فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
سال ۳۶، شمارهٔ ۶۱ (پاییز و زمستان ۱۳۹۶) صص. ۹۹ تا ۱۱۵

بازنگاهی به نامساوی کوشی-شوارتس

محمد صال‌مصلحیان و فاطمه عبدالله‌زاده گنابادی

چکیده

در این مقاله به بررسی نامساوی کوشی-شوارتس، تاریخچه و برخی کاربردهای آن می‌پردازیم و چند اثبات مختلف برای آن ارائه می‌کنیم. همچنین معکوس‌های جمعی و ضربی آن را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

۱. سرآغاز

یکی از نامساوی‌های مهم و پرکاربرد در ریاضیات، نامساوی کوشی-شوارتس است که به نام‌های «نامساوی کوشی»، «نامساوی شوارتس»، «نامساوی کوشی-بونیاکوفسکی-شوارتس» و نامساوی لاگرانژ [۱۱] نیز مشهور است. علت این نامگذاری‌ها، شیوه‌های گوناگون گسترش یافتنِ این نامساوی به فضاهای مختلف است. این نامساوی چنان در ساختارهای متعدد آنالیز ریاضی و علوم دیگر همچون فیزیک، نظریهٔ احتمال و حتی نظریهٔ اعداد رسوخ کرده است و چنان به پیشروی خود در زمینه‌های مختلف ادامه می‌دهد که به‌راستی شایسته است آن را گنجی در عالم ریاضیات بنامیم. اجازه دهید در ابتدا نگاهی مختصر بیندازیم به زندگی‌نامهٔ سه ریاضیدان بزرگی که نام آنها با این نامساوی گره خورده است.

۲. زندگی‌نامهٔ سه ریاضیدان

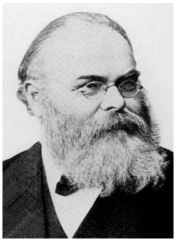
اوگوستَن لوئی کوشی[۱] در سال ۱۷۸۹ در پاریس به دنیا آمد. پدرش افسر ارشد پلیس بود که تحت تأثیر انقلاب کبیر فرانسه، شغل خود را از دست داد و خانوادهٔ او مجبور شد به مدت چندین سال فرانسه را

عبارات و کلمات کلیدی. نامساوی کوشی-شوارتس؛ فضای نرمدار؛ فضای ضرب داخلی.

[۱] Augustin-Louis Cauchy

ترک کند. پس از بازگشت به فرانسه، ابتدا تحصیلات خود را در زمینهٔ مهندسیِ شهرسازی به انجام رسانید و پس از آن در همین زمینه مشغول به کار شد. پس از چند سال، به ریاضیات محض روی آورد و در کنار شغلش، به پژوهش در ریاضیات پرداخت. پیشرفت وی در ریاضیات بسیار سریع و چشمگیر بود. نبوغ او در حل مسائل اساسی ریاضی همچون مسئلهٔ آپولونیوس (پیدا کردن دایره‌ای که بر سه دایرهٔ داده‌شده مماس باشد) [۱۴] و تعمیم فرمول اویلر (رابطهٔ بین تعداد وجه‌ها، یال‌ها و رأس‌های یک چندوجهی) برای چندوجهی‌های از مرتبه‌های بالاتر، آشکار شد. بعد از آن تعمیم مفهوم همگرایی، فرمول انتگرال کوشی برای یک تابع تحلیلی و ... ایده‌ها و قضایای اساسی بودند که کوشی آنها را معرفی کرد. کوشی در زمینه‌های گوناگون همچون نظریهٔ اعداد، آنالیز مختلط، معادلات دیفرانسیل، فیزیک ریاضیاتی و ... به مطالعه پرداخت. قضیه‌ها و مفاهیم منسوب به او، بسیار بیشتر از سایر ریاضیدانان است. او همچنین نویسنده‌ای قهار بود. حدود هشتصد مقالهٔ علمی و پنج کتاب درسی که از او به ثبت رسیده است، گواه این مدعا است. در واقع کوشی از نظر حجم آثار، دومین نفر پس از اویلر در دنیای ریاضیات است. کوشی در ۲۳ ماه می سال ۱۸۵۷ در فرانسه درگذشت. کوشی یکی از ۷۲ فرانسوی برجسته‌ای است که نام آنها بر برج ایفل ثبت شده است.


اوگوستَن لوئی کوشی


هرمان آماندوس شوارتس


ویکتور بونیاکوفسکی

ویکتور بونیاکوفسکی[۱] که یکی از ریاضیدانان برجسته در قرن نوزدهم به‌شمار می‌رود، در ۱۶ دسامبر سال ۱۸۰۴ میلادی در روسیه متولد شد و در کودکی نزد دوستان پدر خود، تحصیلات ابتدایی را آموخت. پس از آن به سوربن فرانسه رفت. در آنجا فرصت آشنایی و همراهی با افرادی همچون لاپلاس، فوریه و پواسن را پیدا کرد و بیشترِ وقت خود را به مطالعه و پژوهش گذراند. دورهٔ دکتری خود را با راهنمایی کوشی به انجام رسانید و در سه زمینهٔ مختلف در مکانیک و فیزیک ریاضیاتی رسالهٔ خود را ارائه داد. سپس به روسیه بازگشت و تا سال ۱۸۸۰ در دانشگاه سن‌پترزبورگ به تدریس در زمینه‌های مختلف ریاضیات و فیزیک پرداخت. بونیاکوفسکی همچنین سهمی قابل‌توجه در گسترش نظریهٔ اعداد و نظریهٔ احتمال داشته و بیشترِ شهرت وی به‌سبب پژوهش‌هایش در این زمینه است. او به مدت ۲۵ سال نایب رئیس دانشگاه سن‌پترزبورگ بود و در سال ۱۸۷۵، این دانشگاه به‌پاسِ تلاش‌های علمی‌اش، جایزه‌ای به نام او تأسیس کرد. بونیاکوفسکی در ماه دسامبر سال ۱۸۸۹ درگذشت.

