آنالیز ریاضی (۱) – دانشگاه فردوسی مشهد

محمد صال مصلحی

http://www.um.ac.ir/~moslehian/

فصول درس: مبانی فضاهای متریک – دنباله‌ها و سری‌ها – توابع پیوسته – توابع مشتق‌پذیر

مرجع: کتاب اصول آنالیز ریاضی والتر رودین

فضاهای متریک

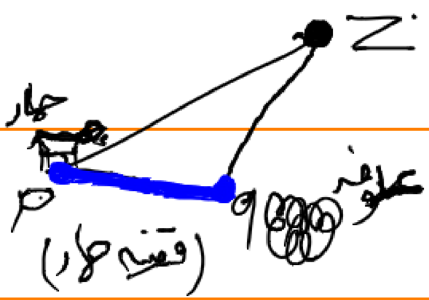
تعریف – فرض کنید $X\neq\emptyset$ یک مجموعه باشد. تابع $d: X\times X\to\mathbb{R}$, $(p,q)\mapsto d(p,q)$ را یک متریک روی X نامیده‌اند گاه

در خواص ذیل صدق کند:

الف) $d(p,q)=0$ اگر و فقط اگر $p=q$

ب) $d(p,q)=d(q,p)$ (خاصیت تقارنی متر)

ج) $d(p,q)\leq d(p,z)+d(z,q)$ اگر z نقطه دیگری (نامساوی مثلث)



تمرین. $\forall p,q;\ d(p,q)\geq 0$

حل. $0=d(p,p)\leq d(p,q)+\underbrace{d(q,p)}_{d(p,q)}=2d(p,q)$

در این صورت X را همراه d یک فضای متریک می‌گویند. (X,d)

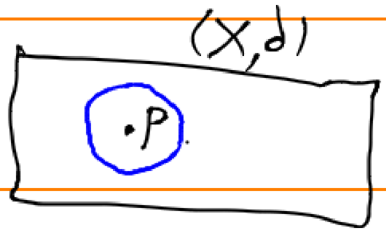
امثله 1) $\left(\mathbb{R}^k,\ d_2(\underline{x},\underline{y})=\left(\sum_{i=1}^{k}|x_i-y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)$ متر اقلیدسی

2) هر یک از متر‌های زیر روی $\mathbb{R}^k$

$d_m(\underline{x},\underline{y})=\max_{1\leq i\leq k}|x_i-y_i|$

$d_s(x,y)=\sum_{i=1}^{k}|x_i-y_i|$

3) مجموعه دلخواه $X\neq\emptyset$ همراه متر گسسته



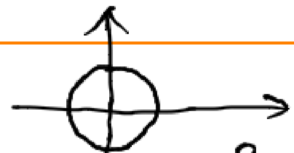
$$d(p,q)=\begin{cases}1 & p\neq q\\ 0 & p=q\end{cases}$$

تعریف . همسایگی به مرکز $p\in X$ و شعاع $r>0$ عبارت است از

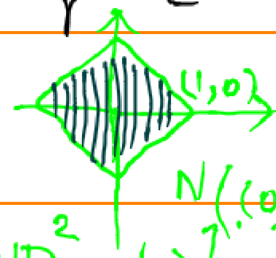
$$N_r(p)=\{q\in X : d(p,q)<r\}$$

شعاع همسایگی همیشه یک عدد حقیقی مثبت است

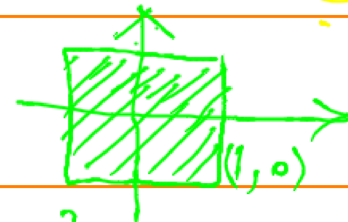
مثال :



$N_1((0,0))$ $(\mathbb{R}^2, d_e)$

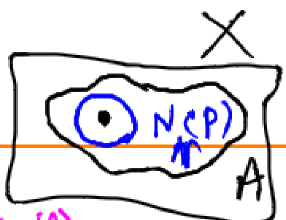


$N_1((0,0))$ در $(\mathbb{R}^2, d_s)$



$N_1((0,0))$ در $(\mathbb{R}^2, d_m)$

تعریف . فرض کنید (X,d) یک فضای متریک باشد، $p\in X$ و $A\subseteq X$.



۱) p را نقطه درونی A می‌گوییم هرگاه $\exists r;\ N_r(p)\subseteq A$

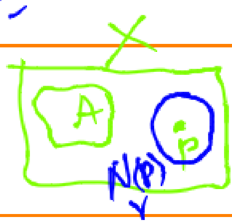
نکته) چون $d(p,p)=0<r$ پس همیشه هر همسایگی $N_r(p)$ شامل p می‌باشد. پس هر نقطه درونی A باید عضو A باشد.

$Int(A)=A^\circ=$ مجموعه نقاط درونی A

A درون

۲) p را نقطه بیرونی A می‌گوییم هرگاه p نقطه درونی متمم A (یعنی A^c) باشد. به عبارت دیگر $\exists r;\ N_r(p)\subseteq A^c$. مجموعه نقاط بیرونی A را با $Ext(A)$ نمایش می‌دهیم

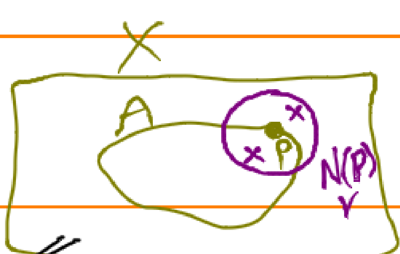
بیرون A



این شرط معادل این است که $N_r(p)\cap A=\emptyset$

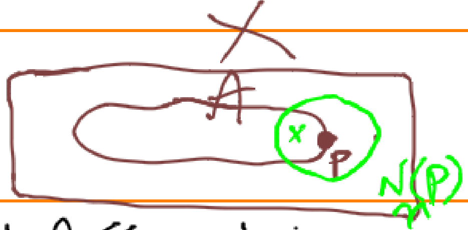
۳.) p را نقطه مرزی A می‌گوییم هرگاه نه درونی و نه بیرونی باشد. به عبارت دیگر

$$\forall r;\ \underbrace{N_r(p)\not\subseteq A}_{N_r(p)\cap A^c\neq\emptyset}\ \&\ \underbrace{N_r(p)\not\subseteq A^c}_{N_r(p)\cap A\neq\emptyset}$$



یعنی هر همسایگی p باید هم A را قطع کند و هم A^c را . خود p ممکن است عضو A باشد و یا نباشد.

مجموعه نقاط مرزی A را مرز A گفته و با $\partial(A)$ یا $bd(A)$ نشان می‌دهیم.



۴) P را نقطهٔ چسبندگی A می‌گوییم هرگاه

$$\forall r;\ N_r(P)\cap A\neq\emptyset$$

مجموعهٔ نقاط چسبندگی A را با $\bar{A}$ نمایش می‌دهیم و آن را بستار A می‌گوییم.

