد. قرار می‌دهیم $y=\frac{\delta x}{2\|x\|}\in X$. در این صورت

$\|y\|=\frac{\delta\|x\|}{2\|x\|}=\frac{\delta}{2}<\delta$، پس بنا به $(\star)$، $\|T(y)\|<1$. بنابراین

$$\frac{\delta\|Tx\|}{2\|x\|}=\left\|T\left(\frac{\delta x}{2\|x\|}\right)\right\|<1. \quad \text{لذا} \quad \|Tx\|\le\frac{2}{\delta}\|x\|$$

پس $\|T\|=\sup_{x\neq 0}\frac{\|Tx\|}{\|x\|}\le\underbrace{\frac{2}{\delta}}_{K}<\infty$. □

تبصره. چرا تعریف $\|T\|=\sup_{x\in X}\|Tx\|$ نامناسب است؟ فرض خلف

فرض کنیم $T\neq 0$. پس x_0 هست که $Tx_0\neq 0$. لذا

$$\forall n\in\mathbb{N};\quad nx_0\in X \Rightarrow \|T(nx_0)\|\le K \Rightarrow n\le\frac{K}{\|Tx_0\|}$$

لذا $\mathbb{N}$ از بالا به $\frac{K}{\|Tx_0\|}$ کراندار است که ممکن نیست. □

$(T+S)(x)=Tx+Sx$

$(\lambda T)(x)=\lambda Tx$

تعریف. مجموعه $B(X,Y)$ همراه اعمال فوق با فضای نرمدار

که فضای برداری است و همراه نرم عملگری یک فضای نرمدار است.

پیوسته (۹۵/۱۲/۱۵) فضای $B(X,Y)$ باناخ است اگر Y باناخ باشد.

قضیه هان-باناخ. اگر $f\in B(M,\mathbb{C})$ که در آن M زیرفضایی (نه لزوماً بسته) از فضای نرمدار (نه لزوماً کامل) X باشد، آنگاه

$$\exists F\in B(X,\mathbb{C});\ F|_M=f \ \&\ \|F\|=\|f\|$$

قسمت توسیع ساده است. مهم وجود توسیعی حافظ نرم تابعک f است.

که M چون فضای برداری است پس یک پایه مانند β_M دارد. چون M زیرفضای X،

β_M را می‌توان به یک پایه β برای X توسعه داد. پس

β_M پایهٔ M و $\beta_N=\beta-\beta_M$ پایهٔ یک فضای مانند N است.

به طوری که $X=M\oplus N$. اکنون اگر $f:M\to\mathbb{C}$ داده شده باشد آنگاه

$$\begin{cases} F:X\to\mathbb{C} \\ F(\underset{M}{m}+\underset{N}{n})=f(m) \end{cases}$$

توسیع f است.

مثال $\{(2,0,0),(1,1,0)\}$ پایهٔ زیرفضای

$M=\{(x,y,0)\mid x,y\in\mathbb{R}\}\leq\mathbb{R}^3=X$

از طرفی $\beta=\{(2,0,0),(1,1,0),(0,0,1)\}$ پایه برای X.

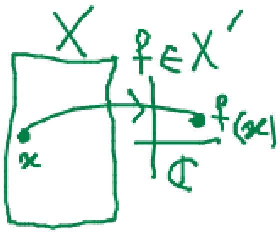
پس $\beta_N=\beta-\beta_M=\{(0,0,1)\}$ پایه برای $N=\{(0,0,z)\mid z\in\mathbb{R}\}$

$X=M\oplus N$

$\vec{p}=\vec{q}+\vec{r}$

تعریف. $B(X,\mathbb{C})=X'$ را دوگان X می‌گویند. توجه کنید که اگر $f\in X'$ آنگاه $\|f\|=\sup\limits_{x\neq 0}\frac{|f(x)|}{\|x\|}$. می‌توان از $B(X',\mathbb{C})=X''$ نیز صحبت کرد که آن را دوگان دوم X می‌گویند. در حالت کلی $B(X^{(n-1)},\mathbb{C})=X^{(n)}$ را دوگان nام می‌گویند.

باناخ   بانخ



اگر $x\in X$ می‌توان $\hat{x}: X'\longrightarrow\mathbb{C}$ ، $f\longmapsto f(x)$ را هم به نگاه کنند

ثابت:

$$|\hat{x}(f)|=|f(x)|\underset{\text{تابعو}}{\leq}\|f\|\,\|x\| \Rightarrow \|\hat{x}\|=\sup\frac{|\hat{x}(f)|}{\|f\|}\leq\|x\|$$

پروژه (۹۵,۱۲,۸) از قضیه هان-باناخ نتیجه بگیرید که

$$\forall x\in X\ \exists f_0\in X';\ \|f_0\|=1\ \&\ f_0(x)=\|x\|$$

$$\|x\|=f_0(x)\underset{\text{نرم مثبت است}}{=}|f_0(x)|=|\hat{x}(f_0)|\underset{\text{تابعو}}{\leq}\|\hat{x}\|\,\|f_0\|\leq\|\hat{x}\|$$

پس $\|x\|=\|\hat{x}\|$.

بنابراین $\hat{}: X\to X''$ ، $x\longmapsto\hat{x}:X'\to\mathbb{C}$ یک نگاشت خطی طولپا است که هم به نگاه کنند.

isometry

نکته. در حالت کلی برو نیست، اگر پوشا باشد، آنگاه X را انعکاسی می‌گویند.

Reflexive

فرض $B(X,Y)$ را در نظر می‌گیریم. $T\in B(X,Y)$ می‌گیریم. تعریف می‌کنیم $T':Y'\to X'$

$$g\longmapsto g\circ T:=T'g$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[dr, dashed, "g\circ T"'] & Y \arrow[d, "g"] \arrow[dl, phantom, "(C)"] \\ & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

اولاً T' خطی است:

$$T'(\lambda g+h)=(\lambda g+h)\circ T \underset{T}{=} \lambda(g\circ T)+(h\circ T)=\lambda T'g+T'h$$

$$\big((\lambda g+h)\circ T\big)(x)=(\lambda g+h)(Tx)=\lambda g(Tx)+h(Tx)=\lambda(g\circ T)(x)+(h\circ T)(x)$$

ثانیاً $\|T'\|=\|T\|$

می‌گیریم $\|x\|=1$. داریم

$$\|(g\circ T)x\|=\|g(Tx)\|\leq\|g\|\,\|Tx\|\leq\|g\|\,\|T\|\,\|x\|\leq\|g\|\,\|T\|$$

$$\therefore \|g\circ T\|\leq\|g\|\,\|T\|$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[dr, "g\circ T"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

$$\|T'g\|=\|g\circ T\|\leq\|g\|\,\|T\|$$

$$\|T'\|=\sup_{g\neq 0}\frac{\|T'g\|}{\|g\|}\leq\|T\| \checkmark$$

برای رابطه عکس، می‌گیریم $x\in X$. بنا بر کاربرد قضیه هان-باناخ، برای $Tx\in Y$ داریم

$$\exists g_0 ;\ \|g_0\|=1 \ \&\ g_0(Tx)=\|Tx\|$$

$$\|Tx\|=g_0(Tx)=|g_0(Tx)|=|\underbrace{(g_0\circ T)}_{T'(g_0)}(x)|\underset{\text{نامساوی}}{\leq}\|T'(g_0)\|\,\|x\|\underset{\text{نامساوی}}{\leq}\|T'\|\,\cancel{\|g_0\|}\,\|x\|$$

$$\therefore \|T\|=\sup_{x\neq 0}\frac{\|Tx\|}{\|x\|}\leq\|T'\|. \checkmark \ \square$$

- فرض کنیم X و Y دو فضای برداری باشند. حاصلضرب دکارتی $X\times Y$ همراه اعمال مؤلفه‌ای یک فضای برداری است که آن را جمع مستقیم (خارجی) X و Y گفته و با $X\oplus Y$ نمایش می‌دهیم.

- فرض کنیم M و N زیرفضاهای فضای برداری X باشند و $M\cap N=\{0\}$. در این صورت $M+N=\{m+n \mid m\in M,\ n\in N\}$ همراه اعمال X یک فضای برداری است که آن را جمع مستقیم داخلی M و N می‌گویند و با $M\oplus N$ نمایش می‌دهند.

هر جمع مستقیم داخلی "در واقع" یک جمع مستقیم خارجی است زیرا

$$\underset{\text{داخلی}}{M\oplus N} \to \underset{\text{خارجی}}{M\times N}$$
$$m+n \mapsto (m,n)$$

یک یکریختی فضاهای برداری است.

برعکس، هر جمع مستقیم خارجی یک جمع مستقیم داخلی است":

$$\underset{\text{خارجی}}{X\oplus Y}=X\times Y=\{(x,y)\mid x\in X \ \&\ y\in Y\}=\underbrace{\{(x,0)\mid x\in X\}}_{M}\underset{\text{داخلی}}{\oplus}\underbrace{\{(0,y)\mid y\in Y\}}_{N}$$

زیرفضاهای $X\times Y$ هستند. □

مثال) $\mathbb{C}^4 = \langle e_1, e_2\rangle \oplus \langle e_3\rangle \oplus \langle e_4\rangle$

زیرا نمایش $(x,y,z,t) = (xe_1+ye_2) + ze_3 + te_4$ منحصر به فرد است.

توجه. شرط $M\cap N=\{0\}$ در جمع مستقیم داخلی معادل این است که تجزیهٔ $\underset{X}{x} = \underset{M}{y} + \underset{N}{z}$ منحصر به فرد است:

$$x = y+z = y'+z' \Rightarrow \underbrace{y-y'}_{\in M} = \underbrace{z'-z}_{\in N} \xrightarrow{M\cap N=\{0\}} y=y' \;\&\; z=z'$$

بالعکس اگر نمایش منحصر به فرد باشد و $x\in M\cap N$ پس $\underset{X}{x} = \underset{M}{x}+0 = 0+\underset{N}{x}$.
بنابر یکتایی نمایش $x=0$ پس $M\cap N=\{0\}$.

قضیه. اگر $f: X\to \mathbb{C}$ ($f \neq 0$) یک تابعک خطی باشد آنگاه f پیوسته (کراندار) است اگر و فقط اگر $\ker f$ بسته باشد.

برهان. اگر f پیوسته باشد.

راه اول) $\ker f = f^{-1}(\{0\})$ بسته است.

راه دوم) فرض کنیم $x_n\in \ker f$، $x\in X$، $x_n\to x$. چون f روی X پیوسته است،
$f(x_n)\to f(x)$ لذا $f(x)=0$ پس $x\in\ker f$ لذا $\ker f$ بسته است.

یکتایی حد

$\boxed{f \text{ کراندار } \equiv \sup\{|f(x)| : \|x\|=1\} < \infty \equiv \exists M \forall \underset{\text{unit vector}}{x} ; |f(x)|\le M}$

بالعکس فرض کنیم f کراندار نباشد. پس $\forall n\, \exists x_n ;\ |f(x_n)|>n$ & $\|x_n\|=1$ (نفی)

ضمناً چون $f\neq 0$ پس $\exists e_0\in X;\ f(e_0)\neq 0$
$e := e_0/f(e_0) \Rightarrow f(e)=1$

قرار می‌دهیم $e_n := e - \frac{x_n}{f(x_n)}$. در این صورت

$$f(e_n) = f(e) - \frac{f(x_n)}{f(x_n)} = 1-1=0 \Rightarrow e_n \in \ker f$$

$$0 \le \|e_n - e\| = \left\|\frac{x_n}{f(x_n)}\right\| = \frac{\cancel{\|x_n\|}^{\,1}}{|f(x_n)|} < \frac{1}{n}$$

بنابر قضیه ساندویچ، $\lim_{n\to\infty} e_n = e$. اما $e_n \in \ker f$، و $\ker f$ بسته است. بنابراین $e \in \ker f$ پس $f(e) = 0 \neq 1$ ×

تمرین. اگر $T: X \to Y$ خطی باشد و $\ker T$ بسته باشد، آیا T لزوماً پیوسته است؟ مثالی ارائه دهید.

قضیه. فرض کنید $T: D \subseteq X \to Y$ (فضای باناخ) یک نگاشت خطی کراندار باشد. در این صورت توسیع خطی منحصربفرد $\tilde{T}: \bar{D} \to Y$ (بستار D) وجود دارد که $\|\tilde{T}\| = \|T\|$.

نکته. D باید زیرفضای برداری X باشد زیرا اگر $x, y \in D$، $\lambda \in \mathbb{C}$، آنگاه بنا به خطی بودن T، $T(\lambda x + y) = \lambda Tx + Ty$ که معنادار بودن آن به طور ضمنی این است که $\lambda x + y \in Dom(T) = D$.

$\exists y \in Y;\ Tx_n \to y := \tilde{T}x$

طرح اثبات: $x \in \bar{D}$.

$\exists \{x_n\} \subseteq D;\ x_n \to x$

$\{x_n\}$ کوشی

= = $\{Tx_n\}$

برهان. فرض کنیم $x\in\bar{D}$.

$$\forall n;\ \underbrace{N_{\frac{1}{n}}(x)\cap D}_{x_n\in}\neq\emptyset$$

پس $0\le \underbrace{\|x_n - x\|}_{d(x_n,x)} < \frac{1}{n}$. پس $x_n\to x$.