[۱] Viktor Bunyakovsky

کارل هرمان آماندوس شوارتس[۱] در ۲۵ ژانویهٔ سال ۱۸۴۳ در لهستان کنونی و در دورهٔ ریاضیدانانی همچون کومر[۲]، وایرشتراس[۳] و کرونکر[۴] متولد شد. او ابتدا به تحصیل شیمی مشغول شد اما تحت تأثیر وایرشتراس، به ریاضیات و به‌ویژه هندسه روی آورد. این دو در جایگاه استاد و شاگرد، پژوهش‌های مشترک فراوانی با یکدیگر انجام دادند و شوارتس به‌سبب پژوهش در زمینهٔ آنالیز مختلط و هندسهٔ دیفرانسیل، شهرت پیدا کرد. شوارتس در حالی که دستاوردهای زیادی در ریاضیات ارائه کرد، شخصیتی متفاوت در خارج از دنیای ریاضیات داشت. مثلاً سرگروه تیم آتش‌نشانان داوطلب و همچنین رئیس ایستگاه راه‌آهن بود. کارهای او به‌ویژه در زمینهٔ قضیهٔ نگاشت ریمان، تبدیل شوارتس-کریستوفل و حل نخستین مسئلهٔ مقدار مرزی برای دایره است. از معروف‌ترین شاگردان او می‌توان به فِیِر[۵] و تسرملو[۶] اشاره کرد. هرمان شوارتس در ۳۰ ماه نوامبر سال ۱۹۲۱ در برلین چشم از جهان فروبست.

۳. چگونگی پیدایش نامساوی کوشی-شوارتس

اولین بار در سال ۱۸۲۱، کوشی نامساوی زیر را به‌دست آورد:

$$\Big|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\Big| \leq \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\Big)^{\frac{1}{2}} \qquad (a_i, b_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n). \tag{۱.۳}$$

۳۸ سال بعد، بونیاکوفسکی در رسالهٔ خود نامساوی (۱.۳) را به مجموع‌های نامتناهی گسترش داد و آن را برای توابع مربع-انتگرال‌پذیر بر بازهٔ $[a,b]$ نیز ثابت کرد: به‌ازای هر $f, g \in \mathcal{L}^2([a,b], \lambda)$

$$\Big|\int_a^b f\bar{g}d\lambda\Big|^2 \leq \Big(\int_a^b |f|^2 d\lambda\Big)\Big(\int_a^b |g|^2 d\lambda\Big). \tag{۲.۳}$$

تعمیم نامساوی کوشی-شوارتس برای انتگرال‌ها منجر به نامساوی هُلدر می‌شود: فرض کنیم $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ یک فضای اندازه باشد و $p > 1$. اگر $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$، $f \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mu)$ و $g \in \mathcal{L}^q(\Omega, \mu)$، آن‌گاه $f\bar{g} \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mu)$ و داریم

$$\Big|\int_\Omega f\bar{g}d\mu\Big| \leq \Big(\int_\Omega |f|^p d\mu\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\int_\Omega |g|^q d\mu\Big)^{\frac{1}{q}}.$$

در سال ۱۸۸۸، شوارتس هنگام مطالعهٔ رویه‌های مینیمال، صورت انتگرالی (۲.۳) را که پیش از آن توسط بونیاکوفسکی اثبات شده بود، به‌دست آورد. شوارتس از اثبات این نامساوی توسط بونیاکوفسکی اطلاع نداشت. تفاوت اصلی برهان این دو، در فرآیند حدگیری آنها بود که در این مورد، روش شوارتس برتری

[۱] Karl Hermann Amandus Schwarz [۲] Ernst Eduard Kummer [۳] Karl Theodor Wilhelm Weierstrass
[۴] Leopold Kronecker [۵] Lipót Fejér [۶] Ernst Zermelo

داشت و به همین سبب، اثبات او قابل گسترش به فضاهای ضرب داخلی بود. شناخته‌شده‌ترین شکل نامساوی کوشی–شوارتس، در یک فضای ضرب داخلی $(X, \langle .,. \rangle)$ است که به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\| \qquad (x, y \in X). \tag{۳.۳}$$

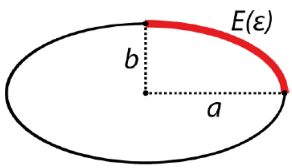
در اینجا $\|x\| := \langle x, x\rangle^{\frac{۱}{۲}}$ نرم ناشی از ضرب داخلی روی X است. تساوی در (۳.۳) برقرار است اگر و تنها اگر دو بردار x و y وابستهٔ خطی باشند. پس بنابر آنچه گفته شد، شایسته است رابطهٔ (۳.۳) را «نامساوی کوشی–شوارتس» بنامیم. برهانی کوتاه از این نامساوی در فضاهای ضرب داخلی حقیقی چنین است: اگر X یک فضای ضرب داخلی روی $\mathbb{R}$ باشد، بدون کم شدن از کلیّت، می‌توانیم فرض کنیم $\|x\| = \|y\| = ۱$ (در غیر این صورت کافی است قضیه را برای بردارهای $x' = \frac{x}{\|x\|}$ و $y' = \frac{y}{\|y\|}$ به‌کار ببریم). برای هر $x, y \in X$ داریم

$$\circ \leq \langle x-y, x-y\rangle = \|x\|^{۲} - ۲\langle x, y\rangle + \|y\|^{۲}.$$

در نتیجه $\langle x, y\rangle \leq ۱ = \|x\|\,\|y\|$ که همان (۳.۳) است.

۴. کاربردها

نامساوی کوشی–شوارتس ابزار بسیار کارآمدی در شاخه‌های مختلف ریاضی و فیزیک است و به‌ویژه در شمار زیادی از قضیه‌های آنالیز ریاضی ردپایی از این رابطه به چشم می‌خورد. در ابتدای این بخش، کاربردی از نامساوی کوشی–شوارتس را در هندسه بیان می‌کنیم [۱۲]. فرض کنیم یک بیضی داریم که a و b به‌ترتیب نصف قطر بزرگ و نصف قطر کوچک آن است. در این صورت یک‌چهارم محیط بیضی



عبارت است از

$$E(\varepsilon) = \int_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}} \sqrt{۱ - \varepsilon^{۲}\sin^{۲}\theta}\, d\theta$$

که در آن، $\varepsilon = \sqrt{۱ - \frac{b^{۲}}{a^{۲}}}$. در نتیجه محیط بیضی برابر با $۴E(\varepsilon)$ است. در حالت کلی محاسبه انتگرال بالا کار ساده‌ای نیست. لذا یافتن کران بالایی برای محیط بیضی سودمند خواهد بود. اگر در نامساوی