۵) P را نقطهٔ حدی A می‌گوییم هرگاه

$$\forall r;\ N_r(P)\cap(A-\{P\})\neq\emptyset$$

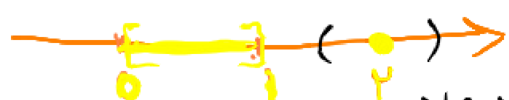
بدیهی است که هر نقطهٔ حدی یک نقطهٔ چسبندگی است زیرا هر همسایگی که $A-\{P\}$ را قطع کند A را نیز قطع می‌کند!

بین نقاط مرزی و حدی رابطه‌ای وجود ندارد. مثلاً ۱ نقطهٔ مرزی و حدی $[0,1]$ است. $\frac{1}{2}$ نقطهٔ حدی $[0,1]$ است ولی نقطهٔ مرزی نیست. همچنین ۲ نقطهٔ مرزی $[0,1]\cup\{2\}$ است ولی نقطهٔ حدی نیست.

نکته: هر وقت از زیرمجموعه‌های $\mathbb{R}^k$ و نقاط آن صحبت می‌کنیم، همواره متر روی آن را متر اقلیدسی در نظر می‌گیریم مگر خلاف آن تصریح شود.

مجموعهٔ نقاط حدی A را با A' (A پریم) نشان می‌دهیم.

۶) P را نقطهٔ تنهای A گویند هرگاه $P\in A-A'$ (یعنی P یک همسایگی داشته باشد که به جز P در هیچ نقطهٔ دیگری A را قطع نکند). مانند نقطهٔ ۲ برای مجموعهٔ $[0,1]\cup\{2\}$



$N_{\frac{1}{2}}(2)$

۷) A را در X چگال گوییم هرگاه $\bar{A}=X$. یعنی هر نقطهٔ فضا، نقطهٔ چسبندگی A باشد. به عبارت دیگر هر همسایگی از هر نقطهٔ X، مجموعهٔ A را قطع کند.

مثلاً $\mathbb{Q}$ در $\mathbb{R}$ چگال است.

مثال) اگر $X=\mathbb{R}$، $A=\mathbb{N}$، $B=\mathbb{Q}$، $C=[0,1]$، آنگاه

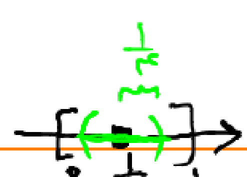
$1\in\bar{\mathbb{N}}$

$\forall r;\ \underbrace{N_r(1)\cap\mathbb{N}}_{1\in}\neq\emptyset$

$1\notin\mathbb{Q}^\circ$

$\forall r;\ \underbrace{N_r(1)}_{(1-r,\,1+r)}\not\subseteq\mathbb{Q}$ این بازه شامل اعداد گنگ است

$\frac{1}{2}\in C^\circ$



$N_{\frac{1}{4}}(\frac{1}{2})\subseteq C$

از تعریف مجموعه باز نتیجه می‌شود که "A باز است اگر فقط اگر $A=A^\circ$"

قضیه. A بسته است اگر فقط اگر $A=\bar{A}$.

برهان. ($\Leftarrow$) گیریم A بسته باشد. اولاً بنا به تعریف نقطهٔ چسبندگی $A\subseteq\bar{A}$.

$\forall x\in A\ \forall r;\ N_r(x)\cap A\neq\emptyset$

اینک نشان می‌دهیم که $\bar{A}\subseteq A$:

فرض کنیم $P\in\bar{A}$. فرض کنیم $P\notin A$ (فخ). پس $P\in A^c$. چون A^c باز است (زیرا A بسته است) لذا

$$\exists r;\quad N_r(P)\subseteq A^c\quad(\equiv N_r(P)\cap A=\emptyset)$$

پس P نقطهٔ چسبندگی A نیست ✗. بنابراین $P\in A$. به این ترتیب، $\bar{A}\subseteq A$.

($\Rightarrow$) فرض کنیم $A=\bar{A}$. نشان می‌دهیم A^c باز است:

گیریم $P\in A^c$. پس $P\notin A$. لذا $P\notin\bar{A}$. بنابراین $\exists r;\ N_r(P)\cap A=\emptyset$. به عبارت دیگر $N_r(P)\subseteq A^c$.

لذا P نقطهٔ درونی A^c است

پس A^c باز و لذا A بسته است. □

قضیه. $\bar{A}=A^\circ\cup\partial(A)$ (همچنین $\bar{A}=A\cup\partial A$ و نیز $\bar{A}=A\cup A'$. اثبات‌ها تمرین هستند)

برهان. ($\subseteq$) فرض کنیم $P\in\bar{A}$. اگر $P\in A^\circ$، نتیجه می‌گیریم که $P\in A^\circ\cup\partial A$. اگر $P\notin A^\circ$، نشان می‌دهیم که $P\in\partial A$.

گیریم $N_r(P)$ یک همسایگی دلخواه از P باشد. بنا به فرض $N_r(P)\cap A\neq\emptyset$. از طرف دیگر $\forall s;\ N_s(P)\nsubseteq A$

$N_s(P)\cap A^c\neq\emptyset$

پس $N_r(P)\cap A\neq\emptyset$. بنابراین $P\in\partial A$.

($\supseteq$) فرض کنیم $P\in A^\circ\cup\partial A$. پس $P\in A^\circ$ یا $P\in\partial A$. دو حالت روی می‌دهد:

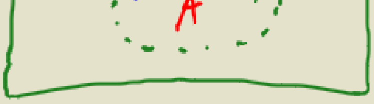
الف) $P\in A^\circ$. پس $P\in A$ و لذا $P\in\bar{A}$.

ب) $P\in\partial A$. پس هر همسایگی P، هم A و هم A^c را قطع می‌کند. بنابراین هر همسایگی P، A را قطع می‌کند. بنابراین $P\in\bar{A}$.

در هر حالت نتیجه گرفته شد $P\in\bar{A}$. □

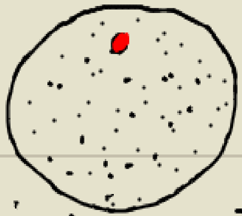
نتیجه: همواره $\partial A\subseteq\bar{A}$ زیرا $\bar{A}=A^\circ\cup\partial A$

تمرین. $X=A^\circ\,\dot\cup\,\partial A\,\dot\cup\,Ext(A)$.



قضیه. (i) A باز است اگر و تنها اگر $\partial A\cap A=\emptyset$

(ii) A بسته است اگر و تنها اگر $\partial A\subseteq A$



توپ فوتبال پنچر شده (دارای حداقل یک سوراخ) نه باز است و نه بسته (در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^3$)

برهان. (i) ($\Leftarrow$) فرض کنیم A باز باشد. گیریم $P\in\partial A\cap A\neq\emptyset$.