پس $\{x_n\}$ کوشی است (نشان می‌دهیم $\{Tx_n\}$ هم کوشی است):

$$\|Tx_n - Tx_m\| = \|T(x_n - x_m)\| \le \|T\|\,\|x_n - x_m\| < \varepsilon$$

گیریم $\varepsilon>0$ داده شده باشد. بنابه کوشی بودن $\{x_n\}$، داریم

$$\exists N\ \forall m,n\ge N;\ \|x_n - x_m\| < \frac{\varepsilon}{\|T\|}$$

پس

$$\forall m,n\ge N;\ \|Tx_n - Tx_m\| = \|T(x_n - x_m)\| \underset{\text{نامو}}{\le} \|T\|\,\|x_n - x_m\| < \varepsilon$$

چون Y باناخ است، $\{Tx_n\}$ به نقطه‌ای مانند $y\in Y$ همگرا است. قرار می‌دهیم

$$\bar{T}:\bar{D}\longrightarrow Y$$
$$x\longmapsto \bar{T}x := y$$

۱) $\bar{T}$ خوش‌تعریف است: فرض کنیم $\{x'_n\}$ نیز دنباله‌ای در D باشد که به x همگرا است.

دنباله جدید $x_1, x'_1, x_2, x'_2, x_3, x'_3, \dots$ را در نظر می‌گیریم. این دنباله به x همگرا است (زیرا این دنباله عبارت است از $y_n=\begin{cases} x_k & n=2k-1 \text{ فرد} \\ x'_k & n=2k \text{ زوج}\end{cases}$). اگر $\varepsilon>0$ داده شده باشد،

$$\exists N_1\ \forall n\ge N_1;\ \|x_n - x\| < \varepsilon \ (1)\ \&\ \exists N_2\ \forall n\ge N_2;\ \|x'_n - x\| < \varepsilon \ (2)$$

$$k>N_1 \Rightarrow \|\underbrace{x_k}_{y_n} - x\| < \varepsilon \qquad \underbrace{2k-1}_{n} > 2N_1 - 1$$

$$k>N_2 \Rightarrow \|\underbrace{x'_k}_{y_n} - x\| < \varepsilon \qquad \underbrace{2k}_{n} > 2N_2$$

قرار می‌دهیم $N_0=\max\{2N_1-1,\ 2N_2\}$. در این صورت

$$\forall n\ge N_0 \quad \begin{cases} \text{زوج } n=2k\ge N_0\ge 2N_2 \Rightarrow k\ge N_2 \overset{(2)}{\Longrightarrow} \|x'_k - x\| < \varepsilon \\ \text{فرد } n=2k-1\ge N_0\ge 2N_1-1 \Rightarrow k\ge N_1 \overset{(1)}{\Longrightarrow} \|x_k - x\| < \varepsilon \end{cases} \Rightarrow \|y_n - x\| < \varepsilon$$

بنا به ساختار در قسمت اول برهان،

$Tx_1, Tx_1', Tx_2, Tx_2', \dots$

همگراست به y. پس زیردنباله‌های جملات زوج و فرد هر دو به y همگرایند. پس $\lim_n Tx_n = \lim_n Tx_n' = y$.

۲) $\bar{T}$ خطی است.

فرض کنیم $x, y \in \bar{D}$، $\lambda \in \mathbb{C}$. پس $\exists \{x_n\} \& \{y_n\} \subseteq D;\ x_n \to x \ \&\ y_n \to y$

لذا $\lambda x_n + y_n \to \lambda x + y$. پس اولاً $\lambda x + y \in \bar{D}$ (پس $\bar{D}$ فضای برداری است)

ثانیاً $\bar{T}(\lambda x + y) = \lim_n \underbrace{T(\lambda x_n + y_n)}_{\lambda T x_n + T y_n} = \lambda \lim_n T x_n + \lim_n T y_n = \lambda \bar{T} x + \bar{T} y$

۳) $\bar{T}$ کراندار است.

$x \in \bar{D} \Rightarrow \exists \{x_n\} \subseteq D;\ x_n \to x \Rightarrow \bar{T}x = \lim_n T x_n \Rightarrow \|\bar{T}x\|$

$= \|\lim_n T x_n\| = \lim \|T x_n\| \le \|T\| \lim_n \|x_n\| = \|T\| \, \|\underbrace{\lim_n x_n}_{x}\| \Rightarrow \|\bar{T}\| \le \|T\|$

$\|Tx_n\| \le \|T\| \|x_n\|$

$\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ پیوسته است زیرا

$\big| \|x\| - \|y\| \big| \le \|x - y\|$

یا

$|d(x,o) - d(y,o)| \le d(x,y)$

شرط لیپشیتز

$f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$

$d_Y(f(x), f(y)) \le d_X(x,y)$

۴) $\|\bar{T}\| = \|T\|$

تمرین: $|d(x,u) - d(y,v)| \le d(x,y) + d(u,v)$

$x \in D,\ \|Tx\| = \|\bar{T}x\| \le \|\bar{T}\| \, \|x\|$ تابلو

$\therefore \|T\| = \sup_{x \ne 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \le \|\bar{T}\|$ ∎

اگر $x \in D \subseteq \bar{D}$ آنگاه $x_n = x \to x$ پس

$$\bar{T}x = \lim_n T x_n = \lim_n T x = T x$$

$$\therefore T = \bar{T}|_D$$

تبصره: نگاشت $\bar{T}:\bar{D}\to Y$ که توسیع T است منحصربفرد است زیرا اگر
$S:\bar{D}\to Y$ توسیع دیگری از T باشد آنگاه

$$\forall x\in\bar{D}\ \exists\{x_n\}\subseteq D;\ x_n\to x;\ \bar{T}x=\lim_n Tx_n=\lim_n Sx_n=Sx \Rightarrow \bar{T}(x)=S(x).$$

$S|_D=T$

S پیوسته است

مثال از یک عملگر بیکران: فرض کنیم $C^1([0,1])$ فضای توابع با مشتق پیوسته روی $[a,b]$

$C^1([0,1]) \subseteq C([0,1])$

نگاشت مشتق گیری $D: C^1([0,1])\to C[0,1]$ بی کران است:

$$f\mapsto Df=f'$$

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$
$$\Downarrow$$
$$f'(x)=\begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

f' لزوماً پیوسته نیست

$$f_n(t)=t^n \Rightarrow \|f_n\|=\sup_{t\in[0,1]}|t^n|=1$$

$$(Df_n)(t)=f_n'(t)=nt^{n-1}\Rightarrow \|Df_n\|=\sup_{t\in[0,1]}|nt^{n-1}|=n$$

$$\forall n;\quad \sup_{f\neq 0}\frac{\|Df\|}{\|f\|}\geq\frac{\|Df_n\|}{\|f_n\|}=n$$

$$\therefore \sup_{f\neq 0}\frac{\|Df\|}{\|f\|}=\infty$$

$$|i|^2=1^2=1\neq -1=i^2$$

مثال از عملگر کراندار

$$T:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2,\quad T(x,y)=(y,0)$$

ماتریس T در پایه استاندارد $=[Te_1\ \ Te_2]=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$

$$\|T\|=\sup\frac{\|T(x,y)\|}{\|(x,y)\|}=\sup\frac{\sqrt{|y|^2+0^2}}{\sqrt{|x|^2+|y|^2}}=\sup\frac{|y|}{\sqrt{|x|^2+|y|^2}}\leq 1$$

$$1=\frac{|1|}{\sqrt{|0|^2+|1|^2}}=\frac{\|T(0,1)\|}{\|(0,1)\|}\leq\sup\frac{\|T(x,y)\|}{\|(x,y)\|}=\|T\|$$

$$\Rightarrow \|T\|=1$$

نکته. تابع ثابت غیرصفر هیچگاه خطی نیست

$$\boxed{\underbrace{f(x+y)}_{c}=\underbrace{f(x)}_{c}+\underbrace{f(y)}_{c} \Rightarrow c=0}$$

پیوزه کرسی. $\forall x\in X\ \exists f_0\in X';\ \|f_0\|=1\ \&\ f_0(x)=\|x\|$

برهان. زیرفضای تولید شده توسط x را در نظر می‌گیریم: $M=\langle x\rangle=\mathbb{C}x=\{\alpha x\mid \alpha\in\mathbb{C}\}$

تابعک خطی $\begin{cases} f: M\to\mathbb{C} \\ \alpha x\mapsto \alpha\|x\| \end{cases}$ را در نظر بگیرم. این تابعک کراندار است

$$\|f\|=\sup_{M\ni y\neq 0}\frac{|f(y)|}{\|y\|}=\sup_{x\neq 0}\frac{|\alpha|\,\|x\|}{\|\alpha x\|}=\sup\{1\}=1.$$

بنابه قضیه‌ی هان-باناخ، $\exists f_0: X\to\mathbb{C}$

$$\|f_0\|=\|f\|\ \&\ f_0\big|_M=f$$

$f_0(x)=f(x)=f(1x)=1\|x\|=\|x\|$ بنابراین

قضیه. فرض کنید X یک فضای نرمدار باشد و M زیرفضای X باشد. در این صورت

$$x\notin\overline{M}\Leftrightarrow \exists f\in X';\ f\big|_M=0,\ f(x)\neq 0$$

پروژه‌ی کلاسی و تحویل ۱۵،۱۲،۹۵) فضای نرمدار X باناخ است اگر هر سری $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ در X که مطلقاً همگرا است (یعنی $\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|<\infty$) همگرا است (یعنی حد $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}x_k$ وجود دارد).

یادآوری. اگر X یک فضای برداری باشد و $\frac{X}{M}=\{x+M\mid x\in X\}$ که در آن M زیرفضای از X است. $\frac{X}{M}$ همراه اعمال $\lambda(x+M)+(y+M)=(\lambda x+y)+M$ یک فضای برداری است.

$x\sim y\Leftrightarrow x-y\in M$

$\sim$ رابطه هم ارزی است

$x+M:=[x]$ کلاس هم ارزی

اگر X یک فضای نرمدار باشد و M زیرفضای بسته‌ای از X باشد، آنگاه

به معنای توپولوژی

$\|x+M\| = \inf_{z\in M} \|x+z\| \geq 0$

یک نرم روی $\frac{X}{M}$ است:

$\beta = \inf A$ اگر β

① β کران پایین A است

② $\forall \varepsilon\, \exists a\in A;\ a < \beta+\varepsilon$

ویژگی تقریب (اینفیمم)

① $\|x+M\|=0 \Rightarrow \inf_{z\in M}\|x+z\|=0 \Rightarrow \forall n\, \exists z_n \in M;\ \|x+z_n\|<0+\frac{1}{n} \underset{\text{قضیه فشردگی}}{\Rightarrow} \lim_n \|x+z_n\|=0$

$\Rightarrow \forall\varepsilon\, \exists N\, \forall n\geq N;\ \underbrace{\big|\|x+z_n\|-0\big|}_{\|-z_n-x\|}<\varepsilon \Rightarrow \lim_n (\underbrace{-z_n}_{\in M})=x \Longrightarrow x\in \overline{M}=M$

$\Downarrow$

$x+M=0+M = 0_{\frac{X}{M}}$

② $\lambda\neq 0$

$\|\lambda(x+M)\| = \|\lambda x+M\| = \inf_{z\in M}\|\lambda x+z\| = \inf_{\omega\in M}\|\lambda x+\lambda\omega\|$ ($\lambda\frac{z}{\lambda}=\lambda\omega$)

$=|\lambda| \inf_{\omega\in M}\|x+\omega\| = |\lambda|\, \|x+M\|$

③ فرض کنیم $\varepsilon>0$ دلخواه باشد. بنا به خ.م.ا:

کاتالیزور!

$\exists m_1,m_2\in M;\ \|x+m_1\|<\|x+M\|+\varepsilon$ ★ $\&\ \|y+m_2\|<\|y+M\|+\varepsilon$ □

$\underbrace{\|(x+M)+(y+M)\|}_{\varphi(\varepsilon)} = \|(x+y)+M\| = \inf_{m\in M}\|x+y+m\| \leq \|x+y+\underbrace{m_1+m_2}_{\in M}\|$

$\leq \|x+m_1\|+\|y+m_2\| \underset{★}{\overset{□}{\leq}} \underbrace{\|x+M\|+\|y+M\|+2\varepsilon}_{\psi(\varepsilon)}$

نامساوی مثلثی X

اگر $\varepsilon\to 0$،

$\therefore \|(x+M)+(y+M)\|\leq \|x+M\|+\|y+M\|.\ \square$

دکتری و ارشد Graduate

کارشناسی Undergraduate

دروس ارشد، دکتری و ... Advanced Course graduate

تمرین. $T, S \in B(X,Y) \Rightarrow T+S \in B(X,Y)$

حل. $\underbrace{\|(T+S)(x)\|}_{=} = \|Tx + Sx\| \leq \|Tx\| + \|Sx\| \leq \underbrace{(\|T\|+\|S\|)\|x\|}$

تابلو

$$\|T+S\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|(T+S)x\|}{\|x\|} \leq \|T\| + \|S\|$$

این اتفاقی برای نامساوی مثلث در مورد نرم عملگرها است.

تمرین. $\|T^n\| \leq \|T\|^n$

حل. استقرا

1) $\|T^1\| = \|T\|^1$

۲) $\|T^n\| \leq \|T\|^n \Rightarrow \|T^{n+1}\| = \|T^n . T\| \leq \|T^n\| \, \|T\| \leq \underbrace{\|T\|^n \|T\|}_{\|T\|^{n+1}}$. $\square$

قضیه. $\|TS\| \leq \|T\| \, \|S\|$

تمرین نرم تابعک $\begin{cases} \rho(f) = \int_0^1 f(t)\,dt \\ f \in C([0,1]) \end{cases}$ را بیابید.

$$\left.\begin{aligned} &|\rho(f)| = \left|\int_0^1 f(t)\,dt\right| \leq \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| \,(1-0) = \|f\| \\ &\therefore \|\rho\| \leq 1 \\ &\rho(\underset{\sim}{\mathbf{1}}) = \int_0^1 \mathbf{1}\,dt = 1 = \|\mathbf{1}\| \end{aligned}\right\} \Rightarrow \|\rho\| = 1$$

$\mathbf{1}$ تابع ثابت

تمرین. نرم $\begin{cases} \tau(f) = \int_a^b t^{99} f(t)\,dt \\ f \in C[a,b] \end{cases}$ را بیابید.