کوشی-شوارتس برای انتگرال‌ها قرار دهیم $f(\theta)=۱$ و $g(\theta)=\sqrt{۱-\varepsilon^۲\sin^۲\theta}$، به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\sqrt{۱-\varepsilon^۲\sin^۲\theta}d\theta &\leq \sqrt{\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}۱^۲d\theta}\sqrt{\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}(۱-\varepsilon^۲\sin^۲\theta)d\theta}\\ &=\sqrt{\frac{\pi}{۲}}\sqrt{\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\Big(۱-\varepsilon^۲\frac{۱-\cos ۲\theta}{۲}\Big)d\theta}\\ &=\sqrt{\frac{\pi}{۲}}\sqrt{\Big[\theta-\varepsilon^۲\Big(\frac{\theta}{۲}-\frac{\sin ۲\theta}{۴}\Big)\Big]_۰^{\frac{\pi}{۲}}}\\ &=\sqrt{\frac{\pi}{۲}}\sqrt{\Big(\frac{\pi}{۲}-\frac{\varepsilon^۲\pi}{۴}\Big)}=\frac{\pi}{۲}\sqrt{۱-\frac{\varepsilon^۲}{۲}}.\end{aligned}$$

بنابراین $۲\pi\sqrt{۱-\frac{\varepsilon^۲}{۲}}$ یک کران بالایی برای محیط بیضی است. از دیگر کاربردهای مهم این نامساوی می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

- **در آنالیز کلاسیک**: اثبات نامساوی مثلثی در فضای ضرب داخلی برای نرم ناشی از ضرب داخلی:

$$\begin{aligned}\|x+y\|^۲=\langle x+y,x+y\rangle &= \|x\|^۲+۲\mathrm{Re}\,\langle x,y\rangle+\|y\|^۲\\ &\leq \|x\|^۲+۲|\,\langle x,y\rangle\,|+\|y\|^۲\\ &\leq \|x\|^۲+۲\|x\|\|y\|+\|y\|^۲\\ &=(\|x\|+\|y\|)^۲.\end{aligned}$$

اثبات نامساوی بِسِل که بیان می‌کند برای هر مجموعهٔ متعامدیکه مانند $\{u_\alpha\}_{\alpha\in I}$ در فضای هیلبرت H و هر $x\in H$ داریم

$$\sum_{\alpha\in I}|\,\langle x,u_\alpha\rangle\,|^۲\leq\|x\|^۲.$$

تعمیم مفهوم زاویه از صفحهٔ اقلیدسی $\mathbb{R}^۲$ به فضای ضرب داخلی دلخواه بر اساس رابطهٔ

$$\theta_{x,y}:=\cos^{-۱}\frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\,\|y\|}\qquad(x,y\neq ۰).$$

توجه کنید که نامساوی کوشی-شوارتس تضمین می‌کند که مقدار کسر $\frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\,\|y\|}$ همواره در بازهٔ $[-۱,۱]$ قرار دارد و در نتیجه تابع $\cos^{-۱}$ روی آن تعریف‌شدنی است.

- **در حسابان چندمتغیره**: با استفاده از نامساوی کوشی-شوارتس برای تابع چندمتغیرهٔ $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ رابطهٔ $|D_u(f)|\leq\|\bigtriangledown f\|\,\|u\|$ را به‌دست می‌آوریم که در آن، $D_u(f)$ مشتق سویی تابع f در جهت

بردار u و ∇f بردار گرادیان f است.

• **در نظریهٔ احتمال:** فرض کنیم $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ یک فضای احتمال باشد. نامساوی واریانس–کوواریانس که برای دو متغیر تصادفی X و Y در فضای $\mathcal{L}^{۲}(\Omega, P)$ به‌صورت

$$\mathrm{Cov}(X,Y) \leq \mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)$$

بیان می‌شود، نتیجه‌ای از نامساوی کوشی–شوارتس است. در واقع $\langle X,Y \rangle = \mathrm{Cov}(X,Y)$ یک ضرب داخلی روی مجموعهٔ متغیرهای تصادفی مربع–انتگرال‌پذیر به‌دست می‌دهد و نرم ناشی از آن عبارت است از $\|X\| = \mathrm{Var}(X)$.

• **در فیزیک:** اصل عدم قطعیت هایزنبرگ در فیزیک کوانتومی به‌طور خلاصه می‌گوید که هرچه بخواهیم مکان یک الکترون را دقیق‌تر اندازه بگیریم، دقت اندازه‌گیری تکانهٔ آن کمتر می‌شود و به‌عکس. هایزنبرگ به‌سبب بیان و تشریح این اصل بنیادی جایزهٔ نوبل فیزیک را از آنِ خود کرد. پس از او، شرودینگر توانست معادلهٔ حرکت را برای یک ذرهٔ آزاد بیان و حل کند و در اثبات آن از نامساوی کوشی–شوارتس بهره برد.

• **در نظریهٔ اعداد:** شاید دور از انتظار باشد اما نامساوی کوشی–شوارتس در اثبات قضیه‌هایی در زمینهٔ همنهشتی‌ها به‌کار رفته است [۲].

روابط دیگری نیز با استفاده از نامساوی کوشی–شوارتس به اثبات می‌رسند؛ از جمله نامساوی‌های زیر که برای اعداد مثبت a، b و c برقرارند:

(۱) $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{b+a} \geq \frac{۳}{۲}$؛

(۲) $\frac{a}{۲a+b} + \frac{b}{۲b+c} + \frac{c}{۲c+a} \leq ۱$؛

(۳) $\frac{a^۲}{b} + \frac{b^۲}{c} + \frac{c^۲}{a} \geq a+b+c$.

برای نمونه، (۱) را ثابت می‌کنیم. کافی است نشان دهیم

$$\frac{a}{b+c} + ۱ + \frac{b}{a+c} + ۱ + \frac{c}{a+b} + ۱ \geq \frac{۹}{۲}$$

یا معادلاً

$$(a+b+c)\Big(\frac{۱}{b+c} + \frac{۱}{c+a} + \frac{۱}{a+b}\Big) \geq \frac{۹}{۲}. \tag{۱.۴}$$

اگر قرار دهیم $x = \sqrt{b+c}$، $y = \sqrt{c+a}$ و $z = \sqrt{a+b}$، آن‌گاه (۱.۴) معادل است با

$$(x^۲ + y^۲ + z^۲)\Big(\frac{۱}{x^۲} + \frac{۱}{y^۲} + \frac{۱}{z^۲}\Big) \geq ۹.$$

اکنون بنابر نامساوی کوشی-شوارتس، داریم

$$(1+1+1)^2 = \Big[x(\frac{1}{x}) + y(\frac{1}{y}) + z(\frac{1}{z})\Big] \leq (x^2+y^2+z^2)\Big(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\Big).$$

بنابراین نامساوی (۱.۴) و در نتیجه (۱) برقرار است.