فرض خلف

پس $P\in A$ ، $P\in\partial A$. چون A باز است، و $P\in A$ پس

$$\exists r;\ N_r(P)\subseteq A.$$

چون $P\in\partial A$ پس هر همسایگی آن، از جمله $N_r(P)$، باید A^c (والبته A) را قطع کند

پس $N_r(P)\cap A^c\neq\emptyset$ به عبارت دیگر $N_r(P)\nsubseteq A$ ✗

$B\subseteq A \Leftrightarrow B\cap A^c=\emptyset$

بنابراین $\partial A\cap A=\emptyset$.

($\Rightarrow$) فرض کنیم $\partial A\cap A=\emptyset$. نشان می‌دهیم A باز است:

فرض کنیم $P\in A$ دلخواه باشد. نشان می‌دهیم که P نقطهٔ درونی A است:

چون $P\in A$ و $\partial A\cap A=\emptyset$ پس $P\notin\partial A$. لذا $\exists r:\ \underbrace{N_r(P)\cap A=\emptyset}$ یا $N_r(P)\cap A^c=\emptyset$

$P\in$

$d(P,P)=0<r \Rightarrow P\in N_r(P)$

بنابراین $N_r(P)\cap A^c=\emptyset$ و لذا $N_r(P)\subseteq A$ □.

(ii) به عهدهٔ دانشجویان

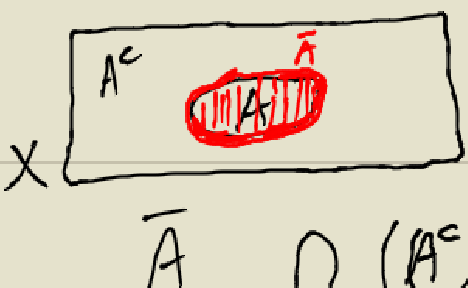
لم. $\partial(A)=\partial(A^c)$

$$P\in\partial A \Leftrightarrow \forall r;\ N_r(P)\cap A\neq\emptyset \ \&\ N_r(P)\cap A^c\neq\emptyset$$

$$\Leftrightarrow \forall r;\ N_r(P)\cap (A^c)^c\neq\emptyset \ \&\ N_r(P)\cap A^c\neq\emptyset$$

$$\Leftrightarrow P\in\partial(A^c)$$

قضیه. $\bar A\cap\overline{A^c}=\partial A$



برهان.

$\bar A\cap\overline{A^c}= \quad \bar A \quad \cap\ ((A^c)^\circ\cup\partial A^c)$

$$= \bar{A} \cap (\bar{A}^c \cup \partial A)$$

$$= \underbrace{(\bar{A} \cap \bar{A}^c)}_{\varnothing} \cup (\bar{A} \cap \partial A)$$

$$= (A^\circ \dot{\cup} \partial A) \cap \partial(A)$$

$$= \underbrace{(A^\circ \cap \partial A)}_{\varnothing} \cup (\partial A \cap \partial A)$$

$$= \partial A$$

مثال ~~نقض~~ نقیض :

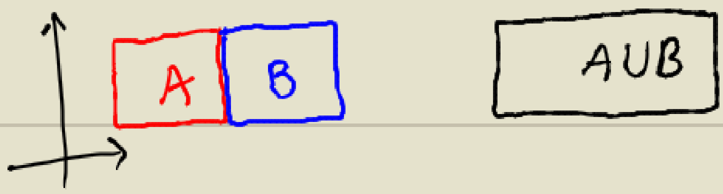
1) $\overline{A \cap B} \neq \bar{A} \cap \bar{B}$

$A = (0,1)$, $B = (1,2)$, $X = \mathbb{R}$

$\bar{A} = [0,1]$, $\bar{B} = [1,2]$

$\overline{A \cap B} = \bar{\varnothing} = \varnothing \neq \{1\} = \bar{A} \cap \bar{B}$

2) $(A \cup B)^\circ \neq A^\circ \cup B^\circ$



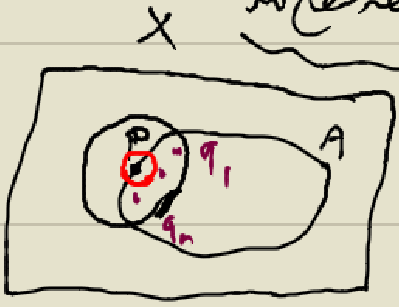
$A = (0,1)$, $B = [1,2)$

$A^\circ = (0,1)$, $B^\circ = (1,2)$

$(A \cup B)^\circ = (0,2) \neq \underbrace{(0,1)}_{A^\circ} \cup \underbrace{(1,2)}_{B^\circ}$

قضیه. هر همسایگی از هر نقطه حدی یک مجموعه، آن مجموعه را در تعداد نامتناهی نقطه قطع می‌کند.

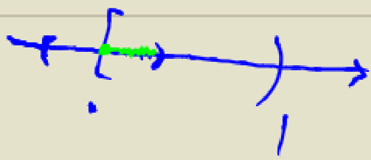
برهان. فرض کنیم $P\in A'$. فرض کنیم همسایگی $N_r(P)$، A را در تعداد متناهی نقطه قطع کند.



خلف

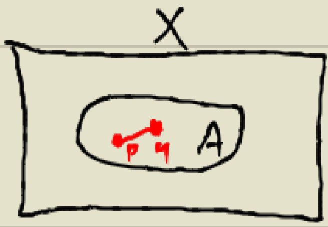
گیریم $N_r(P)\cap A=\{q_1,\dots,q_n\}$. چنانچه

$$s=\min\{\underbrace{d(P,q_i)}_{<r} \mid 1\le i\le n,\ q_i\neq P\}>0$$



ملاحظه می‌شود که $N_s(P)\cap(A-\{P\})=\emptyset$ (زیرا اگر x نقطه‌ای از این اشتراک باشد، باید $x\in N_r(P)\cap A$ لذا x یکی از q_iها، مثلاً q_j؛ است و لذا $s\le d(P,q_j)<s$) که خلاف فرض نقطه حدی بودن P برای A است.

بنابراین فرض باطل است □



تعریف. اگر (X,d) یک فضای متریک باشد، $A\subseteq X$، آنگاه

$\tilde d: A\times A\to\mathbb{R}$, $\tilde d(p,q)=d(p,q)$ یک متر روی A است (از حالا به بعد $\tilde d$ را با d نمایش می‌دهیم) و (A,d) را زیرفضای متریک (X,d) می‌گوییم.

$$N^A_r(P)=\{q\in A\mid d(P,q)<r\}=N_r(P)\cap A$$

لم. اگر $G\subseteq X$ در X باز باشد آنگاه $G=\bigcup_{x\in G}N_{r_x}(x)$ ؛ $\forall x\in G\ \exists r_x$

برهان. $\forall x\in G\ \exists r_x;\ \{x\}\subseteq N_{r_x}(x)\subseteq G$

پس

$$\text{جذاب}\quad \underbrace{\bigcup_{x\in G}\{x\}}_{G}\subseteq\bigcup_{x\in G}N_{r_x}(x)\subseteq\underbrace{\bigcup_{x\in G}G}_{G}\quad\text{جالب}\qquad \square$$