قضیه. فضای نرمدار X باناخ است اگر و تنها اگر هر سری مطلقاً همگرا، همگرا باشد.

برهان. فرض کنیم X یک فضای باناخ باشد. فرض کنیم $\sum_n x_n$ به گونه‌ای باشد که $\sum_n \|x_n\|$ همگرا است. قرار می‌دهیم $S_n=\sum_{k=1}^{n} x_k$ و $t_n=\sum_{k=1}^{n}\|x_k\|$.

$$\|S_n-S_m\| = \Big\|\sum_{k=m+1}^{n} x_k\Big\| \underset{\text{نامساوی مثلث}}{\le} \sum_{k=m+1}^{n}\|x_k\| = t_n - t_m = |t_n-t_m| \quad (n\ge m) \quad ①$$

چون $\sum_n\|x_n\|$ همگرا است، پس $\{t_n\}$ همگرا و لذا کوشی است. پس

$$\forall \varepsilon\ \exists N\ \forall m,n\ge N;\ |t_n-t_m|<\varepsilon \quad ②$$

دنباله عددی

$$〃 \quad 〃 \quad 〃 \quad ;\ \|S_n-S_m\| \underset{①}{\le} |t_n-t_m| \underset{②}{<} \varepsilon$$

پس $\{S_n\}$ در X کوشی است، چون X کامل است $\{S_n\}$ همگرا است پس $\sum_n x_n$ همگرا است.

بالعکس، فرض کنیم $\{x_n\}$ یک دنباله کوشی باشد.

$$\exists n_1\ \forall m,n\ge n_1;\ \|x_n-x_m\|<\frac{1}{2}$$

به خصوص،

$$\forall n\ge n_1;\ \|x_n-x_{n_1}\|<\frac{1}{2^1} \quad ①$$

$$\cancel{\exists n_2'\ \forall m,n\ge n_2';\ \|x_n-x_m\|<\frac{1}{2^2}}$$

~~فرض کنیم $n_2\ge\max\{n_1,n_2'\}$ پس~~

$$\cancel{n_2>n_1\ \&\ \forall m,n\ge n_2(\ge n_2');\ \|x_n-x_m\|<\frac{1}{2^2}}$$

$$\exists n_2>n_1\ \forall n\ge n_2;\ \|x_n-x_{n_2}\|<\frac{1}{2^2} \quad ②$$

به خصوص بنا به ①،

$$\|x_{n_2}-x_{n_1}\|<\frac{1}{2^1}$$

به همین ترتیب $\exists n_3 > n_2\ \forall m,n \geq n_3;\ \|x_n - x_{n_3}\| < \frac{1}{2^3}$

بنا به (2) داریم $\|x_{n_3} - x_{n_2}\| < \frac{1}{2^2}$

با روش استقرایی، به دنباله $n_1 < n_2 < \cdots$ دست می‌یابیم به طوری که

$$\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < \frac{1}{2^k} = \left(\frac{1}{2}\right)^k \quad (3)$$

قرار می‌دهیم $y_k = x_{n_{k+1}} - x_{n_k}$. در این صورت بنا به آزمون مقایسه و (3)، $\sum_{k=1}^{\infty} \|y_k\|$ همگرا است. پس بنا به فرض $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ همگرا است پس جمع‌های جزئی آن همگرا است یعنی دنباله

$$\sum_{p=1}^{k} y_p = (\cancel{x_{n_{k+1}}} - \cancel{x_{n_k}}) + \cdots + (\cancel{x_{n_2}} - x_{n_1}) = x_{n_{k+1}} - x_{n_1}$$

همگرا است. x_{n_1} یک مقدار ثابت است. پس $\{x_{n_{k+1}}\}_{k=1}^{\infty}$ همگرا است (به z). پس $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ هم همگرا است (به z).

فرض کنید $\varepsilon > 0$ داده شده است.

$$\exists N\ \forall k \geq N;\ \|x_{n_{k+1}} - z\| < \varepsilon$$

50    $x_{n_{51}}, x_{n_{52}}, \ldots$

$$\forall k \geq N+1;\ \|x_{n_k} - z\| < \varepsilon$$

پس دنباله کوشی $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ زیردنباله همگرای $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ به z دارد. پس خودش هم همگرا به z است زیرا فرض کنیم $\varepsilon > 0$ داده شده باشد. بنا به کوشی بودن داریم

$$\exists N_1\ \forall n,m \geq N_1;\ \|x_n - x_m\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

بنا به همگرایی

$$\exists N_2'\ \forall k \geq N_2';\ \|x_{n_k} - z\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$n_1 < n_2 < n_3 < \cdots < \underbrace{n_{N_2'}}_{N_2} < \cdots$$

$$\exists N_2\ \forall n_k \geq N_2;\ \|x_{n_k} - z\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\forall n \geq \max\{N_1, N_2\};\ \|x_n - z\| \leq \|x_n - x_{N_0}\| + \|x_{N_0} - z\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$\exists p;\ N_0 = n_p \geq \max\{N_1, N_2\}$$

قضیه. $B(X,Y)$ باناخ است هرگاه Y باناخ باشد.

برهان. فرض کنیم $\{T_n\}$ دنباله‌ای کوشی در $B(X,Y)$ باشد. فرض کنیم $x\in X$ ثابت. بنابه

$$\|T_nx-T_mx\|=\|(T_n-T_m)x\|\underset{\text{قت}}{\leq}\|T_n-T_m\|\,\|x\|$$

برای هر ε، می‌توان $\|T_nx-T_mx\|$ را از مرتبه‌ای به بعد از ε کمتر کرد زیرا بنابه کوشی بودن $\{T_n\}$ از مرتبه‌ای به بعد $\|T_n-T_m\|<\frac{\varepsilon}{\|x\|}$ برقرار است. پس $\{T_nx\}$ کوشی است، چون Y باناخ است

$\exists y\in Y;\ T_nx\to y$ قرار می‌دهیم

$$T:X\to Y,\quad x\mapsto Tx:=y=\lim_n T_nx.$$

T خطی است زیرا

$$T(\lambda x+y)=\lim_n T_n(\lambda x+y)\underset{T_n\text{ ها خطی اند}}{=}\lim(\lambda T_nx+T_ny)=\lambda Tx+Ty$$

فرض کنیم $\|x\|\leq 1$. بنابه کوشی بودن $\{T_n\}$،

$$\exists N\ \forall n\geq N;\ \|T_n-T_N\|<1$$

$$\|T_nx\|\leq\|(T_n-T_N)x\|+\|T_Nx\|\underset{\text{قت}}{\leq}\underbrace{\|T_n-T_N\|}_{<1}\underbrace{\|x\|}_{\leq 1}+\|T_N\|\underbrace{\|x\|}_{\leq 1}<1+\|T_N\|$$

با گرفتن حد داریم

$$\|Tx\|=\|\lim_n T_nx\|=\lim_n\|T_nx\|\leq\underbrace{1+\|T_N\|}_{\text{کران بالا}}\Rightarrow\|T\|\leq 1+\|T_N\|<\infty.$$

پس $T\in B(X,Y)$. نشان می‌دهیم $T_n\to T$ وقتی $n\to\infty$:

فرض کنیم $\varepsilon>0$ داده شده باشد. بنابه کوشی بودن $\{T_n\}$ داریم ($\|x\|=1$)

$$\exists N\ \forall m,n\geq N;\ \|T_n-T_m\|<\frac{\varepsilon}{2}\Rightarrow\|T_nx-T_mx\|\leq\|T_n-T_m\|<\frac{\varepsilon}{2}$$

n را ثابت نگه داشته و $m\to\infty$ داریم

$$\exists N\ \forall n\geq N;\ \|T_nx-Tx\|\leq\frac{\varepsilon}{2}\Rightarrow\|T_n-T\|=\sup_{\|x\|=1}\|T_nx-Tx\|\leq\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.$$

$\therefore T_n\to T.\ \square$

قضیه. فرض کنید X یک فضای باناخ و M زیرفضای بسته‌ای از آن باشد. در این صورت $\frac{X}{M}$ یک فضای باناخ است.

$\lambda(x+M)=\lambda x+M$

$(x+M)+(y+M)=(x+y)+M$

$x+M=y+M \Leftrightarrow x-y\in M$

برهان. فرض کنیم $\sum_n \|x_n+M\|$ همگرا باشد. نشان می‌دهیم $\sum_n x_n+M$ نیز همگراست. در این صورت بنا به قضیه... فضای $\frac{X}{M}$ باناخ می‌شود. بنا به تعریف نرم خارجی

$$\|x+M\|=\inf_{y\in M}\|x+y\|$$

$$\exists y_n\in M;\ \|x_n+y_n\|<\|x_n+M\|+\frac{1}{2^n}$$

است. بنا به آزمون مقایسه در مورد سری‌های عددی، $\sum_n \|x_n+y_n\|$ همگراست. چون X کامل است، پس $\sum_n x_n+y_n$ همگرا به مثلاً z است. فرض کنیم $s_n=\sum_{k=1}^{n} x_k+y_k$ جمله nام سری اخیر باشد و $t_n=\sum_{k=1}^{n} \underbrace{x_k+M}_{=x_k+y_k+M}$. داریم

$$0\le\|t_n-(z+M)\|=\|(\sum_{k=1}^{n}(x_k+y_k)-z)+M\|=\inf_{u\in M}\|\sum(x_k+y_k)-z+u\|$$

$$\le\|\sum(x_k+y_k)-z\|=\|s_n-z\|$$

چون $\lim_n s_n=z$ پس $\lim_{n\to\infty}(t_n-(z+M))=0$ به عبارت دیگر $\lim_n t_n=z+M$ پس $\sum_n x_n+M$ همگراست. □

پروژه کلاسی (تحویل ۹۶/۱/۲۰). اگر X فضای نرم‌دار و M زیرفضای بسته X باشد به طوری که $\frac{X}{M}$ باناخ باشد، آنگاه X هم باناخ است. (حل تمرین کتاب اسپرانس...)

تبصره. اگر M بسته نباشد، $\|x+M\|$ یک نیم‌نرم خواهد بود.

سؤال) آیا اگر $\|x+M\|$ یک نرم باشد، M بسته است؟ بلی.

$z\in\overline{M}$

$\exists\{y_n\}\subseteq M;\ y_n\to z$

$0\le\|z+M\|\le\|z-y_n\|\ (-y_n\in M)\to 0$

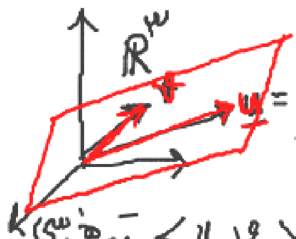
$\therefore \|z+M\|=0$

پس $z+M=0$. لذا $z\in M$.

$\therefore \overline{M}\subseteq M$. □

فضای هیلبرت

فضای اقلیدسی



$\underline{u} = (x,y,z)$

$\|\underline{u}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

تعبیر هندسی $\langle \underline{u},\underline{v} \rangle = \|\underline{u}\| \, \|\underline{v}\| \cos\langle u,v\rangle$

تعبیر تحلیلی $\langle (x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)\rangle = \sum_{i=1}^{3} x_i y_i$

تعریف. فرض کنید H یک فضای برداری باشد. تابع $\langle \cdot,\cdot\rangle : H\times H \longrightarrow \mathbb{C}$ را یک ضرب داخلی روی H می‌گوییم هرگاه

1) $\langle x,x\rangle = 0 \Leftrightarrow x=0$

2) $\langle x+\alpha y, z\rangle = \langle x,z\rangle + \alpha\langle y,z\rangle$

3) $\langle y,x\rangle = \overline{\langle x,y\rangle}$ مزدوج مختلط

در این صورت $(H,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ را یک فضای ضرب داخلی می‌گویند.

مثلاً. 1) $\mathbb{C}^n$, $\langle (z_1,\dots,z_n),(w_1,\dots,w_n)\rangle = \sum_{i=1}^{n} z_i \overline{w_i}$

2) $C_{\mathbb{R}}([a,b])$, $\langle f,g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)\,dt$

نکته. $\langle x, y+\alpha z\rangle = \overline{\langle y+\alpha z, x\rangle} = \overline{\langle y,x\rangle + \alpha\langle z,x\rangle} = \overline{\langle y,x\rangle} + \bar{\alpha}\,\overline{\langle z,x\rangle}$

$= \langle x,y\rangle + \bar{\alpha}\langle x,z\rangle$

قضیه (نامساوی کوشی-شوارتز). اگر H فضای ضرب داخلی باشد،

$\forall x,y\in H;\quad |\langle x,y\rangle|^2 \leq \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle$ یا $|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|$

برهان. به عهده دانشجویان (Wikipedia) $\quad 0 \leq \langle x+ty, x+ty\rangle = \cdots$

نتیجه، $\|x\| := \langle x,x\rangle^{\frac{1}{2}}$ یک نرم است. پس هر فضای ضرب داخلی یک فضای نرم‌دار است.

$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x+y, x\rangle + \langle x+y, y\rangle = \langle x,x\rangle + \langle y,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle = \|x\|^2 + \overline{\langle x,y\rangle} + \langle x,y\rangle + \|y\|^2 = \|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\langle x,y\rangle) + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2|\langle x,y\rangle| + \|y\|^2 \underset{\text{کشی}}{\leq} \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\|+\|y\|)^2 \Rightarrow \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|.$ $\square$

قضیه. $X\times Y$ همراه نرم $\|(x,y)\|=\|x\|+\|y\|$ باناخ است اگر و فقط اگر X و Y باناخ باشند.