۵. چند برهان برای صورت گسستهٔ نامساوی کوشی-شوارتس

در این بخش، چند برهان متفاوت برای صورت گسستهٔ نامساوی کوشی-شوارتس (۱.۳) بیان می‌کنیم که به نظر می‌رسد هریک زیبایی خاص خود را دارد. یادآوری می‌کنیم که اثبات کلاسیک این نامساوی با استقرای ریاضی انجام می‌شود [۱۳].

قضیه ۱.۵. *فرض کنیم* $(x_1, \dots, x_n)$ *و* $(y_1, \dots, y_n)$ *دو بردار در* $\mathbb{R}^n$ *باشند. در این صورت*

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\Big)^2 \leq \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\Big) \tag{1.5}$$

و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر عدد حقیقی λ *موجود باشد که برای هر* $i = 1, \dots, n$ *داشته باشیم* $x_i = \lambda y_i$.

برهان اول: بنابر اتحاد جبری دوجمله‌ای،

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i y_j - x_j y_i)^2 &= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{j=1}^{n} y_j^2 + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \sum_{j=1}^{n} x_j^2 - 2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \sum_{j=1}^{n} y_j x_j \\ &= 2\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\Big) - 2\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\Big)^2.\end{aligned}$$

سمت چپ تساوی فوق، مجموعی از مربعات اعداد حقیقی و بنابراین نامنفی است. در نتیجه سمت راست آن نیز نامنفی خواهد بود که همان حکم (۱.۵) است.

برهان دوم: دنبالهٔ $\{S_n\}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$S_n = (x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n)^2 - (x_1^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + \cdots + y_n^2).$$

در این صورت

$$\begin{aligned} S_{n+1} - S_n = &(x_1y_1 + \cdots + x_{n+1}y_{n+1})^2 \\ &- (x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2)(y_1^2 + \cdots + y_{n+1}^2) \\ &- (x_1y_1 + \cdots + x_ny_n)^2 - (x_1^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + \cdots + y_n^2) \end{aligned}$$

که با ساده کردن و دسته‌بندیِ جمله‌ها به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} S_{n+1} - S_n = -\Big[&(x_1y_{n+1} - y_1x_{n+1})^2 + (x_2y_{n+1} - y_2x_{n+1})^2 + \\ &\cdots + (x_ny_{n+1} - y_nx_{n+1})^2\Big]. \end{aligned}$$

بنابراین به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم $S_{n+1} \le S_n$. با ادامهٔ این روند، به نامساوی‌های

$$S_n \le S_{n-1} \le \cdots \le S_1 = 0$$

دست می‌یابیم که (۱.۵) را نتیجه می‌دهد.

برهان سوم: تابع $f(t) = t^2$ روی $\mathbb{R}$ محدب است. پس برای عددهای حقیقی t_1، t_2، ...، t_n و عددهای مثبت p_1، ...، p_n با شرط $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ داریم

$$(p_1t_1 + \cdots + p_nt_n)^2 \le p_1t_1^2 + \cdots + p_nt_n^2.$$

دو حالت روی می‌دهد: یا همهٔ y_iها ناصفرند که با قرار دادنِ $t_i = \frac{x_i}{y_i}$ و $p_i = \frac{y_i^2}{y_1^2+\cdots+y_n^2}$ از نامساوی

$$\Big(\frac{x_1y_1 + \cdots + x_ny_n}{y_1^2 + \cdots + y_n^2}\Big)^2 \le \frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{y_1^2 + \cdots + y_n^2}$$

(۱.۵) را نتیجه می‌گیریم و یا $y_{i_1} = \cdots = y_{i_k} = 0$ که در این صورت با استفاده از حالت اول داریم

$$\begin{aligned} \Big(\sum_{i=1}^n x_iy_i\Big)^2 = \Big(\sum_{i\neq i_1,\ldots,i_k} x_iy_i\Big)^2 &\le \Big(\sum_{i\neq i_1,\ldots,i_k} x_i^2\Big)\Big(\sum_{i\neq i_1,\ldots,i_k} y_i^2\Big) \\ &\le \Big(\sum_{i=1}^n x_i^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^n y_i^2\Big). \end{aligned}$$

برهان چهارم: قرار می‌دهیم $f(t) = \sum_{i=1}^n (a_it - b_i)^2$ و فرض می‌کنیم a_iها همگی صفر نیستند. در این صورت

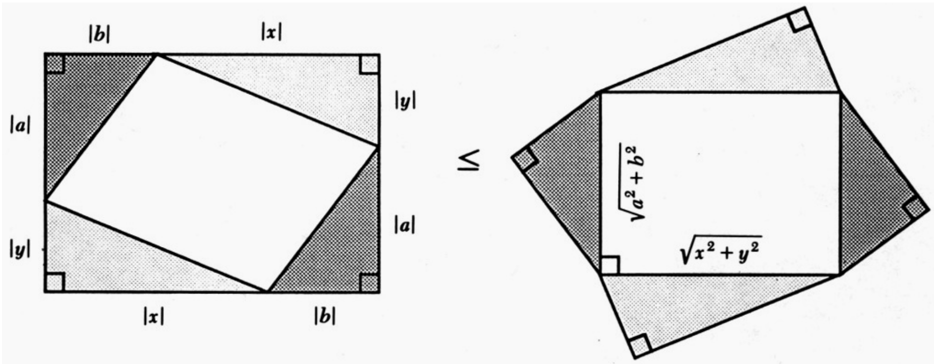
$$f(t) = \Big(\sum_{i=1}^n a_i\Big)^2 t^2 - 2\Big(\sum_{i=1}^n a_ib_i\Big)t + \Big(\sum_{i=1}^n b_i\Big)^2.$$

چون ضریب $t^{۲}$ در این عبارت درجهٔ دوم برحسب t مثبت است، معادلهٔ $f(t) = ۰$ دو ریشهٔ متمایز ندارد و لذا مبیّن آن مثبت نیست. به عبارت دیگر،

$$۴\Big(\sum_{i=۱}^{n} a_i b_i\Big)^{۲} - ۴\Big(\sum_{i=۱}^{n} a_i\Big)^{۲}\Big(\sum_{i=۱}^{n} b_i^{۲}\Big)^{۲} \leq ۰$$

و در نتیجه (۱.۵) برقرار است.