ددفیل
اگر کسی خواند نقطه‌هایش را گذارد، بهتر است نخواند و حوزه را رها کند

قضیه. V در (A,d) باز است اگر و تنها اگر یک مجموعه باز G در (X,d) وجود داشته باشد که

$$V=G\cap A$$

($\Leftarrow$) اگر V در A باز است — بنا به لم قبل — بنا به بند قبل از لم

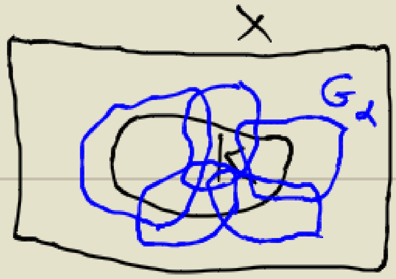
$$V=\bigcup_{y\in V}N^A_{r_y}(y)=\bigcup_{y\in V}\left(N_{r_y}(y)\cap A\right)=\left(\bigcup_{y\in V}N_{r_y}(y)\right)\cap A=G\cap A$$

G ... باز

$(\Rightarrow)$

در X باز است

$$G\cap A=\Big(\bigcup_{x\in G}N_{r_x}(x)\Big)\cap A=\bigcup_{x\in G}\big(N_{r_x}(x)\cap A\big)=\bigcup_{x\in G\cap A}N^{A}_{r_x}(x):=V\ \cdot\ \square$$



تعریف. یک گردایه $\{G_\alpha\}_{\alpha\in I}$ از مجموعه‌ها پوششی برای مجموعه K است هرگاه

$$K\subseteq\bigcup_{\alpha\in I}G_\alpha$$

اگر I متناهی باشد، پوشش را متناهی می‌گوییم.

″ ″ شمارا ″ ″ ″ شمارا ″

اگر همه G_αها باز باشند، پوشش را باز می‌گویند.

تعریف. مجموعه K را در فضای متریک X فشرده می‌گوییم هرگاه هر پوشش باز دلخواه آن مانند $\{G_\alpha\}_{\alpha\in I}$ دارای زیرپوشش متناهی باشد یعنی

$$\exists\alpha_1,\dots,\alpha_n\in I;\quad K\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}G_{\alpha_i}$$

امثله. ① هر مجموعه متناهی $K=\{x_1,\dots,x_n\}$ فشرده است.

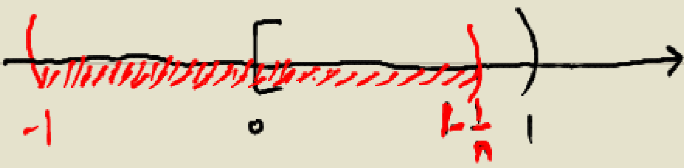
گیریم $\{G_\alpha\}$ یک پوشش باز دلخواه برای K باشد پس

$$\{x_1,\dots,x_n\}\subseteq\bigcup G_\alpha$$

$$\forall 1\le i\le n\ \exists\alpha_i;\quad x_i\in G_{\alpha_i}$$

$$\{x_1,\dots,x_n\}\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}G_{\alpha_i}$$

② $[0,1)$ فشرده نیست. نشان می‌دهیم $[0,1)$ دارای پوششی است بطوری که این پوشش هیچ زیرپوشش متناهی ندارد.



$$[0,1)\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(-1,1-\frac{1}{n}\right)$$

$$x\in[0,1)\Rightarrow x<1\Rightarrow 1-x>0\Rightarrow\exists N;\ \frac{1}{N}<1-x$$

$$\Downarrow$$

خاصیت ارشمیدسی اعداد حقیقی

$$x\in\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(-1,1-\frac{1}{n}\right)\Leftarrow x\in\left(-1,1-\frac{1}{N}\right)\overset{x>0>-1}{\Leftarrow}x<1-\frac{1}{N}$$

$$\forall x>0\ \exists N;\ \frac{1}{N}<x$$

ولی $\left\{\left(-1,1-\frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ زیرپوشش متناهی برای $[0,1)$ ندارد، زیرا اگر $\left\{\left(-1,1-\frac{1}{n_i}\right)\right\}_{1\le i\le k}$

k ... آنگاه

سه‌شنبه ۱۳۸۹/۱۱/۲۶

$$[0,1) \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} \left(-1, 1-\frac{1}{n_i}\right) = \left(-1, 1-\frac{1}{\max\limits_{1\le i\le k} n_i}\right)$$

اگر $1-\dfrac{1}{\max\limits_{1\le i\le k} n_i} < y < 1$ آنگاه

$y \in [0,1)$ ، $y \notin \left(-1, 1-\dfrac{1}{\max\limits_{1\le i\le k} n_i}\right)$

③ تذکر: وقتی $K=X$ فشرده است، می‌گوییم فضای متریک X فشرده است.

اگر فضای متری X با متر گسسته فشرده باشد آنگاه X متناهی است زیرا: $N_{\frac{1}{2}}(p)$

در فضای گسسته هر مجموعه‌ای باز است: $A=\bigcup_{a\in A}\{a\}=\bigcup_{a\in A}\underbrace{N_{\frac{1}{2}}(a)}_{\text{باز}}$

نتیجه بحث بالا این است که در فضای گسسته هر مجموعه‌ای بسته است زیرا اگر A یک مجموعه باشد آنگاه A^c بنابه بحث بالا باز است پس A بسته است.

چون $X=\bigcup_{x\in X}\underbrace{\{x\}}_{\text{باز}}$ پس $\{\{x\}\}_{x\in X}$ یک پوشش باز برای X است. چون بنابه فرض، X فشرده است

پس پوشش (انتخاب شده توسط ما) دارای زیرپوشش متناهی است لذا $X\subseteq\{x_1\}\cup\cdots\cup\{x_n\}\subseteq X$ پس

$X=\{x_1,\dots,x_n\}$ متناهی است. ////

تمرین: ثابت کنید در $\mathbb{R}^n$، هر مجموعه باز اجتماع شمارایی از مجموعه‌های باز جدا از هم است.

④ $K=\{\frac{1}{n}\mid n\in\mathbb{N}\}\cup\{0\}$ فشرده است.

فرض کنیم $\{G_\alpha\}$ یک پوشش باز دلخواه برای K در $\mathbb{R}$ (با متر اقلیدسی) باشد. چون G_αها، K را می‌پوشانند، α_0 هست که $0\in G_{\alpha_0}$.

$\forall n\geq N;\ \frac{1}{n}\leq\frac{1}{N}<r$

چون G_{α_0} باز است پس $\exists r;\ \underbrace{N_r(0)}_{(-r,r)}\subseteq G_{\alpha_0}$. بنابه خاصیت ارشمیدسی اعداد حقیقی، N ای وجود دارد که $\frac{1}{N}<r$.