اثبات: $X\times Y$ یک فضای برداری است: $(x,y)+\lambda(u,v)=(x+\lambda u, y+\lambda v)$

($\Rightarrow$) فرض کنیم دنباله $\{(x_n,y_n)\}$ کوشی باشد.

$$\forall\varepsilon\,\exists N\,\forall m,n\geq N;\quad \|(x_n,y_n)-(x_m,y_m)\|<\varepsilon$$

$$\|y_n-y_m\| \text{ و } \|x_n-x_m\| < \|x_n-x_m\|+\|y_n-y_m\|$$

پس $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ کوشی‌اند. چون X ، Y باناخند،

$$\exists x\in X;\ x_n\to x \quad \& \quad \exists y\in Y;\ y_n\to y \quad (\clubsuit)$$

گیریم $\varepsilon>0$ داده شده باشد. بنابر $(\clubsuit)$

$$\exists N_1\,\forall n\geq N_1;\ \|x_n-x\|<\frac{\varepsilon}{2} \quad \& \quad \exists N_2\,\forall n\geq N_2;\ \|y_n-y\|<\frac{\varepsilon}{2}$$

قرار می‌دهیم $N=2N_1+5N_2$. در این صورت

$$\forall n\geq N;\quad \|(x_n,y_n)-(x,y)\|=\|x_n-x\|+\|y_n-y\|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

($\Leftarrow$) فرض کنیم $X\times Y$ باناخ است. نشان می‌دهیم X باناخ است. گیریم $\{x_n\}$ کوشی باشد.

گیریم $y_0\in Y$ دلخواه و ثابت باشد. $\forall\varepsilon\,\exists N\,\forall m,n\geq N;\ \|x_n-x_m\|<\varepsilon$

$$=\|(x_n,y_0)-(x_m,y_0)\|$$

پس $\{(x_n,y_0)\}$ کوشی است. بنابر کامل بودن $X\times Y$ ،

$$\exists (z,w)\in X\times Y;\quad (x_n,y_0)\to(z,w)$$

بنابر تعریف حد ،

$$\forall\varepsilon\,\exists N\,\forall n\geq N;\quad \|(x_n,y_0)-(z,w)\|<\varepsilon$$

$$\|x_n-z\| \ \&\ \|y_0-w\| < \|x_n-z\|+\|y_0-w\|$$

پس $\lim_n x_n=z$. $\square$

نکته. برای هر ε ، $\|y_0-w\|<\varepsilon$. پس $\|y_0-w\|=0$. پس $y_0=w$.

تعریف. دو نرم $\|\cdot\|_1 \,\&\, \|\cdot\|_2$ روی فضای برداری X را هم‌ارز گویند هرگاه

$$\exists \alpha,\beta>0\ \forall x\in X;\quad \alpha\|x\|_2 \le \|x\|_1 \le \beta\|x\|_2$$

قضیه. $I:(X,\|\cdot\|_1)\to(X,\|\cdot\|_2)$ ، $I(x)=x$ ، پیوسته (کراندار) است اگر و فقط اگر $\exists M;\ \|\cdot\|_2\le M\|\cdot\|_1$

برهان:

$$I \text{ پیوسته است} \Leftrightarrow I \text{ کراندار است} \Leftrightarrow \|I\|=\sup_{x\neq 0}\frac{\|Ix\|_2}{\|x\|_1}\le M<\infty \Leftrightarrow \forall x\in X;\ \frac{\|x\|_2}{\|x\|_1}\le M$$

نتیجه. تابع همانی I همسانریختی است اگر و فقط اگر I و I^{-1} پیوسته باشند، اگر و فقط اگر

$$\exists\alpha;\ \|\cdot\|_2\le\alpha\|\cdot\|_1 \ \&\ \exists\beta;\ \|\cdot\|_1\le\beta\|\cdot\|_2$$

اگر و فقط اگر $\|\cdot\|_1$ و $\|\cdot\|_2$ هم‌ارز باشند.

قضیه. اگر $\|\cdot\|_1$ و $\|\cdot\|_2$ دو نرم معادل (هم‌ارز) روی X باشند، $(X,\|\cdot\|_1)$ باناخ است اگر و فقط اگر $(X,\|\cdot\|_2)$ باناخ باشد.

برهان. $(\Leftarrow)$ $\exists\alpha,\beta;\ \|\cdot\|_1\le\alpha\|\cdot\|_2$ (1) $\ \&\ \|\cdot\|_2\le\beta\|\cdot\|_1$ (2)

$\{x_n\}$ در $\|\cdot\|_2$ کوشی است $\Rightarrow \forall\varepsilon\,\exists N\,\forall m,n\ge N;\ \underbrace{\|x_n-x_m\|_2}_{\frac{1}{\alpha}\|x_n-x_m\|_1 \overset{(1)}{\le}} < \frac{\varepsilon}{\alpha} \Rightarrow$ $\{x_n\}$ در $\|\cdot\|_1$ کوشی است $\xRightarrow{(X,\|\cdot\|_1)\text{ باناخ}}$

$$\exists x\in X;\ x_n\xrightarrow{\|\cdot\|_1}x \Rightarrow \forall\varepsilon\,\exists N\,\forall n\ge N;\ \underbrace{\|x_n-x\|_1}_{\frac{1}{\beta}\|x_n-x\|_2\le} < \frac{\varepsilon}{\beta} \Rightarrow$$

$x_n\xrightarrow{\|\cdot\|_2}x \Rightarrow (X,\|\cdot\|_2)$ باناخ است.

$(\Rightarrow)$ مشابه قسمت قبل، چیزی برای اثبات باقی نمی‌ماند. $\square$

قضیه. اگر $B(X,Y)$ باناخ باشد، ($X\neq\{0\}$) آنگاه Y باناخ است.

برهان. فرض کنیم $\{y_n\}$ در Y کوشی باشد. $0\neq x_0\in X$ را دلخواه ولی از حالا به بعد ثابت در نظر می‌گیریم. بنا به نتیجه قضیه هان-باناخ، $\exists f\in X';\ \|f\|=1\ \&\ f(x_0)=\|x_0\|\neq 0$

توابع خطی $\left\{\begin{array}{l} T_n: X\to Y \\ T_n x = f(x)\,y_n \end{array}\right.$ را در نظر می‌گیریم.

$$\|T_n x - T_m x\| = \|f(x)y_n - f(x)y_m\| = |f(x)|\,\|y_n-y_m\| \leq \|x\|\,\|y_n-y_m\|$$

$$\|T_n - T_m\| = \sup_{x\neq 0}\frac{\|(T_n-T_m)x\|}{\|x\|} \leq \|y_n - y_m\|$$

پس $\{T_n\}$ کوشی است. چون $B(X,Y)$ باناخ است، $\{T_n\}$ همگرا به عملگر T است.

لذا $\underbrace{T_n x_0}_{f(x_0)y_n} \to T x_0$ (زیرا $\|T_n x_0 - T x_0\| \leq \|x_0\|\,\|T_n - T\|$). پس $y_n \to \dfrac{T x_0}{f(x_0)}$. $\square$

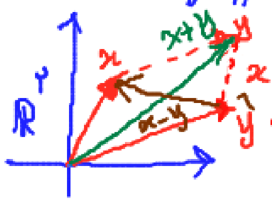
(قضیه گراف بسته)

پروژه کلاسی. اگر X و Y باناخ باشند و $T: X\to Y$ خطی باشد آنگاه T پیوسته است اگر و فقط اگر $GrT = \{(x,Tx)\mid x\in X\}$ در فضای $X\times Y$ بسته باشد.

$(\Leftarrow)$ گیریم $(x_n, Tx_n)\to (y,z)$. پس $x_n\to y$ (1) و $Tx_n \to z$ (2). بنا به پیوستگی T و (1)، داریم $Tx_n \to Ty$ (3). بنا به (2)، (3)، $z=Ty$. پس $(y,z)=(y,Ty)\in GrT$.

سؤال) آیا هر فضای نرم‌دار از روی یک ضرب داخلی به دست می‌آید؟

$$\forall \|\cdot\| \ \exists \langle \cdot,\cdot \rangle \ \forall x ; \quad \|x\| = \langle x,x \rangle^{\frac{1}{2}}$$



تمرین. اگر H یک فضای ضرب داخلی باشد،

$$\boxed{\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2} \quad \text{(قانون متوازی الاضلاع)}$$

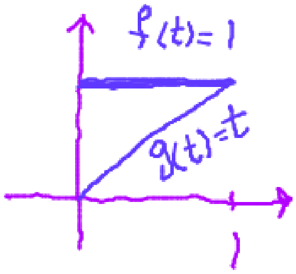
حل.

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle + \langle x-y, x-y \rangle$$
$$= \langle x,x \rangle + \langle x,y \rangle + \langle y,x \rangle + \langle y,y \rangle + \langle x,x \rangle - \langle x,y \rangle - \langle y,x \rangle + \langle y,y \rangle$$
$$= 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

عکس این تمرین هم برقرار است. در واقع

$$\langle x,y \rangle := \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} \|x + i^k y\|^2$$

(تساوی قطبی)



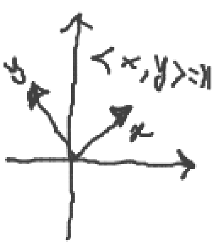
جواب سؤال بالا) خیر. مثال نقض $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$

$$\|f\| = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| = 1 \ , \quad \|g\| = 1$$

$$\|f+g\| = \sup_{t\in[0,1]} |1+t| = 2 \ , \quad \|f-g\| = 1$$

$$2\|f\|^2 + 2\|g\|^2 = 4 \neq 5 = \|f+g\|^2 + \|f-g\|^2$$

تعریف. دو بردار $x,y \in H$ را متعامد می‌گوییم هرگاه $\langle x,y \rangle = 0$.
orthogonal



$\langle x,y \rangle = \|x\|\|y\| \cos(x,y) = 0$

اگر X یک فضای نرم‌دار (حقیقی) باشد، می‌گوییم $x \perp_B y$ (عمود بیرکهف جیمز) هرگاه
Birkhoff-James

$$\|x\| \leq \|x + \lambda y\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

نکته. در فضای ضرب داخلی $\langle x,y \rangle = 0 \Leftrightarrow x \perp_B y$

تعریف. یک فضای ضرب داخلی که نرم حاصل از ضرب داخلی کامل باشد، فضای هیلبرت خوانده می‌شود که خود یک فضای باناخ است.

انواع دیگر تعامد قابل تعریف است مانند تعامد متساوی الساقین: (در فضای نرمدار حقیقی)

$$x \perp_I y \iff \|x+y\| = \|x-y\|$$

تمرین. در یک فضای ضرب داخلی $x \perp_I y \iff \langle x,y\rangle = 0$

حل. $x \perp_I y \iff \|x+y\|^2 = \|x-y\|^2 \iff \langle x+y, x+y\rangle = \langle x-y, x-y\rangle$

$$\iff \langle x,x\rangle + \cdots = \langle x,x\rangle - \cdots \iff 2\langle x,y\rangle + 2\underbrace{\langle y,x\rangle}_{\langle x,y\rangle} = 0 \iff 2\underbrace{Re\langle x,y\rangle}_{=\langle x,y\rangle} = 0$$

زیرا فضای برداری روی $\mathbb{R}$ است

تحت تعامد تقریبی قابل طرح است: فرض کنید $\varepsilon > 0$ داده شده است:

$$x \perp_I^{\varepsilon} y \iff \big|\, \|x+y\| - \|x-y\| \,\big| < \varepsilon \quad (\text{یا } \varepsilon\|x\|\|y\|)$$

حتی جلوتر: اگر $T: X \to Y$ یک نگاشت بین فضاهای نرمدار باشد. چه نوع نگاشتهایی حافظ تعامد برخوف-جیمز هستند

preserving maps

$$x \perp_B y \Rightarrow Tx \perp_B Ty$$

تعریف. اگر $M \subseteq H$ (مجموعه)، آنگاه $M^{\perp} = \{x \in H \mid \forall y \in M;\ \underbrace{\langle x,y\rangle = 0}_{x \perp y}\}$

تمرین ① $M^{\perp}$ زیرفضای H است ② $M^{\perp}$ بسته است ③ $M^{\perp} = M^{\perp\perp\perp}$ ④. $M \subseteq \underbrace{(M^{\perp})^{\perp}}_{M^{\perp\perp}}$

⑤ M بسته است اگر و فقط اگر $M = M^{\perp\perp}$.