برهان پنجم (اثبات بدون کلام): یکی از اثبات‌های ساده از این نوع، منسوب به نلسن[1] است که در سال ۱۹۹۴ برای دو بردار در صفحهٔ اقلیدسی بیان شده است. شرح این اثبات بدون کلام، در زیر شکل آمده است! در واقع در شکل سمت چپ ناحیهٔ محصور بین چهار مثلث، یک متوازی‌الاضلاع است که می‌دانیم

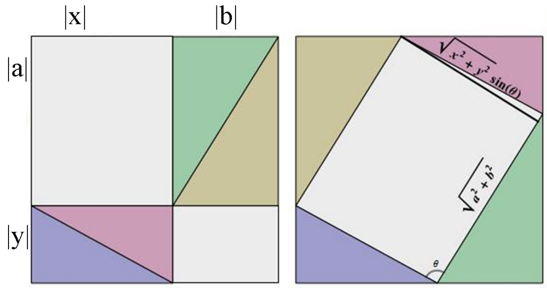


مساحت آن برابر با حاصل‌ضرب قاعده در ارتفاع است. در شکل سمت راست، ناحیهٔ محصور شده یک مستطیل است که مساحت آن برابر با حاصل‌ضرب طول در عرض آن است. قاعدهٔ متوازی‌الاضلاع با طول مستطیل برابر است اما ارتفاع آن برابر با حاصل‌ضرب عرض مستطیل در سینوس زاویهٔ حادهٔ متوازی‌الاضلاع است و در نتیجه از عرض مستطیل کمتر خواهد شد. مساحت چهار مثلث نیز در دو شکل برابر است. بنابراین مساحت ناحیهٔ سمت چپ از مساحت ناحیهٔ سمت راست کمتر خواهد بود:

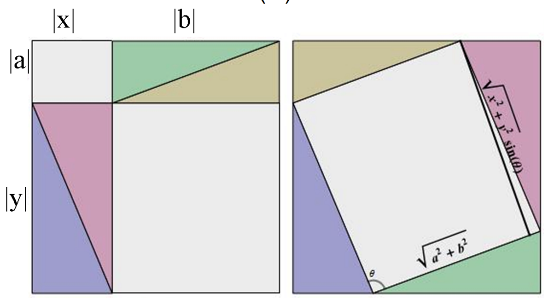
$$(|a| + |y|)(|b| + |x|) \leq ۲\Big(\frac{|ab|}{۲} + \frac{|xy|}{۲}\Big) + \sqrt{a^{۲} + b^{۲}}\sqrt{x^{۲} + y^{۲}}.$$

روایت شکل‌های زیر نیز به همین قرار است. در هر سه حالت، مساحت شکل سمت چپ کوچکتر از مساحت شکل سمت راست است به این دلیل که در یک طرف، مستطیل تشکیل می‌شود و در طرف دیگر، متوازی‌الاضلاعی با همان قاعده و با مساحت کمتر. در این موارد نیز با محاسباتی مشابه آن که در توضیح اثبات نلسن بیان شد، می‌توان نامساوی کوشی-شوارتس را نتیجه گرفت.

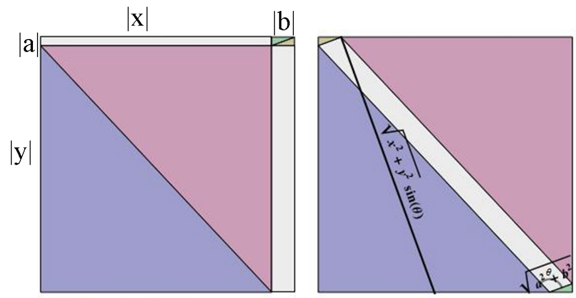
[1] R. B. Nelsen



(۱)



(۲)



(۳)

نامساوی‌های عددی زیادی با استفاده از نامساوی کوشی–شوارتس ثابت شده‌اند که برخی از آنها با نامساوی کوشی–شوارتس معادل هستند. یکی از آنها نامساوی واگنر[۱] است که می‌گوید اگر $a_۱$، $a_۲$، . . .، a_n و $b_۱$، $b_۲$، . . .، b_n اعداد حقیقی مثبت باشند و $\alpha \in [۰, ۱]$، آن‌گاه

$$\Big(\sum_{i=۱}^{n} a_i b_i + \alpha \sum_{i\neq j} a_i b_j\Big)^۲ \leq \Big(\sum_{i=۱}^{n} a_i^۲ + ۲\alpha \sum_{i\neq j} a_i a_j\Big)\Big(\sum_{i=۱}^{n} b_i^۲ + ۲\alpha \sum_{i\neq j} b_i b_j\Big).$$

[۱] Klaus Wagner

روشن است که اگر نامساوی واگنر برقرار باشد، با قرار دادنِ $\alpha = 0$ نامساوی کوشی-شوارتس نتیجه می‌شود. به‌عکس، فرض کنیم $\alpha \in [0, 1]$ و نامساوی کوشی-شوارتس برقرار باشد. در این صورت برای nتایی‌های $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ و $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$ دستور

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] := \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \alpha \sum_{i \neq j} a_i b_j \Big)$$

یک نیم‌ضرب داخلی روی $\mathbb{R}^n$ تعریف می‌کند. توجه کنید که یک فضای نیم‌ضرب داخلی مانند یک فضای ضرب داخلی تعریف می‌شود بجز اینکه از شرط $\langle a, a \rangle = 0$ نمی‌توان نتیجه گرفت $a = 0$. نامساوی کوشی-شوارتس برای فضاهای نیم‌ضرب داخلی نیز برقرار است، زیرا در اثبات آن از ویژگی‌هایی استفاده می‌شود که در فضاهای نیم‌ضرب داخلی نیز برقرارند. اکنون کافی است این نامساوی را برای نیم‌ضرب داخلی فوق به‌کار ببریم تا نامساوی واگنر به‌دست آید.