خاصیت

پس چون $\forall n\geq N;\ \frac{1}{n}\leq\frac{1}{N}$ پس $\forall n\geq N;\ \frac{1}{n}\in N_r(0)\subseteq G_{\alpha_0}$. چون G_αها، K را می‌پوشانند،

$\forall 1\leq i\leq N-1\ \exists G_{\alpha_i};\ \frac{1}{i}\in G_{\alpha_i}$

پس $K\subseteq G_{\alpha_0}\cup G_{\alpha_1}\cup\cdots\cup G_{\alpha_{N-1}}$. پس K فشرده است. □

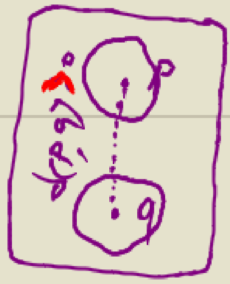
$W=\bigcap^{n} W_{a_i}$

قضیه

قضیه. هر مجموعه فشرده ... بسته است.

لم. اگر $p\neq q$ آنگاه دو مجموعه باز G_1 و G_2 وجود دارد که

$$p\in G_1,\ q\in G_2\ ,\ G_1\cap G_2=\emptyset$$



$$\underbrace{N_{\frac{d(p,q)}{3}}(p)}_{p\in}\cap \underbrace{N_{\frac{d(p,q)}{3}}(q)}_{q\in}=\emptyset$$

$$x\in N_{\frac{d(p,q)}{3}}(p)\cap N_{\frac{d(p,q)}{3}}(q)\Rightarrow \begin{cases} d(p,x)<\frac{d(p,q)}{3}\\ d(q,x)<\frac{d(p,q)}{3}\end{cases}\Rightarrow$$

$$d(p,q)\le d(p,x)+d(q,x)<\frac{2d(p,q)}{3}\ \underset{d(p,q)\neq 0}{\Rightarrow}\ 1<\frac{2}{3}\ \times$$

برهان قضیه. نشان می‌دهیم K^c باز است. بگیریم $p\in K^c$ نقطه‌ای دلخواه (و از حالا به بعد ثابت) باشد.

به ازای هر $q\in K$ بنابه لم بالا،

$$\exists V_q, W_q \text{ باز};\ p\in W_q,\ q\in V_q,\ V_q\cap W_q=\emptyset \quad (1)$$

مشاهده می‌شود که $\{V_q\}_{q\in K}$ پوشش باز برای K است (زیرا به ازای هر $y\in K$، $y\in V_y$). چون K فشرده است پس

$$\exists q_1,\dots,q_n;\ K\subseteq \bigcup_{i=1}^n V_{q_i}$$

قرار می‌دهیم $W=\bigcap_{i=1}^n W_{q_i}$. در این صورت $p\in W$ (بنابه (1))، W باز است (زیرا اشتراک تعداد متناهی مجموعه باز است) به علاوه

$$W\cap K\subseteq W\cap\Big(\bigcup_{i=1}^n V_{q_i}\Big)=\bigcup_{i=1}^n (W\cap V_{q_i})=\bigcup_{i=1}^n\Big[\underbrace{\Big(\bigcap_{j=1}^n W_{q_j}\Big)\cap V_{q_i}}_{\subseteq W_{q_i}\cap V_{q_i}=\emptyset}\Big]\subseteq\emptyset$$

$\therefore W\cap K=\emptyset$

پس $p\in \underset{\text{باز}}{W}\subseteq K^c$. $\square$

قضیه. اگر $F\subseteq K$، K فشرده و F بسته باشد، آنگاه F فشرده است.

زیرمجموعه‌های بسته مجموعه‌های فشرده، فشرده‌اند.

برهان. فرض کنیم $\{G_\alpha\}_{\alpha\in I}$ یک پوشش باز دلخواه برای F باشد. چون F بسته است، F^c باز است.

به علاوه $\{G_\alpha\}_{\alpha\in I}\cup\{F^c\}$، K را می‌پوشاند زیرا

$$\overbrace{\Big(\bigcup G_\alpha\Big)}^{\text{پوششی برای } F}\cup F^c\supseteq F\cup F^c=X\supseteq K$$

چون K فشرده است پس پوشش بالا دارای زیرپوشش متناهی برای K است. بدون آن که خللی به کلیت وارد آید فرض می‌کنیم F^c متعلق به این

پوشش متناهی باشد پس $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n ; \quad K \subseteq G_{\alpha_1} \cup \dots \cup G_{\alpha_n} \cup F^c$

اینک مشاهده می‌شود که $F \subseteq G_{\alpha_1} \cup \dots \cup G_{\alpha_n}$ زیرا

$$x \in F \Rightarrow x \in K \Rightarrow x \in (G_{\alpha_1} \cup \dots \cup G_{\alpha_n}) \cup F^c \xRightarrow{x \notin F^c} x \in G_{\alpha_1} \cup \dots \cup G_{\alpha_n}$$

پس F فشرده است. $\square$

قضیه. فرض کنید (X,d) یک فضای متریک و (Y,d) زیرفضای متریک آن باشد. فرض کنید $K\subseteq Y\subseteq X$ در این صورت K در X فشرده است اگر و تنها اگر K در Y فشرده باشد.

$$\underbrace{V}_{\text{باز در } Y} = Y\cap \underbrace{G}_{\text{باز در } X}$$

برهان: گوییم K در X فشرده باشد. گیریم $\{V_\alpha\}$ یک پوشش باز برای K در Y باشد.

$$K\subseteq \bigcup_\alpha V_\alpha \qquad V_\alpha = Y\cap G_\alpha,\ G_\alpha \text{ باز در } X$$

$$K\subseteq Y\cap\Big(\bigcup_\alpha G_\alpha\Big)\subseteq \bigcup_\alpha G_\alpha$$

$$K\subseteq \bigcup_{i=1}^{n} G_{\alpha_i}$$

$$K = K\cap Y \subseteq \Big(\bigcup_{i=1}^{n} G_{\alpha_i}\Big)\cap Y = \bigcup_{i=1}^{n} \underbrace{(G_{\alpha_i}\cap Y)}_{V_{\alpha_i}}$$

زیرا $K\subseteq Y$

K در Y فشرده است. عکس مطلب به طریق مشابه ثابت می‌شود.

تمرین: $\underbrace{K}_{\text{فشرده}}\cap \underbrace{F}_{\text{بسته}}$ فشرده است.

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{K\cap F}_{\text{بسته}}}_{\text{بسته}} \subseteq \overset{\text{فشرده}}{K}}_{\text{فشرده}}$$

قضیه (خاصیت اشتراک متناهی). اگر $\{K_\alpha\}$ گردایه‌ای از مجموعه‌های فشرده باشد به طوری که اشتراک هر تعداد متناهی از آنها ناتهی باشد آنگاه $\bigcap_\alpha K_\alpha\neq\emptyset$.