تمرین. زیرفضاهای $\mathbb{R}^2$ عبارتند از $\{0\}$، $\mathbb{R}^2$ و خطوط مار بر مبدأ

قضیه (ادامه). ① $M^\perp$ یک زیرفضا است.

$$x,y\in M^\perp \Rightarrow \forall z\in M;\ \langle \lambda x+y, z\rangle=\lambda\underbrace{\langle x,z\rangle}_{0}+\underbrace{\langle y,z\rangle}_{0}=0 \Rightarrow \lambda x+y\in M^\perp$$

$\perp$ perp

② $M\subseteq M^{\perp\perp}$

$$x\in M\Rightarrow \forall z\in M^\perp;\ \langle x,z\rangle \overset{\text{I}}{=} 0 \Longrightarrow x\in (M^\perp)^\perp$$

I: $x\in M,\ z\in M^\perp$

③ $M^\perp$ بسته است.

$$x\in\overline{M^\perp}\Rightarrow \forall n;\ \underbrace{N_{\frac1n}(x)\cap M^\perp}_{x_n\in}\neq\emptyset \Rightarrow \underbrace{\|x_n-x\|}_{d(x_n,x)}<\frac1n\Rightarrow \lim_n\|x_n-x\|=0$$

$$\Rightarrow \forall\varepsilon\,\exists N\,\forall n\geq N;\ \underbrace{\big|\,\|x_n-x\|-0\,\big|}_{d(x_n,x)}<\varepsilon\Rightarrow \lim_n x_n=x$$

$$\Rightarrow \forall z\in M;\ \langle x_n,z\rangle \overset{\text{I}}{=} 0 \Longrightarrow 0=\lim_{n\to\infty}\langle x_n,z\rangle = \langle \underbrace{\lim_n x_n}_{x},z\rangle$$

I: $x_n\in M^\perp$

$\Rightarrow x\in M^\perp$

$$\therefore\ \overline{M^\perp}=M^\perp.$$

لم: $\forall y$; $f_y=\langle\cdot,y\rangle: H\to\mathbb{C}$, $x\mapsto\langle x,y\rangle$ پیوسته است. ($\langle\cdot,\cdot\rangle$ نسبت به مؤلفه‌ی اول پیوسته است)

برهان:

$$|f_y(x)-f_y(x')|=|\langle x,y\rangle-\langle x',y\rangle|=|\langle x-x',y\rangle|\leq\|x-x'\|\,\|y\|$$

نامساوی کوشی-شوارتز

پس شرط لیپشیتس برای f_y برقرار است. پس تابعک خطی f_y پیوسته است. به علاوه

$$|f_y(x)|=|\langle x,y\rangle|\leq\|x\|\,\|y\| \Rightarrow \|f_y\|=\sup_{x\neq0}|f_y(x)|/\|x\|\leq\|y\|$$

$$x=y\Rightarrow |f_y(y)|/\|y\|=\|y\| \qquad \therefore\ \|f_y\|=\|y\|.\ \square$$

قضیه ریس (Riesz) اگر H فضای هیلبرت باشد، آنگاه

$$\forall f\in \underbrace{H'}_{B(H,\mathbb{C})}\ \exists!\, z\in H\ \forall x\in H;\quad f(x)=\langle x,z\rangle \ \&\ \|f\|=\|z\|$$ (پیوسته)

تعریف. یک عملگر خطی $P:H\to H$ را یک (خودتوان) می‌گویند هرگاه $P^2=P$.
idempotent

تمرین. اگر $P\in B(H)$ خودتوان باشد آنگاه برد P (یعنی $\operatorname{ran}P$) بسته است.

برهان) $x\in\overline{\operatorname{ran}P}\Rightarrow \exists\{y_n\}\subseteq \operatorname{ran}P;\ y_n\to x \Longrightarrow Px_n\to x$ ① $\xRightarrow{\text{پیوسته است } P}$

[illegible]

$y_n\in\operatorname{ran}P\Rightarrow \exists x_n;\ y_n=Px_n$

$\underbrace{\underbrace{P(Px_n)}_{P^2x_n}}_{Px_n}\to Px \xRightarrow{①} x=Px\in\operatorname{ran}P$

$x\in\operatorname{ran}P\Rightarrow \exists z;\ x=Pz$
$\Rightarrow Px=P(Pz)=Pz=x$

عکس این مطلب هم درست است یعنی اگر $M\subseteq H$ بسته باشد یک $P\in B(H)$ خودتوان وجود دارد که $\operatorname{ran}P=M$.

تابع محدب. تابع $f:J\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ (بازه) را محدب می‌گویند هرگاه

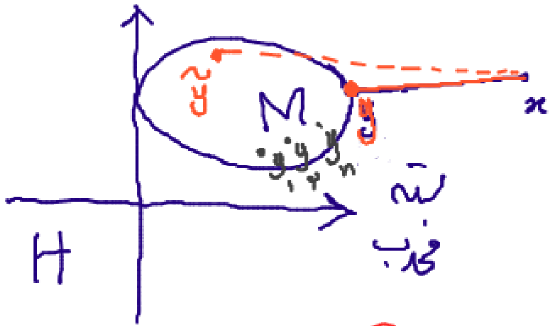
$$\forall 0\le\lambda\le1\ \forall x,y\in J;\quad f(\lambda x+(1-\lambda)y)\le\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

قضیه! هر تابع محدب روی یک بازهٔ باز، پیوسته است.

تمرین. اگر M ($\subseteq X$ فضای نرمدار) محدب باشد یعنی $\forall 0\le\lambda\le1\ \forall x,y\in M;\ \lambda x+(1-\lambda)y\in M$
یعنی پاره‌خط واصل هر دو نقطهٔ M، داخل M باشد
آنگاه $\overline{M}$ محدب است.

ناحدب

برهان) $\lambda\in[0,1],\ x,y\in\overline{M}\Rightarrow \exists\{x_n\},\{y_n\}\subseteq M;\ x_n\to x\ \&\ y_n\to y \Longrightarrow$ (اعمال فضای برداری پیوسته‌اند)
$\lambda x_n+(1-\lambda)y_n\to\lambda x+(1-\lambda)y \Rightarrow \lambda x+(1-\lambda)y\in\overline{M}$. ∎



قضیه. اگر H فضای هیلبرت باشد، $M\subseteq H$ بسته و محدب باشد و $x\in H$ آنگاه

$$\exists!\, y\in M;\quad \|x-y\| = \underbrace{d(x,M)}_{\inf\limits_{\tilde y\in M}\|x-\tilde y\|} = \delta$$

تذکر: اگر $A\subseteq\mathbb{R}$ آنگاه $\alpha=\inf A\in\bar A$

زیرا: $\forall\varepsilon\ \exists x\in A;\ \underbrace{\alpha\le x<\alpha+\varepsilon}_{|x-\alpha|<\varepsilon}$ ، $x\in N_\varepsilon(\alpha)$

$\therefore\ \forall\varepsilon;\ N_\varepsilon(\alpha)\cap A\neq\emptyset.\ \square$

برهان. چون $\delta=\inf\limits_{\tilde y\in M}\|x-\tilde y\|$ ،

$$\exists\{y_n\}\subseteq M;\quad \|\underbrace{x-y_n}_{v_n}\|\longrightarrow\delta$$

نشان می‌دهیم $\{y_n\}$ کوشی است:

$$\|v_n+v_m\| = \|y_n+y_m-2x\| = 2\Big\|\underbrace{\frac{y_n+y_m}{2}}_{\in M}-x\Big\|\ge 2\delta$$

بنابه محدب بودن M با $\lambda=\frac12$

بنابه قانون متوازی‌الاضلاع،

$$\|y_n-y_m\|^2=\|v_n-v_m\|^2=2\|v_n\|^2+2\|v_m\|^2-\|v_n+v_m\|^2\le 2\|v_n\|^2+2\|v_m\|^2-4\delta^2$$

با محاسبه این که سمت راست وقتی $n\to\infty,\ m\to\infty$ به سمت صفر میل می‌کند، کوشی بودن $\{y_n\}$ را به دست می‌آوریم.

چون M بسته است و H تام است، M هم کامل است پس $\exists y\in M;\ y_n\longrightarrow y$

چون $y\in M$ ، $\|x-y\|\ge\delta$.

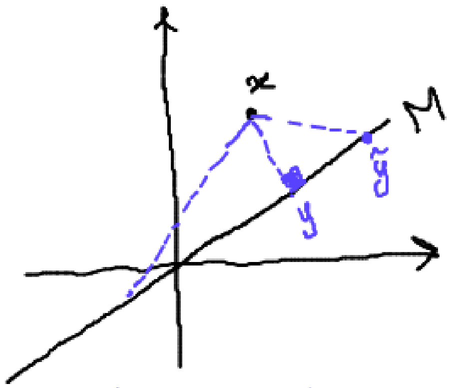
$$\|x-y\|\le\|x-y_n\|+\|y_n-y\|=\|v_n\|+\|y_n-y\|\longrightarrow\delta\ \Rightarrow\ \|x-y\|\le\delta$$

پس $\|x-y\|=\delta$. اگر y_0 نقطه دیگری با خاصیت مورد نظر باشد یعنی $\|x-y_0\|=\delta,\ y_0\in M$

بنابه قانون متوازی‌الاضلاع،

$$\|y-y_0\|^2=\|(y-x)-(y_0-x)\|^2=2\|y-x\|^2+2\|y_0-x\|^2-\|y-x+y_0-x\|^2$$
$$=2\delta^2+2\delta^2-4\underbrace{\Big\|\underbrace{\frac{y+y_0}{2}}_{\in M}-x\Big\|^2}_{\ge\delta^2}\le 0$$

$\therefore\ \|y-y_0\|=0\ \&\ y=y_0.\ \square$



بنابه قضیه تصویر اگر M یک زیرفضای بسته از فضای هیلبرت باشد و $x \in H$ آنگاه یک نقطه منحصربفرد $y \in M$ موجود دارد که $\|x-y\| = \inf_{\tilde{y} \in M} \|x-\tilde{y}\| = \delta$. نشان می‌دهیم

که در این حالت $z = x - y \in M^{\perp}$ (چرا): $\underbrace{z \notin M}_{\text{خ}}$ پس $\exists y_1 \in M;\ \underbrace{\langle z, y_1 \rangle}_{\beta} \neq 0$

$$\forall \alpha \in \mathbb{C};\ \|z - \alpha y_1\|^2 = \langle z - \alpha y_1, z - \alpha y_1 \rangle = \|z\|^2 - \bar{\alpha}\langle z, y_1\rangle - \alpha\langle y_1, z\rangle + \alpha\bar{\alpha}\|y_1\|^2$$

$$= \|z\|^2 - \bar{\alpha}\beta - \alpha\left[\bar{\beta} - \bar{\alpha}\|y_1\|^2\right]$$

$$\langle x, 0\rangle = \langle x, 0+0\rangle = \langle x, 0\rangle + \langle x, 0\rangle$$

$$\langle x, 0\rangle = 0$$

فرض کنید $\alpha = \dfrac{\beta}{\|y_1\|^2}$، عبارت آخر صفر می‌شود

و بنابراین

$$\delta^2 \le \|\underbrace{z - \alpha y_1}_{x-(\underbrace{y+\alpha y_1}_{\in M})}\|^2 = \delta^2 - \frac{\bar{\beta}.\beta}{\underbrace{\|y_1\|^2}_{\ge 0}} < \delta^2 \ \times \quad \square$$

پس برای هر $x \in H$ دیدیم که $y \in M$، $z = x - y \in M^{\perp}$ وجود دارد، بنابراین

$$x = y + z$$

$$H = M + M^{\perp}$$

پس جلوتر، $M \cap M^{\perp} = \{0\}$ زیرا $x \in M \cap M^{\perp} \Rightarrow \begin{cases} x \in M^{\perp} \\ x \in M \end{cases} \Rightarrow \langle x, x\rangle = 0 \Rightarrow x = 0$

(♣)

پس مهم $\boxed{H = M \oplus M^{\perp}}$

تمرین. $\bar{M}^{\perp} = M^{\perp}$

$$M \subseteq \bar{M} \Rightarrow \bar{M}^{\perp} \subseteq M^{\perp}$$

حل: $x \in M^{\perp}\ \&\ y \in \bar{M} \Rightarrow \exists \{x_n\} \subseteq M;\ x_n \to y \Rightarrow \underbrace{\langle x, x_n\rangle}_{0} \to \langle x, y\rangle \Rightarrow \langle x, y\rangle = 0 \Rightarrow x \in \bar{M}^{\perp}$

قضیه. فرض کنیم M زیرفضای H باشد. در این صورت

$$\overline{M}=H \iff M^{\perp}=\{0\}$$

برهان. $M^{\perp}=\{0\} \underset{\text{تمرین قبل}}{\iff} \overline{M}^{\perp}=\{0\} \underset{H=\overline{M}\oplus\overline{M}^{\perp}}{\iff} H=\overline{M}.\ \square$

$$M \text{ زیرفضا} \Rightarrow \forall\lambda\ \forall x,y\in\overline{M} \Rightarrow \exists\{x_n\},\{y_n\}\subseteq M;\ x_n\to x\ \&\ y_n\to y \underset{\text{پیوستگی اعمال جبری}}{\Longrightarrow}$$
$$\underbrace{\lambda x_n+y_n}_{\in M}\to\lambda x+y \Rightarrow \lambda x+y\in\overline{M} \Rightarrow \overline{M}\ \text{زیرفضای بسته}$$

قضیه. $M=M^{\perp\perp}$ اگر و تنها اگر M بسته باشد (M زیرفضای H است).

برهان. $(\Leftarrow)$ همیشه فضای عمود بر یک مجموعه بسته است. پس $(M^{\perp})^{\perp}$ بسته است لذا $M=M^{\perp\perp}$ بسته است.

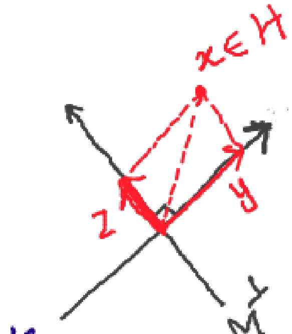
$(\Rightarrow)$ راه اول کمی پیچیده و ماشینی ولی درست است:

$$\left.\begin{array}{l} H=M\oplus M^{\perp}\\ H=M^{\perp}\oplus(M^{\perp})^{\perp}=M^{\perp\perp}\oplus M^{\perp}\end{array}\right\}\Rightarrow M=M^{\perp\perp}$$

راه دوم) به وضوح $M\subseteq M^{\perp\perp}$. بالعکس فرض کنیم $x\in M^{\perp\perp}$. چون $H=M\oplus M^{\perp}$ پس $y\in M$, $z\in M^{\perp}$ وجود دارد که $x=y+z$. چون $M^{\perp}\ni z=\underbrace{x}_{\in M^{\perp\perp}}-\underbrace{y}_{\in M\subseteq M^{\perp\perp}}\in M^{\perp\perp}$ پس بنابر (♣)، $z=0$.