۶. تظریف و معکوس نامساوی کوشی-شوارتس

در این بخش، نامساوی کوشی-شوارتس را از جنبه‌ای دیگر مورد مطالعه قرار می‌دهیم. یکی از هدف‌ها در بحث نامساوی‌ها، پیدا کردن یك کران مناسب برای عبارتی مانند $P - Q$ است. اگر کران بالایی پیدا شود، ممکن است در مورد کران پایین هم سؤال کنیم که گاه منتهی به سؤال از برقراریِ عکس نامساوی داده‌شده می‌شود. در حالت کلی، وقتی یک نامساوی مانند $P \leq Q$ داشته باشیم، این سؤال طبیعی پیش می‌آید که «تحت چه شرایطی، این نامساوی در جهت عکس برقرار است؟» یا به عبارت دقیق‌تر، تحت چه شرایطی می‌توان عبارت Q را که در حالت کلی از P بزرگتر است، از مضربی از P و یا مجموع P با یک عدد مثبت، کوچکتر کرد. حالت اول را معکوس ضربی و حالت دوم را معکوس جمعی آن نامساوی می‌گویند. در این بخش به بیان چند صورت مهم از معکوس‌های جمعی و ضربی نامساوی کوشی-شوارتس می‌پردازیم. برای اطلاع بیشتر در مورد اهمیت و کاربردهای عکس نامساوی کوشی-شوارتس، خوانندهٔ علاقه‌مند را به مقالهٔ [۶] ارجاع می‌دهیم. با توجه به ارتباط بین نامساوی کوشی-شوارتس و نامساوی مثلثی که به آن اشاره شد، معکوس‌های (جمعی و ضربی) این دو نامساوی نیز با یکدیگر ارتباط نزدیکی دارند و با در نظر گرفتنِ یکی از آنها می‌توان روابطی برای معکوس دیگری به‌دست آورد.

در مطالعهٔ نامساوی‌ها، به‌دست آوردنِ تظریف‌های مناسب و اصطلاحاً بهبود بخشیدن نامساوی، از اهمیت خاصی برخوردار است. در مورد این نامساوی نیز مقادیری بین کران‌های آن پیدا شده است که از

پایه‌ای‌ترین تظریف‌های آن می‌توان به نامساوی کالبات [۳، ۴]:

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\Big)^2 \leq \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i^z b_i^{2-z}\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i^{2-z} b_i^{z}\Big)$$
$$\leq \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i^y b_i^{2-y}\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i^{2-y} b_i^{y}\Big) \leq \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\Big)$$

اشاره کرد که در آن، a_1، a_2، ...، a_n و b_1، b_2، ...، b_n اعداد مثبت هستند و $1 \leq z \leq y \leq 0$ یا $2 \leq y \leq z \leq 1$. اکنون به بیان معکوس‌های نامساوی کوشی–شوارتس می‌پردازیم.

۱.۶. معکوس جمعی در اعداد. فرض کنیم a_1، ...، a_n و b_1، ...، b_n اعداد حقیقی مثبتی باشند به‌طوری که $m_1 \leq a_i \leq M_1$ و $m_2 \leq b_i \leq M_2$ برای هر $i = 1, 2, \dots, n$. در این صورت نامساوی‌های ذیل را خواهیم داشت:

• **نامساوی گروس**[۱]:

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leq \sum_{i=1}^{n} a_ib_i$$
$$+ \frac{\sqrt{M_1M_2}(\sqrt{M_1M_2}-\sqrt{m_1m_2})^2}{2\sqrt{m_1m_2}} \min\Big\{\frac{M_1}{m_1}, \frac{M_2}{m_2}\Big\}.$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، حاصل‌ضرب نرم بردارهای $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ و $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$ در $\mathbb{R}^n$ کوچکتر یا مساوی جمع حاصل‌ضرب داخلی آنها با مقداری مثبت شده است [۱۰].

• **نامساوی شیشا–موند**[۲]:

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}{\sum_{k=1}^{n} a_kb_k} - \frac{\sum_{k=1}^{n} a_kb_k}{\sum_{k=1}^{n} b_k^2} \leq \Big(\sqrt{\frac{M_1}{m_2}} - \sqrt{\frac{m_1}{M_2}}\Big)^2.$$

در این نامساوی، با گرفتن مخرج مشترک بین دو کسر و محاسبات ساده، صورت دیگری از معکوس جمعی نامساوی کوشی–شوارتس به‌دست می‌آید. تفاوتی که در این رابطه وجود دارد این است که مقدار مثبت به‌دست آمده، به بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ بستگی دارد.

۲.۶. معکوس جمعی در فضای ضرب داخلی. این معکوس جمعی، با معکوس به‌دست آمده در فضاهای نرمدار متفاوت است از این نظر که مستقیماً حاصل‌جمع $|\langle x, y\rangle|$ با یک عدد مثبت، بزرگتر یا مساوی $\|x\|\,\|y\|$ نیست و در واقع از مجذور آن بزرگتر است. به‌طور خلاصه، فرض کنیم x و y دو بردار

[۱] Grüss type inequality [۲] Shisha-Mond inequality

ناصفر در فضای ضرب داخلی H باشند و $\delta > ۰$ موجود باشد به‌طوری که $\|x-y\| \leq \delta$. در این صورت اگر $\|y\| < \delta$، آن‌گاه

$$\|x\|^۲\|y\|^۲ \leq |\langle x,y\rangle| + \delta^۲\|x\|^۲$$

و اگر $\|y\| > \delta$، آن‌گاه

$$\|x\|^۲\|y\|^۲ \leq \delta^۲ - \|y\|^۲ + ۲|\langle x,y\rangle|.$$

در حالت $\|y\| = \delta$، معکوس ضربی نامساوی کوشی-شوارتس را خواهیم داشت که در بخش بعد آن را بیان می‌کنیم [۷]. دراگومیر[۱] نیز در [۵] با شرایطی متفاوت، معکوس جمعی دیگری برای نامساوی کوشی-شوارتس ارائه کرده است به این صورت که اگر x و y دو بردار ناصفر در فضای ضرب داخلی H باشند و $a, A \in \mathbb{C}$ در شرط

$$\mathrm{Re}\,\langle Ax-y, x-ay\rangle \geq ۰$$

یا به‌طور معادل

$$\|x - \frac{a+A}{۲}y\| \leq \frac{۱}{۲}|A-a|\,\|y\|$$

صدق کنند، آن‌گاه

$$\|x\|^۲\|y\|^۲ \leq |\langle x,y\rangle|^۲ + \frac{۱}{۴}|A-a|^۲\,\|y\|^۴$$

و ضریب $\frac{۱}{۴}$ در این نامساوی، بهترین است به این معنی که نمی‌توان ضریبی کوچکتر جایگزین آن کرد.