برهان خلف. گیریم $\underbrace{\bigcap_\alpha K_\alpha=\emptyset}_{\text{نخ}}$. پس

$$X=\emptyset^c=\Big(\bigcap K_\alpha\Big)^c=\bigcup \underbrace{K_\alpha^c}_{\text{باز}}$$

$\boxed{A\subseteq B^c \Leftrightarrow A\cap B=\emptyset}$ رابطه مهم

($\{K_\alpha^c\}$ پوشش باز برای K_{α_0})

$$\overset{\text{فشرده}}{K_{\alpha_0}}\subseteq X\subseteq \bigcup_\alpha K_\alpha^c$$

(بنا به تعریف فشردگی)

$$\exists\, \alpha_1,\dots,\alpha_n;\quad K_{\alpha_0}\subseteq \bigcup_{i=1}^{n} K_{\alpha_i}^c$$

$$K_{\alpha_0}\subseteq \Big(\bigcap K_{\alpha_i}\Big)^c$$

$$K_{\alpha_0}\cap\Big(\bigcap_{i=1}^{n} K_{\alpha_i}\Big)=\emptyset$$

که خلاف فرض است زیرا فرض قضیه این است که اشتراک هر تعداد متناهی از K_αها، ناتهی است. □

تعریف. فرض کنید (X,d) یک فضای متریک باشد، $A\subseteq X$، مجموعه A را کراندار گوییم هرگاه

$$\operatorname{diam}(A)=d(A):=\sup\{d(x,y)\mid x,y\in A\}<+\infty$$

مجموعه $\{d(x,y)\mid x,y\in A\}$ از بالا کراندار است.
به عبارت دیگر سوپریمم مزبور یک عدد حقیقی است.

قضیه. مجموعه A در فضای متریک (X,d) کراندار است اگر و تنها اگر

$$\exists M>0\ \exists p\in X\ \forall q\in A;\ d(p,q)\le M$$

برهان. $(\Leftarrow)$ فرض کنیم A کراندار باشد یعنی $\alpha=\sup_{x,y\in A} d(x,y)<+\infty$.

فرض کنیم p نقطه‌ای دلخواه ولی از اینجا به بعد ثابت از A باشد و $M=\alpha$، در این صورت

$$\forall q\in A;\quad d(p,q)\le\alpha=M\ .\ ////$$

$(\Rightarrow)$ فرض کنیم $\exists M\,\exists p\in X\,\forall q\in A;\ d(p,q)\le M$. در این صورت برای هر $q,q'\in A$ داریم

$$d(q,q')\le d(q,p)+d(p,q')\le M+M=2M$$

$$\therefore\ d(A)=\sup_{q,q'\in A} d(q,q')\le 2M<+\infty\ .\ \square$$

قضیه. $d(A)=d(\bar A)$.

برهان. (زیرا) $(\le)$

$$A\subseteq\bar A$$

$$\{d(x,y)\mid x,y\in A\}\subseteq\{d(\overset{u}{\cancel{x}},\overset{v}{\cancel{y}})\mid \overset{u}{\cancel{x}},\overset{v}{\cancel{y}}\in\bar A\}$$

$p\in A$

$$\sup\ \Vert\qquad\le\sup\qquad\Vert$$

$$d(A)\le d(\bar A)$$

کراندار، ناتهی

$$C\subseteq D\subseteq\mathbb{R}\ \Rightarrow\ \underbrace{\sup C}_{\alpha}\le\underbrace{\sup D}_{\beta}$$

بنابراین: $\forall x\in C;\ x\le\beta$ (زیرا $x\in D$) پس β کران بالایی برای C است لذا $\sup C\le\beta$ چون sup کوچکترین کران بالاست.

برهان خلف: $\underline{\beta<\alpha}\Rightarrow\exists x\in C;\ \beta<x\le\alpha\ \overset{C\subseteq D}{\Longrightarrow}\ x\in D\ \&\ \beta<x$ ✗. تناقض

$(\ge)$ فرض کنیم $\bar p,\bar q\in\bar A$، فرض کنیم $\varepsilon>0$. کاملا دلخواه

بنابه تعریف نقطه چسبندگی،

$$N_\varepsilon(\bar p)\cap A\neq\emptyset$$

$$N_\varepsilon(\bar q)\cap A\neq\emptyset$$

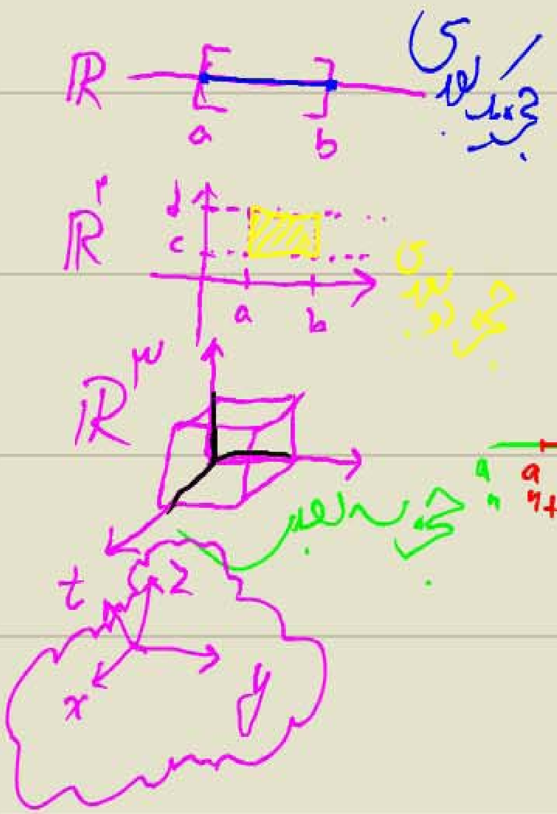
$$\exists p,q\in A;\ d(p,\bar p)<\varepsilon\ \&\ d(q,\bar q)<\varepsilon$$

$$d(\bar p,\bar q)\le d(\bar p,p)+d(p,q)+d(q,\bar q)<\varepsilon+d(A)+\varepsilon$$

یک کران بالا برای $d(\bar p,\bar q)$ها

$$\therefore\ d(\bar A)\le 2\varepsilon+d(A)$$

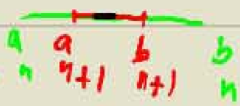
اگر $\varepsilon\to0$، در این صورت $d(\bar A)\le d(A)$. $\square$



تعریف. فرض کنیم $a_i < b_i$ $(i=1,\dots,k)$. در این صورت

$$\prod_{i=1}^{k}[a_i,b_i]=\{(x_1,\dots,x_k) \mid a_i \le x_i \le b_i\ \ \forall 1\le i\le k\}$$

را یک حجره k-بعدی می‌گویند.



لم ۱. فرض کنیم برای هر n، $a_n \le a_{n+1} \le b_{n+1} \le b_n$. در این صورت $\emptyset \neq \bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$.