لذا $x=0+y=y\in M$

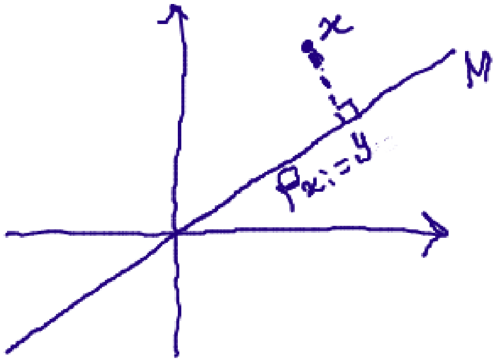
$\therefore M^{\perp\perp}\subseteq M.\ \square$



قضیه. M یک زیرفضای بسته از H است اگر و تنها اگر یک تصویر ($P\circ P=P^2=P$) ماکسیمال نوع کراندار $P:H\to H$ وجود داشته باشد که $\operatorname{ran}P=M$ (برد)، $\ker P=M^{\perp}$ (هسته) (این تصویر را تصویر متعامد می‌گویند)

برهان: $(\Rightarrow)$ نشان می‌دهیم $\operatorname{ran}P$ بسته است:

$$x_n\in\operatorname{ran}P,\ x_n\to x \Rightarrow \exists y_n;\ x_n=Py_n \underset{P\ \text{پیوسته است}}{\Longrightarrow} \underbrace{Px_n}_{P(P(y_n))=P^2(y_n)=P(y_n)=x_n}\to Px \xRightarrow{\text{یکتایی حد}} x=Px\in\operatorname{ran}P.$$



تابع $P : \underset{M \oplus M^{\perp}}{\underset{\shortparallel}{H}} \to H$ را در نظر می‌گیریم:

$$x = \underset{\underset{M}{\cap}}{y} + \underset{\underset{M^{\perp}}{\cap}}{z} \longmapsto y$$

① $\operatorname{ran} P = M$:

$$\begin{cases} x \in M \Rightarrow x = \overset{\overset{M}{\cup}}{x} + \overset{\overset{M^{\perp}}{\cup}}{0} \Rightarrow Px = x \Rightarrow x \in \operatorname{ran} P \\ x \in \operatorname{ran} P \Rightarrow \exists x';\ x = P\underbrace{x'}_{= \underset{M}{y'} + \underset{M^{\perp}}{z'}} = y' \in M \quad (\text{بنا به تعریف تابع } P) \end{cases}$$

② $\operatorname{Ker} P = M^{\perp}$:

$$\begin{cases} \underbrace{x}_{= \underset{M}{y} + \underset{M^{\perp}}{z}} \in \operatorname{Ker} P \Rightarrow \underbrace{Px}_{y} = 0 \Rightarrow x = y + z = 0 + z = z \in M^{\perp} \\ x \in M^{\perp} \Rightarrow x = \underset{\underset{M}{\cap}}{0} + \underset{\underset{M^{\perp}}{\cap}}{x} \Rightarrow Px = 0 \Rightarrow x \in \operatorname{Ker} P \end{cases}$$

یکتایی: فرض کنیم Q عملگر دیگری با خواص خواسته شده باشد.

$$\forall x \in H;\quad Q\underbrace{x}_{= \underset{M}{y} + \underset{M^{\perp}}{z}} = Qy + Qz = y + 0 = Px$$

$\operatorname{Ker} Q = M^{\perp}$

$\operatorname{ran} Q = M$

هر عملگر متعلق روی برد خود همانی عمل می‌کند

کران‌دار: P:

$$\|P\underbrace{x}_{= \underset{M}{y} + \underset{M^{\perp}}{z}}\|^2 = \|y\|^2 \leq \boxed{\|y\|^2 + \|z\|^2 = \langle y+z, y+z \rangle} = \boxed{\|y+z\|^2} = \|x\|^2$$

$\langle y, z \rangle = 0$

فیثاغورس ⟶ غورس ⟶ غورس ⟶ عروس

$\cancel{\|P\| = \|P \circ P\| \leq \|P\|\|P\|}$

$\cancel{1 \leq \|P\|}$

$$\|P\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Px\|}{\|x\|} \leq 1 < \infty \quad \square.\quad \|P\| = 1,\ P \neq 0 \text{ برابر}$$

قضیه ریس. اگر $f\in B(H,\mathbb{C})$ آنگاه $\exists!\, z\in H\ \forall x\in H;\ f(x)=\langle x,z\rangle$

$$f(\cdot)=\langle\cdot\,,z\rangle$$

و به علاوه $\|f\|=\|z\|$.

برهان. $(\Rightarrow)$ اگر $f(x)=\langle x,z\rangle$ به ازای یک $z\in H$ ثابت آنگاه

$$\left.\begin{array}{l}|f(x)|=|\langle x,z\rangle|\le\|x\|\,\|z\|\Rightarrow\|f\|\le\|z\|\\ f(z)=\langle z,z\rangle=\|z\|^2\end{array}\right\}\Rightarrow\|f\|=\|z\|$$

$$f(\alpha x+y)=\langle\alpha x+y,z\rangle=\alpha\langle x,z\rangle+\langle y,z\rangle=\alpha f(x)+f(y)$$

$(\Leftarrow)$ اگر $f\equiv0$، کافی است قرار دهیم $z=0$. پس فرض کنیم $f\neq0$ پس $H\neq N(f)=\ker f$.

بنا بر $H=\ker f\oplus\ker f^{\perp}$، $\ker f^{\perp}\neq\{0\}$ پس $0\neq z_0\in\ker f^{\perp}$. زیرفضای بسته

$\overline{f^{-1}(\{0\})}=f^{-1}(\{0\})$

قرار می‌دهیم $v=f(x)z_0-f(z_0)x$. در این صورت $f(v)=f(x)f(z_0)-f(z_0)f(x)=0$

پس $v\in\ker f$. پس $z_0\perp v$. پس

$$\langle f(x)z_0-f(z_0)x,\ z_0\rangle=0$$

$$f(x)\underbrace{\langle z_0,z_0\rangle}_{\neq0}=f(z_0)\langle x,z_0\rangle$$

بنابراین

$$f(x)=\langle x,\underbrace{\frac{\overline{f(z_0)}}{\|z_0\|^2}z_0}_{z}\rangle.\ \square$$

قضیه. اگر $T\in B(H)$ آنگاه $\exists!\, T^*\in B(H)\ \forall x,y\in H;\ \langle Tx,y\rangle=\langle x,T^*y\rangle$

به علاوه $\|T^*\|=\|T\|$, $\|T^*T\|=\|T\|^2$ ← شرط C^*،

$$\left\{\begin{array}{l}(\alpha T+S)^*=\bar{\alpha}T^*+S^*\\ (TS)^*=S^*T^*\\ (T^*)^*=T\end{array}\right.$$

involution

خواص اینولوشن یا برگشت

مثال. اگر $T:\ell^2\to\ell^2$، $T(x_1,x_2,\dots)=(0,x_1,x_2,\dots)$ آنگاه $T^*:\ell^2\to\ell^2$، $T^*(x_1,x_2,\dots)=(x_2,x_3,\dots)$

باید نشان دهیم

$$\langle \underbrace{T(x_1,x_2,\dots)}_{(0,x_1,x_2,\dots)},(y_1,y_2,\dots)\rangle = \langle (x_1,x_2,\dots), \underbrace{T^*(y_1,y_2,\dots)}_{(y_2,y_3,\dots)}\rangle$$

$$0\cdot\bar{y}_1 + x_1\bar{y}_2 + x_2\bar{y}_3+\cdots = x_1\bar{y}_2 + x_2\bar{y}_3+\cdots$$

$$\langle\{x_n\},\{y_n\}\rangle=\sum_{n=1}^{\infty} x_n\bar{y}_n$$
ضرب داخلی در ℓ^2

توجه کنید خانواده متشکل از $e_n=(\underbrace{0,0,\dots,0,1}_{n},0,\dots)$ ها یک پایه متعامد یکه برای ℓ^2 است.

$\langle e_n,e_m\rangle=0$ (متعامد بودن)

$\langle e_n,e_n\rangle=1$ (یکه بودن)

$$\ell^2\ni\{x_n\} = (x_1,x_2,x_3,\dots)=\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$$

سری فوریه — ضرایب فوریه

ضمناً $x_n=\langle \underbrace{\{x_n\}}_{(x_1,x_2,\dots)}, \underbrace{e_n}_{(0,\dots,0,1,0,\dots)}\rangle$. (n ام)

برهان قضیه. فرض کنیم $y\in H$. تابعک خطی (functional)

$$\begin{cases} f_y: H\longrightarrow\mathbb{C} \\ f_y(x)=\langle Tx,y\rangle \end{cases}$$
کراندار است زیرا

$$|f_y(x)|=|\langle Tx,y\rangle|\underset{\text{کشی}}{\le}\|T\|\,\|x\|\,\|y\| \Rightarrow \|f_y\|\le\|T\|\,\|y\|$$

بنا به قضیه ریس، عنصر یکتا z که آن را با T^*y نشان می‌دهیم وجود دارد که

$$\begin{cases} f_y(x)=\langle x,T^*y\rangle \\ \|f_y\|=\|T^*y\| \end{cases}$$

پس تابعی مانند $\begin{cases} T^*:H\to H \\ y\mapsto T^*y \end{cases}$ به دست آمد که

$$\boxed{\langle Tx,y\rangle=f_y(x)=\langle x,T^*y\rangle}$$

و $\|T^*y\|=\|f_y\|\le\|T\|\,\|y\|$.

1

فرض کنیم $y, y' \in H$.

$\forall x;\ \langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$

$\langle Tx, y'\rangle = \langle x, T^*y'\rangle$

$$\langle Tx, y+y'\rangle = \langle x, T^*(y+y')\rangle$$
$$\parallel$$
$$\langle Tx,y\rangle + \langle Tx,y'\rangle = \langle x,T^*y\rangle + \langle x,T^*y'\rangle = \langle x, T^*y+T^*y'\rangle$$

پس $\forall x;\ \langle x,\ T^*(y+y') - T^*y - T^*y'\rangle = 0$

لذا (1) $\langle T^*(y+y') - T^*y - T^*y',\ T^*(y+y') - T^*y - T^*y'\rangle = 0$

پس $T^*(y+y') = T^*y + T^*y'$. به دلیل مشابه $T^*(\lambda y) = \lambda T^*y$. پس T^* خطی است. اثبات بنابر:

$$\|T^*\| = \sup_{y \neq 0} \frac{\|T^*y\|}{\|y\|} \leq \|T\| < \infty$$

پس $T^* \in B(H)$.

نشان می دهیم $(\alpha T)^* = \bar{\alpha} T^*$

$$\langle (\alpha T)(x), y\rangle = \langle x, (\alpha T)^* y\rangle$$

تعریف ضرب عدد در تابع $\parallel$

$$\langle \alpha Tx, y\rangle = \alpha\langle Tx, y\rangle = \alpha\langle x, T^*y\rangle = \langle x, \bar{\alpha} T^*y\rangle = \langle x, (\bar{\alpha} T^*)y\rangle$$

پس بنابه لم زیر $(\alpha T)^* = \bar{\alpha} T^*$

لم. $S = T \iff \forall x \forall y;\ \langle x, Ty\rangle = \langle x, Sy\rangle$

کمپلکس: $S = T \iff \forall x;\ \langle x, Tx\rangle = \langle x, Sx\rangle$

یا به طور معادل (با در نظر گرفتن تابع خطی $T-S$) می توان گفت

$$0 = T \iff \forall x;\ \langle x, Tx\rangle = 0$$

به طور مشابه $(T+S)^* = T^* + S^*$ & $(TS)^* = S^* T^*$

اثبات نشان می دهیم $(T^*)^* = T$:

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, \overset{S}{T^*}y\rangle = \overline{\langle Sy, x\rangle} = \overline{\langle y, S^*x\rangle} = \langle S^*x, y\rangle = \langle T^{**}x, y\rangle$$

پس $T = T^{**}$.

دیدیم که $\|T^*\| \le \|T\|$ ②. اگر به جای عملگر T با عملگر T^* شروع می‌کردیم، از ② به

$(\|T\| =) \|(T^*)^*\| \le \|T^*\|$ ③. پ.ب: ②، ③، $\|T^*\| = \|T\|$.

این نقطه شروع شاخه‌ای از ریاضیات به نام نظریه عملگری است

Operator Theory

سرانجام، نشان می‌دهیم $\|T^*T\| = \|T\|^2$:

$$\|T^*T\| \underset{\text{خاصیت زیرضربی نرم عملگری}}{\le} \|T^*\|\,\|T\| = \|T\|^2$$

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \underbrace{\langle T^*Tx, x\rangle}_{\ge 0} = |\langle T^*Tx, x\rangle|$$

$$\underset{\text{کشی}}{\le} \|T^*Tx\|\,\|x\| \underset{\text{تابلو}}{\le} \|T^*T\|\,\|x\|^2$$

$$\|T\|^2 = \sup \frac{\|Tx\|^2}{\|x\|^2} \le \|T^*T\|. \ \square$$

تمرین: $\alpha = \sup A$, $A \subseteq [0,\infty) \Rightarrow \alpha^2 = \sup\{\lambda^2 \mid \lambda \in A\}$

اگر A یک ماتریس $m\times n$ باشد آنگاه عملگر

$$\begin{cases} T_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m \\ X=\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \longmapsto \underset{m\times n}{A}\,\underset{n\times 1}{X} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj} x_j \end{bmatrix}_{m\times 1} \end{cases}$$

$\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{C}^{n\times 1}$

فضای n تایی‌های مرتب با ماتریس‌های $n\times 1$ قابل تناظر است.

آنگاه $T_A^* = T_{A^*}$ که در آن $A^* = [\bar{a}_{ji}]$.

نکته ۱. الحاق T^* از $T : H \to H$ که قبلاً تعریف شد با همان روش برای یک عملگر $T : H \to K$ قابل تعریف است. البته $T^* : K \to H$.

نکته ۲. الحاق $T^* : K \to H$ از عملگر $T : H \to K$ روی فضای هیلبرت H با الحاق باناخی $T' : K' \to H'$ از عملگر T کمی متفاوت است. در واقع $(\lambda T)^* = \bar{\lambda} T^*$ در حالی که $(\lambda T)' = \lambda T'$.