۳.۶. معکوس ضربی در اعداد. فرض کنیم $a_۱$، ...، a_n و $b_۱$، ...، b_n اعداد حقیقی مثبت باشند به‌طوری که $m_۱ \leq a_i \leq M_۱$ و $m_۲ \leq b_i \leq M_۲$ برای هر $i = ۱, ۲, \dots, n$. در این صورت

- **نامساوی پولیا[۲]-سگو[۳]**:

$$\sum_{i=۱}^{n} a_i^۲ \sum_{i=۱}^{n} b_i^۲ \leq \frac{(m_۱m_۲ + M_۱M_۲)^۲}{۴m_۱m_۲M_۱M_۲}\Big(\sum_{i=۱}^{n} a_ib_i\Big)^۲. \qquad (۱.۶)$$

در این رابطه نیز مانند نامساوی گروس، ضریب ثابتی برای معکوس ضربی نامساوی کوشی-شوارتس به‌دست آمده است. اگر به‌جای فرض بالا، اعداد مثبت m و M موجود باشند که $mb_i \leq a_i \leq Mb_i$، آن‌گاه (۱.۶) به نامساوی زیر تبدیل می‌شود:

$$\sum_{i=۱}^{n} a_i^۲ \sum_{i=۱}^{n} b_i^۲ \leq \frac{(M+m)^۲}{۴Mm}\Big(\sum_{i=۱}^{n} a_ib_i\Big)^۲.$$

[۱] S. S. Dragomir [۲] George Pólya [۳] Gábor Szegö

• **نامساوی دیاز-متکالف**[۱]: این رابطه را نمی‌توان مستقیماً معکوس ضربی نامساوی کوشی-شوارتس تلقی کرد، زیرا در سمت چپ نامساوی ضریبی از نرم بردار $\mathbf{a}$ قرار گرفته است. البته با قرار دادنِ $\mathbf{b}' = \sqrt{\frac{m_2 M_2}{m_1 M_1}}\mathbf{b}$، رابطهٔ زیر می‌تواند معکوس ضربی نامساوی کوشی-شوارتس برای بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}'$ باشد:

$$\sum_{k=1}^{n} b_k^2 + \frac{m_2 M_2}{m_1 M_1}\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \leq \left(\frac{M_2}{m_1} + \frac{m_2}{M_1}\right)\sum_{k=1}^{n} a_k b_k.$$

۴.۶. معکوس ضربی در فضای ضرب داخلی. اگر x و y دو بردار ناصفر در فضای ضرب داخلی H باشند و عددهای $\Lambda, \lambda \in \mathbb{C}$ موجود باشند به‌طوری که $\operatorname{Re}\langle \Lambda y - x, x - \lambda y\rangle \geq 0$ یا معادلاً

$$\left\|x - \frac{\Lambda + \lambda}{2}y\right\| \leq \frac{1}{2}|\Lambda - \lambda|\,\|y\|,$$

آن‌گاه

$$\|x\|\,\|y\| \leq \frac{|\Lambda + \lambda|}{2[\operatorname{Re}(\bar{\lambda}\Lambda)]^{\frac{1}{2}}}|\langle x, y\rangle|.$$

۷. صورت عملگریِ نامساوی کوشی-شوارتس

اکنون قصد داریم نامساوی کوشی-شوارتس را از فضاهای ضرب داخلی به C^*-جبرها گسترش دهیم و صورت دیگری از نامساوی کوشی-شوارتس را بیان کنیم. اما از آنجا که تمامی C^*-جبرها را می‌توان در یک ساختار کلی که جبر عملگرهای روی یک فضای هیلبرت H است، مطالعه کرد، بیان مطالب را به $\mathcal{B}(H)$ معطوف می‌کنیم. ابتدا به چند تعریف اولیه نیاز داریم.

فرض کنیم H یک فضای هیلبرت روی میدان $\mathbb{C}$ و $\mathcal{B}(H)$ مجموعهٔ همهٔ عملگرهای خطی کراندار روی H باشد. در این صورت $\mathcal{B}(H)$ همراه با عمل‌های جمع و ضرب در عدد به‌صورت نقطه‌وار، عمل ترکیب توابع و نگاشت $T \mapsto T^*$ که در آن T^* الحاقی هیلبرتی عملگر T است، تشکیل یک C^*-جبر می‌دهد و در حالتی که $\dim(H) < \infty$ جبر $\mathcal{B}(H)$ را با $M_n(\mathbb{C})$، یعنی جبر تمام ماتریس‌های $n \times n$ روی $\mathbb{C}$ یکسان می‌انگاریم. $T \in \mathcal{B}(H)$ را *عملگر مثبت* گوییم و می‌نویسیم $T \geq 0$ هرگاه T خودالحاقی باشد (یعنی $T = T^*$) و طیف آن (یعنی مجموعهٔ $\{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I$ معکوس‌پذیر نیست $\}$) زیرمجموعه‌ای از $[0, +\infty)$ باشد. بنابراین A یک *ماتریس مثبت* است هرگاه همهٔ مقدارهای ویژهٔ آن نامنفی باشند.

[۱] Diaz-Metcalf inequality

بنابراین رابطهٔ $A \geq B \iff A - B \geq 0$ روی مجموعهٔ عضوهای خودالحاقی $\mathcal{B}(H)$ یک رابطهٔ ترتیب جزئی است. نگاشت $\Phi : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(K)$ را مثبت گوییم اگر از $A \geq 0$ بتوان نتیجه گرفت $\Phi(A) \geq 0$. مثلاً $\Phi(X) = Z^*XZ$ یک نگاشت مثبت است.

با تعریف این رابطهٔ ترتیب جزئی، نامساوی‌های عملگری نیز معنا پیدا می‌کند. معمولاً سعی بر این است که یک نامساوی مانند $p(t) \leq q(t)$ را که دربارهٔ اعداد برقرار است، برای عملگرها گسترش دهیم؛ یعنی بررسی کنیم تحت چه شرایطی نامساوی $p(A) \leq q(A)$ برای عملگر A نیز برقرار است. در اینجا هدف گسترش نامساوی کوشی-شوارتس به فضای عملگرها است.

نامساوی کوشی-شوارتس به صورت‌های مختلفی در $\mathcal{B}(H)$ بیان شده است. نخست کادیسون[1] نامساوی $\Phi(A^2) \geq \Phi(A)^2$ را برای عملگر خودالحاقی A و نگاشت یکانی مثبت Φ بیان کرد و پس از آن، چوی[2] رابطهٔ کلی‌تر $\Phi(A^*A) \geq \Phi(A)^*\Phi(A)$ را به اثبات رسانید.