برهان) $\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n] \overset{?}{\supseteq} [\sup_n a_n, \inf_n b_n] \neq \emptyset$

ممکن است $\sup_n a_n = \inf_n b_n$

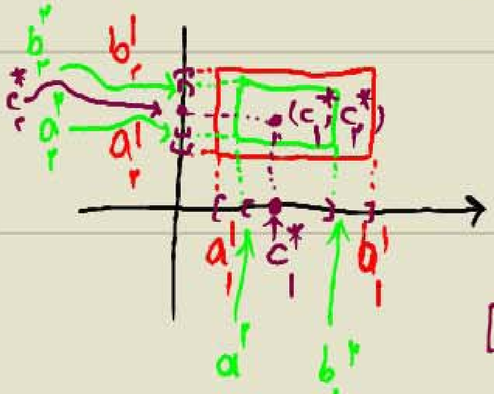
نشان می‌دهیم برای هر n: $a_n \le \sup_m a_m \le b_n$ ؛ چون هر b_n یک کران بالا برای a_mها است. پس

$\inf_m b_m$

$\sup_m a_m \le b_n$. بیان مشابهی در مورد b_m و $\inf_m b_m$ وجود دارد. ∎

لم ۲. اگر برای هر n، $I_n = \prod_{i=1}^{k}[a_i^n, b_i^n]$ یک حجره k-بعدی باشد و $I_n \supseteq I_{n+1}$، آنگاه

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$$

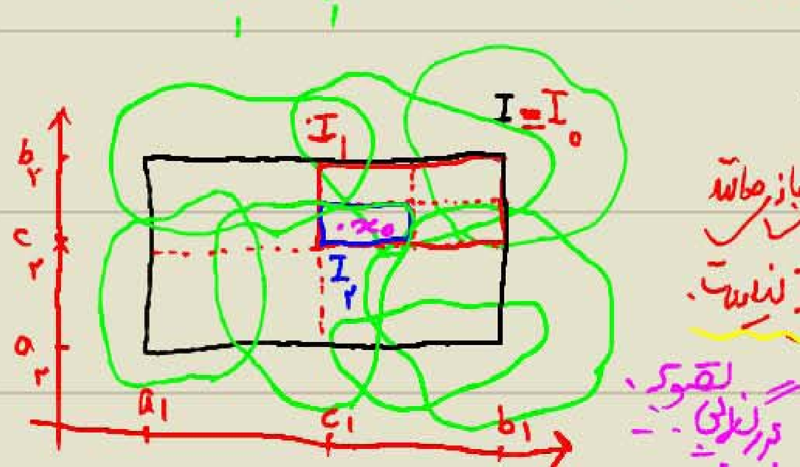


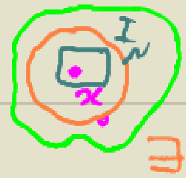
برهان) بنابر لم ۱، $\forall 1\le i\le k\ \exists c_i^*;\ \bigcap_{n=1}^{\infty}[a_i^n,b_i^n] \ni c_i^*$

پس $(c_1^*,\dots,c_k^*) \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$ ∎

قضیه (مهم). هر حجره k-بعدی I فشرده است.

برهان خلف. فرض کنیم I فشرده نباشد. یک پوشش باز مانند $\{G_\alpha\}$ وجود دارد که دارای هیچ زیرپوشش متناهی برای I نیست.





$\exists r,\ N_r(x_0)\subseteq G_{\alpha_0}$

با در نظر گرفتن نقطهٔ وسط هر یک از بازه‌هایی که حاصلضرب دکارتی آنها I را بوجود می‌آورد، I به 2^k حجرهٔ k بعدی تقسیم می‌شود. حداقل یکی از این حجره‌های k بعدی حاصل توسط تعداد متناهی از G_αها پوشیده نمی‌شود (زیرا اگر هر یک از آنها توسط تعداد متناهی از G_αها پوشیده شود آنگاه اجتماع آنها که همان I است توسط تعداد متناهی از G_αها پوشیده می‌شود که خلاف فرض ما است). این حجره را I_1 می‌نامیم.

دوباره I_1 را به 2^k حجره تقسیم نموده و یکی از آنها را که توسط تعداد متناهی از G_αها پوشیده نمی‌شود، I_2 می‌نامیم.

$I_0\supseteq I_1\supseteq I_2\supseteq\cdots$ با ادامهٔ این روند به یک دنباله تودرتو به صورت زیر (که هیچ‌یک توسط تعداد متناهی از G_αها پوشیده نمی‌شود) از حجره‌های k بعدی دست می‌یابیم. ضمناً با به یاد آوردن اگر $\delta=d(I)=\sqrt{\sum_{i=1}^{k}(b_i-a_i)^2}$ آنگاه

$$d(I_n)=\frac{\delta}{2^n}\ \text{. چون}\ \lim_{n\to\infty} d(I_n)=0\ \text{پس}$$

$$\exists N;\ \frac{\delta}{2^N}<r$$

آنگاه معلوم می‌شود که $x_0\in I_N\subseteq N_r(x_0)\subseteq G_{\alpha_0}$

$$x\in I_N \xRightarrow{x_0\in I_N} d(x,x_0)<d(I_N)=\frac{\delta}{2^N}<r \Rightarrow x\in N_r(x_0)$$

پس گردآیهٔ متناهی (تک عضوی) $\{G_{\alpha_0}\}$ حجرهٔ I_N را می‌پوشاند که خلاف ساختار I_N است. X . □

لم. در $\mathbb{R}^n$، یک مجموعه کراندار است اگر و فقط اگر مشمول در یک حجرهٔ k بعدی باشد.

برهان. اگر مجموعهٔ A مشمول در یک حجرهٔ k بعدی I باشد، آنگاه چون هر حجرهٔ k بعدی کراندار است (به اثبات قضیه مراجعه شود که در آن $d(I)=\sqrt{\sum_{i=1}^{k}(b_i-a_i)^2}$) پس A نیز کراندار است.

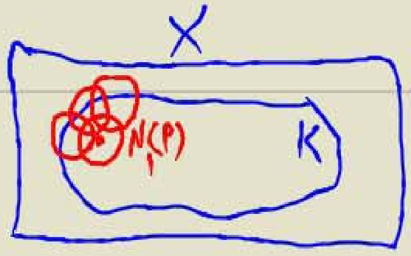
بالعکس، گیریم A کراندار باشد. پس $\exists P\ \exists\alpha\ \forall x\in A;\ d(x,P)\leqslant\alpha$. در واقع می‌توان P را با مبدأ 0 عوض کرد زیرا

$$\underbrace{d(x,0)}_{\|x\|\ \text{نرم اقلیدسی}}\leq d(0,P)+d(P,x)\leq \underbrace{d(0,P)+\alpha}_{\text{عدد ثابت}\ M}$$

همچنین می‌توان نشان داد $A\subseteq\prod_{i=1}^{k}[-M,M]$

$$x=(x_1,\cdots,x_k)\in A\Rightarrow d(x,0)\leq M\xRightarrow{|x_i|\leq}\sqrt{|x_1|^2+\cdots+|x_k|^2}\leq M\Rightarrow\forall_{1\leq i\leq k}\ |x_i|\leq M\Rightarrow\forall_{i\leq k}\ x_i\in[-M,M]$$

$$\Rightarrow x\in\prod_{i=1}^{k}[-M,M].\ \square$$

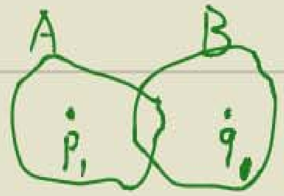


قضیه. هر مجموعه فشرده، کراندار است.