نکته ۳. بنا به قضیه ریس،

$$\varphi : H' \xrightarrow[\text{مزدوج خطی}]{\text{طولپا}} H$$

$$f \longmapsto z \quad \longleftrightarrow \quad f(x) = \langle x, z \rangle$$

$$\|f\| = \|z\|$$

$$\begin{cases} \varphi(\lambda f) = \bar{\lambda}\, \varphi(f) \\ \varphi(f+g) = \varphi(f) + \varphi(g) \end{cases}$$

مثال) T_A^* را در مورد $A = \begin{bmatrix} i & 2 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ بیابید.

$$\begin{cases} T_A : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^3 \\ (x,y) \longmapsto (ix+2y, -y, 0) \qquad \begin{bmatrix} i & 2 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \end{cases}$$

باید T_A^* عملگر زیر شود:

$$\begin{cases} T_A^* : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2 \\ (x,y,z) \longmapsto (-ix, 2x-y) \qquad \begin{bmatrix} -i & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \end{cases}$$

بدون راحتی قرار می‌دهیم T_A را با T نشان می‌دهیم:

$$\{f_1,f_2\} \to T: \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^3 \leftarrow \{e_1,e_2,e_3\}$$ پایه استاندارد

پایه متعارف

$$T(x_1,x_2) = (ix_1+2x_2, -x_3, 0)$$

T^* در شرط $\langle T(x_1,x_2),(y_1,y_2,y_3)\rangle = \langle (x_1,x_2), T^*(y_1,y_2,y_3)\rangle$ صدق می‌کند. توجه کنید که

$$T^*(y_1,y_2,y_3) = T^*\left(\sum_{i=1}^{3} y_j e_j\right) = \sum_{i=1}^{3} y_j T^* e_j.$$

پس کافی $T^*(e_j)$ را بیابیم. $i=1,2,3$

$$T^*e_1 \in \mathbb{C}^2 \Rightarrow T^*e_1 = \sum_{i=1}^{2}\lambda_i f_i = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = -if_1 + 2f_2$$

$$\langle T^*e_1, f_2\rangle = \langle \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2, f_2\rangle$$

$$\langle e_1, Tf_2\rangle = \langle (1,0,0),(2,-1,0)\rangle = 2, \qquad \lambda_1\underbrace{\langle f_1,f_2\rangle}_{0} + \lambda_2\underbrace{\langle f_2,f_2\rangle}_{1} = \lambda_2$$

$$\langle T^*e_1, f_1\rangle = \langle \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2, f_1\rangle = \lambda_1$$

$$\langle e_1, Tf_1\rangle = \langle (1,0,0),(i,0,0)\rangle = -i$$

به طریق مشابه $T^*e_2 = 0f_1 - f_2$ و $T^*e_3 = 0f_1 + 0f_2$.

این که ماتریس نظیر T_A^* عبارت است از

$$\begin{bmatrix} -i & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_A^*e_1 & T_A^*e_2 & T_A^*e_3 \end{bmatrix}$$

$$\| $$

$$[\bar{a}_{ji}] = A^* \rightarrow \text{ترانهاده مزدوج } A = [a_{ij}]$$

تمرین: الحاق $T:\ell^2 \longrightarrow \ell^2$ با ضابطهٔ $T(x_1,x_2,\dots)=(0,x_1,x_2,\dots)$ را بیابید.

حل:

$$T^*(y_1,y_2,\dots)=T^*\Big(\sum_{j=1}^{\infty} y_j e_j\Big)=T^*\Big(\lim_n \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\Big)=\lim_n T^*\Big(\sum_{j=1}^{n} y_j e_j\Big)$$

پیوستگی T^*

$$=\lim_n \sum_{j=1}^{n} y_j T^*e_j=\sum_{n=1}^{\infty} y_n T^*e_n \quad (1)$$

پس کافی است T^*e_n ($n=1,2,\dots$) را بیابیم:

$$T^*e_n=\sum_{m=1}^{\infty}\lambda_m e_m \Longrightarrow \forall j:\ \langle T^*e_n,e_j\rangle=\Big\langle \sum_{m=1}^{\infty}\lambda_m e_m, e_j\Big\rangle=\sum_{m=1}^{\infty}\lambda_m \underbrace{\langle e_m,e_j\rangle}_{\delta_{mj}}=\lambda_j$$

کافی است λ_m را بیابیم

دلتای کرونکر

$$\langle T^*e_n,e_j\rangle=\langle \underbrace{e_n}_{(0,0,\dots,0,\underset{n}{1},0,\dots)},\underbrace{Te_j}_{(0,0,\dots,0,\underset{j+1}{1},0,\dots)}\rangle=\begin{cases}1 & j=n-1\\ 0 & j\neq n-1\end{cases}$$

$$=(\underbrace{0,0,\dots,0,1}_{n-1},0,\dots) \quad (2) \qquad =e_{n-1}$$

$$(1),(2)\Rightarrow T^*(y_1,y_2,\dots)=y_1T^*e_1+y_2T^*e_2+\dots=y_1\,0+y_2e_1+\dots=(y_2,y_3,\dots)$$

ماتریس نظیر T عبارت است از

$$\begin{array}{cc} & \text{ستون اول} \quad \text{ستون دوم} \\ \begin{bmatrix}0&0&0&\\1&0&0&\\0&1&0&\ddots\\0&0&1&\\\vdots&\vdots&\vdots&\end{bmatrix} & =\begin{bmatrix}Te_1 & Te_2 & \cdots\end{bmatrix}\end{array}$$

زیر قطر اصلی

مزدوج ترانهاده همدیگر

ماتریس نظیر T^* عبارت است از

$$\begin{bmatrix}0&1&0&\\0&0&1&\\0&0&0&\ddots\\\vdots&\vdots&\vdots&\end{bmatrix}$$

تمرین. $\ker(T^*)=(\operatorname{ran}T)^{\perp}$ که در آن $T\in B(H)$.

حل: $x\in\ker T^* \Rightarrow \underbrace{\forall z\in\operatorname{ran}T}_{z=Ty,\ \exists y\in H}\ ;\ \langle z,x\rangle=\langle Ty,x\rangle=\langle y,\underbrace{T^*x}_{0}\rangle=0$

$\Rightarrow x\in(\operatorname{ran}T)^{\perp}$

بالعکس: $x\in(\operatorname{ran}T)^{\perp}\Rightarrow \langle T^*x,y\rangle=\langle x,\underbrace{Ty}_{\in\operatorname{ran}T}\rangle=0 \qquad \forall y\in H$

$y=T^*x$

$\Rightarrow \langle T^*x,T^*x\rangle=0\Rightarrow T^*x=0\Rightarrow x\in\ker T^*$

تمرین. $\overline{\operatorname{ran}T^*}=(\ker T)^{\perp}$

$(\operatorname{ran}T)^{\perp}\overset{\text{تمرین قبل}}{=}\ker T^*\Rightarrow(\overline{\operatorname{ran}T})^{\perp\perp}=(\ker T^*)^{\perp}$

$\| \qquad\qquad \|$

$(\overline{\operatorname{ran}T})^{\perp} \qquad \overline{\operatorname{ran}T}$ ($\overline{\operatorname{ran}T}$ زیرفضای بسته)

با تعویض نقش T با T^* داریم $\overline{\operatorname{ran}T^*}=(\ker T)^{\perp}$

انواع عملگرها

اعداد	عملگرها
$\mathbb{C}$	$B(H)$
$\mathbb{R}=\{z\in\mathbb{C}\mid z=\bar z\}$	$T=T^*$ خودالحاق
$\{z\in\mathbb{C}\mid \lvert z\rvert=1\}$, $z\bar z=1$; $z=a+ib$, $\lvert z\rvert=\sqrt{a^2+b^2}$	$UU^*=U^*U=I$ یکانی (عملگرهای)
$z\bar z=\bar z z$	$TT^*=T^*T$ نرمال

نکته. هر فضای هیلبرت با بعد متناهی یکریخت با $\mathbb{C}^n$ است:

$$\langle (z_1,\dots,z_n),(w_1,\dots,w_n)\rangle = \sum_{i=1}^{n} z_i \overline{w_i}$$

تعریف. عملگر $T: H \to H$ را فشرده می‌گویند هرگاه $\overline{T(A)}$ فشرده باشد به ازای هر مجموعه کراندار A در H.

قضیه. عملگر $T: H \to H$ فشرده است اگر و فقط اگر به ازای هر دنباله کراندار $\{x_n\}$ در H، دنباله $\{Tx_n\}$ دارای زیردنباله همگرا باشد.

برهان. ($\Leftarrow$). چون $\{x_n\}$ کراندار است پس $\underbrace{\exists M\, \forall n;\ \|x_n\| \le M}_{x_n \in B_M(0)}$. بنا به فرض فشردگی T، چون $B_M(0)$ کراندار است، $\overline{T(B_M(0))}$ فشرده است. بنا به قضیه «هر دنباله در یک فضای متریک فشرده دارای زیردنباله همگرا است»، $\{T(x_n)\}$ دارای زیردنباله همگرا است.

($\Rightarrow$) یک مجموعه کراندار A در نظر می‌گیریم. پس

$$\exists M\, \forall x \in A;\ \|x\| \le M$$

باید نشان دهیم $\overline{TA}$ فشرده است. اما فشردگی معادل این است که هر دنباله، زیردنباله همگرا داشته باشد. گیریم $\{y_n\}$ دنباله‌ای در $\overline{TA}$ باشد:

تاریخ آنالیز تابعی به سال ۱۹۰۰ برمی‌گردد.

معادله انتگرالی Fredholm:

$$f(x) = \underbrace{\int_a^b k(x,t) f(t)\, dt}_{(Tf)(x)} + g(x)$$

که در آن g و k معلوم‌اند و f مجهول است.

پس $If = Tf + g$ (عملگر همانی)

$$\underbrace{(I - T)}_{A} f = g$$

که منجر به معادله $Af = g$ می‌شود.

ما تنها معادله $AX = Y$ را بررسی می‌کنیم

$y_n \in \overline{TA} \Rightarrow \forall n\ \exists Tx_n \in TA;\ \|Tx_n - y_n\| < \frac{1}{n}$ (1)

$x_n \in A$

چون A کراندار است پس $\{x_n\}$ هم کراندار است. لذا بنا به فرض مسئله، $\{Tx_n\}$ دارای زیردنباله (نقطه چسبندگی)

همگرایی مانند $\{Tx_{n_k}\}$ (2) است (مثلاً z). نشان می‌دهیم $y_{n_k} \longrightarrow z$ و در نتیجه ... می‌شود:

گیریم $\varepsilon > 0$ داده شده باشد. پس $\exists N_1 \forall n \geq N_1;\ \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$ (زیرا $\lim \frac{1}{n} = 0$). بنا به (2)،

$$\exists N_2\ \forall n_k > N_2;\ \|Tx_{n_k} - z\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (3)$$

$$\forall n \geq \max\{N_1, N_2\};\ \|y_{n_k} - z\| \leq \|y_{n_k} - Tx_{n_k}\| + \|Tx_{n_k} - z\| \underset{(3)}{\overset{(1)}{<}} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$ پس

نظریهٔ اندازه ≡

تعریف. یک σ-جبر روی مجموعهٔ X زیرمجموعه‌ای از $P(X)$ (مجموعه‌ای از زیرمجموعه‌های X) است مانند Σ که

(1) $\emptyset \in \Sigma$ (2) $A \in \Sigma \Rightarrow A^c = X - A \in \Sigma$ (3) $A_1, A_2, \cdots \in \Sigma \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$

تمرین. (1), (2) $\Rightarrow X \in \Sigma$

$$A_1, \cdots \in \Sigma \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \Big(\underbrace{\bigcup_n A_n^c}_{\in\Sigma}\Big)^c \in \Sigma$$

$$A_1, \cdots, A_n \in \Sigma \Rightarrow A_1, A_2, \cdots, A_n, \emptyset, \emptyset, \cdots \in \Sigma \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{n} A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma.$$

مثال. اشتراک تمام σ-جبرهای شامل یک گردایهٔ ℰ روی X را σ-جبر تولید شده توسط ℰ می‌گویند و آن را ... σ-جبر مجموعه‌ها را بورل می‌گویند.

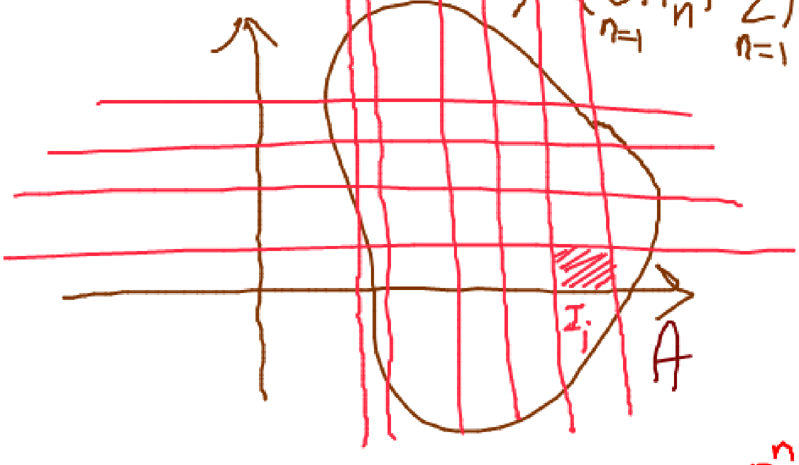
به (X,Σ) فضای اندازه‌پذیر می‌گویند. یک تابع $f:\underbrace{(X,\Sigma)}_{\text{فضای اندازه‌پذیر}}\to\underbrace{(Y,\tau)}_{\text{فضای توپولوژیک}}$ را اندازه‌پذیر می‌گویند

هرگاه به ازای هر مجموعه باز $G\in\tau$ داشته باشیم $\underbrace{f^{-1}(G)}_{\text{اندازه‌پذیر}}\in\Sigma$.