میانگین هندسی برای دو عملگر $A, B \in H$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A \sharp B = A^{\frac{1}{2}}(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}$$

اکنون نوع دیگری از نامساوی کوشی-شوارتس را می‌توان به‌صورت زیر به‌دست آورد:

$$\sum_{i=1}^{n} A_i \sharp B_i \leq \Big(\sum_{i=1}^{n} A_i\Big) \sharp \Big(\sum_{i=1}^{n} B_i\Big).$$

همچنین با معرفی نرم‌های پایای یکانی در فضای عملگرها، صورت دیگری از نامساوی کوشی-شوارتس را بیان می‌کنیم. نرم $\|\,.\,\|$ را روی یک ایدآل I از H یک نرم *پایای یکانی* گوییم هرگاه نسبت به ضرب عضوهای یکانی پایا باشد. در واقع نرم $\|\,.\,\|$ پایای یکانی است اگر برای هر $A \in I$ و هر دو عضو یکانی مانند $U, V \in H$ داشته باشیم $\|UAV\| = \|A\|$. یادآوری می‌کنیم که عملگر $U \in H$ را *یکانی* گوییم اگر $UU^* = I = U^*U$ که در آن، I عملگر همانی و U^* عملگر یکتایی است که در رابطهٔ $\langle Ux, y\rangle = \langle x, U^*y\rangle$ برای هر $x, y \in H$ صدق می‌کند. برای مثال، در فضای ماتریس‌های $n \times n$ که در واقع فضای تبدیلات خطی از $\mathbb{C}^n$ به خودش است، نه‌تنها نرم عملگری، بلکه نرم

$$\|[a_{ij}]\|_2 = \Big(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

یک نرم پایای یکانی است که به آن *نرم هیلبرت-اشمیت* می‌گویند. در [۹] صورت‌های متعددی از نامساوی کوشی-شوارتس با استفاده از نرم‌هایی به این شکل، به‌دست آمده است که برای مثال، می‌توان به نامساوی

$$\|A^*B\|^2 \leq \|A^*A\|\,\|B^*B\|.$$

[1] R. V. Kadison [2] M. D. Choi

اشاره کرد. برای آشنایی با صورت‌های دیگر این نامساوی، [۱] را مطالعه کنید.

صورت‌های دیگری از نامساوی کوشی-شوارتس و کاربردهای آن به‌ویژه در C^*-جبرها و C^*-مدول‌های هیلبرت به‌دست آمده است [۱، ۸]. در مبحث C^*-مدول‌های هیلبرت به‌جای اعداد، با عضوهای یک C^*-جبر سروکار داریم و جالب اینجا است که این نامساوی کاملاً با ساختار ضرب داخلی C^*-مدول‌ها سازگار است و در آنها نیز صورت خاصی از نامساوی کوشی-شوارتس به اثبات می‌رسد. برای مثال، نامساوی شناخته‌شدهٔ کادیسون $\Phi(a^۲) \geq |\Phi(a)|^۲$ که در آن، $\mathcal{A}$ یک C^*-جبر، $a \in \mathcal{A}$ یک عضو خودالحاقی و $\Phi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ یک نگاشت خطی مثبت روی $\mathcal{A}$ است، صورت عملگریِ نامساوی کوشی-شوارتس است. در واقع اگر قرار دهیم $\langle a, b\rangle := \Phi(b^*a)$، آن‌گاه به‌سادگی می‌توان بررسی کرد که $\langle .,. \rangle$ یک نیم‌ضرب داخلی روی $\mathcal{A}$ است. اکنون اگر نامساوی کوشی-شوارتس را برای این نیم‌ضرب داخلی و به‌ازای $a = b$ بازنویسی کنیم، نامساوی کادیسون به‌دست می‌آید. از این نظر، می‌توان آن را صورت دیگری از نامساوی کوشی-شوارتس دانست.

سپاسگزاری: نویسندگان مایلند از داوران محترم مقاله برای پیشنهادات سازندهٔ آنها که منجر به بهبود نگارش مقاله شد، تشکر و قدردانی نمایند.

مراجع

[1] Aldaz, J. M., Barza, S., Fujii M., Moslehian, M. S., Advances in operator Cauchy-Schwarz inequalities and their reverses, *Ann. Funct. Anal.*, **6** (2015), 275–295.

[2] Andreescu, T., Dospinescu, G., An unexpected application of the Cauchy-Schwarz inequality, *Mathematical Reflections*, **1** (2013), 1–5.

[3] Bakherad, M., Moslehian, M. S., Complementary and refined inequalities of Callebaut inequality for operators, *Linear and Multilinear Algebra*, **63** (2015), no. 8, 1678–1692.

[4] Callebaut, D. K., Generalization of the Cauchy-Schwarz inequality, *J. Math. Anal. Appl.*, **12** (1965), 491–494

[5] Dragomir, S. S., A counterpart of Schwarz's inequality in inner product spaces, *East Asian Math. J.*, **20** (2004), 1–10.

[6] Dragomir, S. S., Reverses of Schwarz inequality in inner product spaces with applications., *Math. Nachr.*, **288** (2015), 730–742.

[7] Gong-Bao, W., Ji-Pu, M., Some results about reverse of Cauchy-Schwarz inequality in inner product spaces, *Northeast. Math. J.*, **21** (2005), 207–211.

[8] Ilišević, D., Varošanec, S., On the Cauchy-Schwarz inequality and its reverse in semi-inner product C^*-modules, *Banach J. Math. Anal.*, **1** (2007), 78–84.

[9] Jocić, D. R., Cauchy-Schwarz and means inequalities for elementary operators into norm ideals, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **126** (1998), 2705–2711.

[10] Matharu, J. S., Moslehian, M. S., Grüss inequality for some types of positive linear maps, *J. Operator Theory*, **73** (2015), 265–278.

[11] Mitrinović, D. S., Pečarić, J. E., Fink, A. M., *Classical and New Inequalities in Analysis*, Springer-Verlag, Dordrecht, 1993.

[12] Wigren, T., *The Cauchy-Schwarz Inequality. Proofs and Applications in Various Spaces*, B. Sc. Thesis, Karlstad University, Sweden, 2015.

[13] Wu, H.-H, Wu, Sh., Various proofs of the Cauchy-Schwarz inequality, *Octogon Mathematical Magazine*, **17** (2009), 221–229.

[۱۴] معتمدی، منصور، مسئلهٔ آپولونیوس، *فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی*، سال ۳۴، شمارهٔ ۵۷ (پاییز و زمستان ۱۳۹۴)، ۱-۲۷.

محمد صال‌مصلحیان: دانشگاه فردوسی مشهد، دانشکده علوم ریاضی، گروه ریاضی محض

تارنما: `http://um.ac.ir/~moslehian`

رایانامه: `moslehian@yahoo.com`

فاطمه عبدالله‌زاده گنابادی: دانشگاه فردوسی مشهد، دانشکده علوم ریاضی، گروه ریاضی محض

رایانامه: `f_gonabadi69@yahoo.com`