تعریف. اگر (X,Σ) فضای اندازه‌پذیر باشد، تابع

$$\Sigma\ \begin{cases}\mu:\Sigma\to[0,\infty]\\ A\mapsto\mu(A)\end{cases}$$

را یک اندازه می‌گوییم هرگاه $\mu(\emptyset)=0$ (1)، $\mu\left(\dot{\bigcup_{n=1}^{\infty}}A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)$ (2).



مثال) اندازه لبگ Lebesgue

مجموعه $A\subseteq\mathbb{R}^n$ را اندازه‌پذیر لبگ می‌گویند هرگاه $m^*(A)=m_*(A)$.

$$m_*(A)=\sup_{\bigcup I_i\subseteq A}\sum vol(I_i)$$

$$m^*(A)=\inf_{\bigcup I_i\supseteq A}\sum vol\, I_i$$

گردایه مجموعه‌های اندازه‌پذیر لبگ در $\mathbb{R}^n$ یک σ-جبر است، تابع

$$\Sigma\ \begin{cases}m:\Sigma\to[0,\infty]\\ A\mapsto m(A)=m_*(A)=m^*(A)\end{cases}$$

را اندازه لبگ می‌گویند.

آیا هر مجموعه را اندازه‌پذیر لبگ است؟ خیر

مثال) $\mu:2^X\to[0,\infty]$ یک اندازه است.

$$\mu(A)=\begin{cases}Card(A) & \text{متناهی } A\\ \infty & \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$

تمرین: فرض کنیم $(X, \mathcal{M}, \mu)$ یک فضای اندازه باشد.

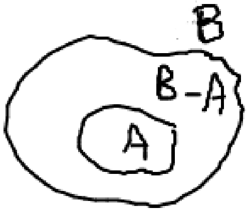
مجموعه مرجع   σ-جبر   اندازه

(تعمیم طول، سطح و حجم)

الف)

$$A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$$

حل.



$$A \subseteq B \Rightarrow B = A \,\dot{\cup}\, (B-A) \Rightarrow \mu(B) \overset{\text{جمع‌پذیری اندازه}}{=} \mu(A) + \underbrace{\mu(B-A)}_{\geq 0}$$

جمع‌پذیری اندازه روی مجموعه‌های از هم جدا

زیرا $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$

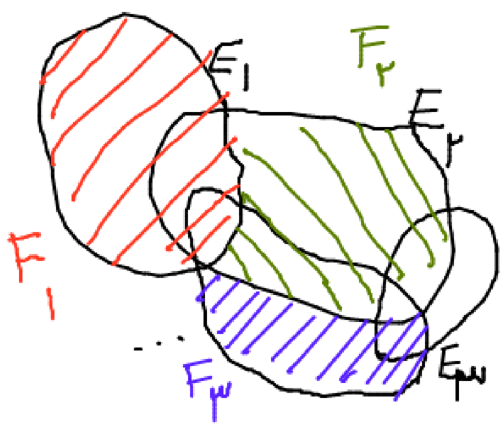
تذکر. اگر $\mu(A) < \infty$، آنگاه

$$\mu(B-A) = \mu(B) - \mu(A) \quad (1)$$

$$\Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$$

ب)

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j)$$



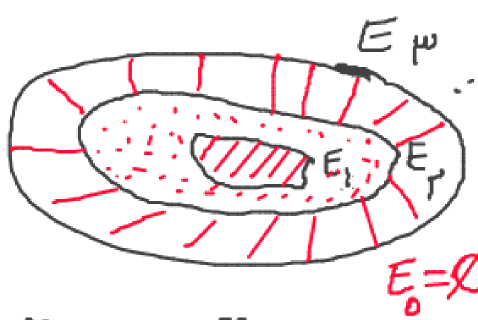
حل. قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} F_1 = E_1 \\ F_k = E_k - \bigcup_{j=1}^{k-1} E_j, & k \geq 2 \end{cases}$$

در این صورت $\dot{\bigcup}_{k=1}^{\infty} F_k = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ پس

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \mu\left(\dot{\bigcup}_{k=1}^{\infty} F_k\right) \overset{\text{جمع‌پذیری اندازه}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(F_k) \overset{\text{(الف)}}{\leq} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k).$$

$$F_k \subseteq E_k$$



ج) اگر $\mu(X) < \infty$ (اندازه متناهی)، $\forall k \geq 1,\ E_k \subseteq E_{k+1}$ آنگاه

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \lim_{k \to \infty} \mu(E_k)$$

حل.

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \mu\left(\dot{\bigcup}_{k=1}^{\infty}(E_k - E_{k-1})\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k - E_{k-1}) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(E_k - E_{k-1}) \overset{(1)}{=} \lim_{n \to \infty} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} (\mu(E_k) - \mu(E_{k-1}))}_{\mu(E_n) - \mu(E_0)}$$

$$E_k \subseteq X \Rightarrow \mu(E_k) \leq \mu(X) < \infty$$

ج) اگر $\mu(X)<\infty$ ، $E_1 \supseteq E_2 \supseteq E_3 \supseteq \cdots$ آنگاه

$$\mu\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n)$$

$$\mu\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\Big) = \mu\Big(X - \bigcup_{k=1}^{\infty}(X-E_k)\Big) = \mu(X) - \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty}(X-E_k)\Big)$$

دمورگان

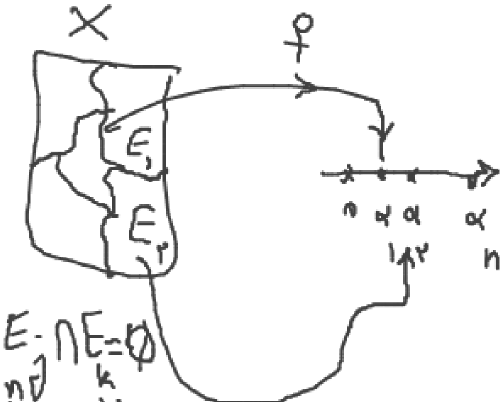
$$\Big(\bigcap E_k\Big)^{cc} = \Big(\bigcup E_k^c\Big)^c$$

(ج) $X-E_1 \subseteq X-E_2 \subseteq \cdots$

$$= \mu(X) - \lim_{n\to\infty} \underbrace{\mu(X-E_n)}_{\mu(X)-\mu(E_n)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \mu(E_n). \ \square$$

می‌توان نشان داد که مجموعه توابع اندازه‌پذیر $f:\mathfrak{M}\to[0,\infty]$ یک فضای برداری تحت اعمال نقطه‌وار است:



$E_j \cap E_k = \emptyset$

$\bigcup_{j=1}^{n} E_j = X \quad E_j := f^{-1}(\{\alpha_j\})$

<u>تابع ساده</u>، تابعی است که برد s متناهی باشد. مثلاً

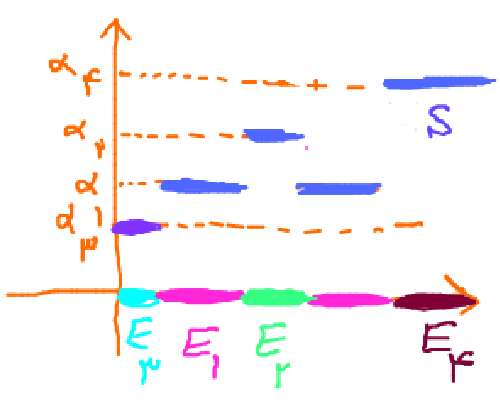
$ran(s)=\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ ، پس

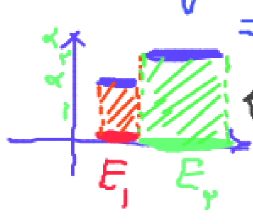
$$s(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{E_j}(x)$$

$x\in X \Rightarrow \exists j_0;\ x\in E_{j_0} \Rightarrow x\notin E_j \ \forall j\neq j_0 \Rightarrow$

$$\sum \alpha_j \chi_{E_j}(x) = \alpha_1\chi_{E_1}(x)+\cdots+\alpha_n\chi_{E_n}(x) = \alpha_{j_0}\cancel{\chi_{E_{j_0}}(x)}^{1}$$

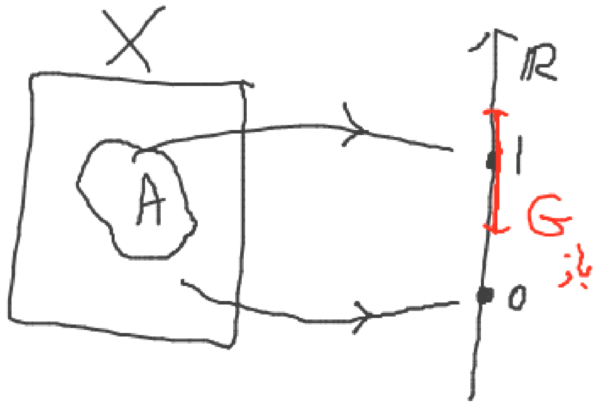
$$= \alpha_{j_0} = s(x).$$





$$\int_X s\,d\mu := \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu(E_j)$$ (آنگاه

تمرین. $\underbrace{A \in \mathcal{M}}_{\text{A اندازه‌پذیر است}}$ اگر و فقط اگر χ_A اندازه‌پذیر باشد.



حل. $(\Leftarrow)$

$$\chi_A^{-1}(G) = \begin{cases} A \in \mathcal{M} & 0 \notin G,\ 1 \in G \\ A^c \in \mathcal{M} & 0 \in G,\ 1 \notin G \\ X \in \mathcal{M} & 1 \in G,\ 0 \in G \\ \emptyset \in \mathcal{M} & 1 \notin G,\ 0 \notin G \end{cases} \in \mathcal{M}$$

$(\Rightarrow)$ گیریم χ_A اندازه‌پذیر باشد. پس $A = \chi_A^{-1}\big(\underbrace{(\tfrac{1}{2}, \infty)}_{\text{باز}}\big) \in \mathcal{M}$. $\square$

نتیجه: تابع ساده $\underset{\sum a_j \chi_{E_j}}{\overset{\|}{s}}$ اندازه‌پذیر است اگر و فقط اگر همه E_jها اندازه‌پذیر باشند.

تعریف: برای تابع اندازه‌پذیر $f: X \to [0,\infty]$:

$$\int_X f\, d\mu := \sup_{\substack{0 \le s \le f \\ s \text{ اندازه‌پذیر}}} \int_X s\, d\mu$$

" " " $f: X \to \mathbb{R}$

(هر تابع حقیقی مقدار، تفاضل دو تابع نامنفی)

که: $f = f_+ - f_- = \frac{|f|+f}{2} - \frac{|f|-f}{2}$

$$\int_X f\, d\mu := \int_X f_+\, d\mu - \int_X f_-\, d\mu$$

مشروط به این که هر دو انتگرال سمت راست بی‌نهایت نباشد.

هر تابع مختلط $f: X \to \mathbb{C}$ به صورت $f = u + iv$ است.

$$\int_X f\, d\mu = \int_X u\, d\mu + i \int_X v\, d\mu$$

مثال) $\mathcal{A}=C([a,b])=\{f:[a,b]\to\mathbb{C} \mid f \text{ پیوسته است}\}$

$$(\lambda f \,\dot{+}\, g)(x)=\lambda f(x) \,\dot{+}\, g(x)$$

$(\mathcal{A},+,\underset{\text{اسکالر}}{\cdot})$ فضای برداری است و $(\mathcal{A},+,\bullet)$ یک حلقه است و نیز

$$(\lambda f)\cdot g=f\cdot(\lambda g)=\lambda(f\cdot g)$$

در این صورت $(\mathcal{A},+,\underset{\text{اسکالر}}{\cdot},\bullet)$ یک جبر (Algebra) نامیده می‌شود.

اگر روی $\mathcal{A}$ یک نرم داشته باشیم مثلاً $\|f\|=\sup_{x\in[a,b]}|f(x)|$ آنگاه $\mathcal{A}$ را یک جبر نرم‌دار می‌گویند.

اگر این نرم کامل باشد $\mathcal{A}$ را جبر باناخ می‌نامند.

روی $\mathcal{A}=C[a,b]$ تابع برگشت و ضابطه را با خواهیم زد: $\mathcal{A}\to\mathcal{A}$, $f\mapsto\bar f$; $\bar f(x)=\overline{f(x)}$

$$\bar{\bar f}=f,\quad \overline{\lambda f+g}=\bar\lambda\bar f+\bar g,\quad \overline{fg}=\bar g\,\bar f$$

$$\|\bar f\cdot f\|=\sup_x|\bar f(x)f(x)|=\sup_x\left||f(x)|^2\right|=\left(\sup_x|f(x)|\right)^2=\|f\|^2$$

این $\mathcal{A}$ را (الف) یک C^*-جبر می‌گویند که در آن نقش برگشت را تابع مزدوج بازی می‌کند.

مثال دیگر از یک C^*-جبر، فضای $B(H)$ خودمان است:
$$B(H)=\{T:H\to H \mid T \text{ خطی و کراندار است}\}$$

$$(\lambda T+S)(x)=\lambda Tx+Sx$$
$$(T.S)(x)=T(Sx)$$

$T\mapsto T^*;\ \langle Tx,y\rangle=\langle x,T^*y\rangle,\ \forall x,y\in H$ به علاوه یک برگشت است

$$T^{**}=T,\ (\lambda T+S)^*=\bar\lambda T^*+S^*,\ (ST)^*=T^*S^*\ \text{involution}$$

و اگر $\|T\|=\sup_{x\neq0}\frac{\|Tx\|}{\|x\|}$ نرم عملگر، آنگاه $(B(H),+,\underset{\text{اسکالر}}{\cdot},\bullet,\|\cdot\|)$ یک C^*-جبر است زیرا

$$\boxed{\|T^*T\|=\|T\|^2}\ .\ \square$$

خرداد ۱۳۹۶

دانشگاه فردوسی مشهد

محمد صال مصلحیان