برهان. $\{N_1(p)\}_{p\in K}$ یک پوشش باز برای K است. چون K فشرده است

$$\exists p_1,\dots,p_n\in K;\quad K\subseteq \bigcup_{i=1}^{n} N_1(p_i)$$

بنابه نکته ذیل، اجتماع تعداد متناهی همسایگی (تعداد متناهی مجموعه کراندار)، کراندار است پس K نیز کراندار است. □



نکته ۱. اجتماع دو مجموعهٔ کراندار A و B، کراندار است.

برهان ۱.

$$\forall x\in A;\ d(x,p_1)\le d(A) \quad ✓$$
$$\forall y\in B;\ d(y,q_1)\le d(B) \quad ✓$$

$$\forall z\in A\cup B;\quad d(p_1,z)\le\begin{cases} d(A) & z\in A\\ d(p_1,q_1)+d(q_1,z)\le d(p_1,q_1)+d(B) & z\in B\end{cases}\le d(A)+d(B)+d(p_1,q_1)$$

برهان ۲

$$\forall u,v\in A\cup B;\quad d(u,v)\le d(u,p_1)+d(p_1,q_1)+d(q_1,v)\le \underbrace{d(A)+d(p_1,q_1)+d(B)}_{\text{یک کران بالا}}$$

$$\therefore\ d(A\cup B)\le \dots <\infty.\ \square$$

نکته ۲. هر همسایگی یک مجموعه کراندار است زیرا $\forall x\in N_r(p);\ d(x,p)<r$ یا

می توان گفت که در واقع $d(N_r(p))\le 2r$.

قضیه. در $\mathbb{R}^n$ با متر اقلیدسی، یک مجموعه K فشرده است $\Longleftrightarrow$ اگر و فقط اگر بسته و کراندار باشد. (هاینه بورل)

مهم

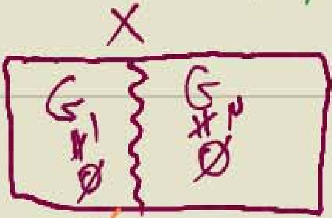
برهان. ($\Leftarrow$) اگر K فشرده باشد بنابه قضیه بالا، کراندار است و بنابه قضیه "مشهور"... بسته است.

($\Rightarrow$) فرض کنیم K بسته و کراندار باشد. چون K کراندار است بنابه لم "مشهور"... (بسته، عجب)، یک حجره I وجود دارد که $\underset{\text{بسته}}{K}\subseteq\underset{\text{فشرده}}{I}$. پس K فشرده است. □

مترجم کتاب: جرم روانی: کامل

اگر $A=A'$ ، A را "کامل است" Perfect می‌گوییم.

مثال. مجموعه های روبرو در $\mathbb{R}$، فشرده نیستند: $[0,\infty)$ ، $(0,1]$ ، $(0,1)$ ، $(0,+\infty)$.

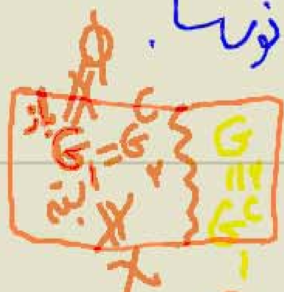


تعریف. فضای متریک (X,d) را ناهمبند می گوییم هرگاه X را بتوان به صورت اجتماع دو مجموعه باز ناتهی جدا از هم نوشت. در غیر این صورت X را همبند (مرتبط) می گوییم.

فرض کنیم X ناهمبند باشد، پس $\exists \overset{\text{باز}}{G_1}, \overset{\text{باز}}{G_2} \neq \emptyset ; \; G_1\cap G_2=\emptyset , \; X=G_1\cup G_2$

با در نظر گرفتن $\underset{\text{بسته}}{F_1}=G_1^c \neq\emptyset$ و $\underset{\text{بسته}}{F_2}=G_2^c\neq\emptyset$ داریم $F_1\cap F_2=\emptyset$, $F_1\cup F_2=X$. پس می توان گفت:

X همبند است اگر نتوان X را به صورت اجتماع دو مجموعه بسته ناتهی جدا از هم نوشت.



با در نظر گرفتن $\exists \overset{\text{باز، بسته}}{G_1}\neq\emptyset$ ~~$G_2\neq\emptyset$~~ ~~$X=G_1\cup G_2$~~ G_1^c ، $X\neq$ سره

می توان گفت: X ناهمبند است اگر X شامل یک مجموعه بسته‌باز (clopen، هم باز هم بسته) ناتهی باشد.

مثال) در X با متر گسسته هر مجموعه‌ای بسته‌باز است پس X ناهمبند است اگر بیشتر از یک نقطه داشته باشد.

تعریف. مجموعه A از فضای متریک (X,d) را همبند می گوییم هرگاه (زیرفضای متریک) (A,d) همبند باشد.

پروژه (تحویل: ۸۹/۱۲/۲۱) در $\mathbb{R}$ با متر اقلیدسی، یک مجموعه A همبند است اگر و فقط اگر به صورت یک بازه باشد: $(-\infty,+\infty), (a,b), (a,b], [a,b), [a,b], (a,+\infty), [a,+\infty), (-\infty,b), (-\infty,b]$

نکته: در فضای متریک (X,d)، مجموعه A ناهمبند است اگر و فقط اگر

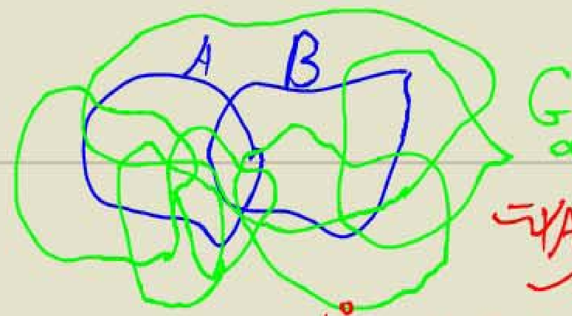
$$\exists E,F\subseteq X \; (\neq\emptyset) ; \; A=E\cup F , \; \bar{E}\cap F=\emptyset=E\cap\bar{F}$$

(E، F را مجموعه‌های از هم ~~جدا شده~~ منفک می نامند)

تمرین ۱. فرض کنید A و B در فضای (X,d) فشرده باشند. ثابت کنید $A\cup B$, $A\cap B$ نیز فشرده‌اند ولی $A-B$ در حالت کلی فشرده نیست.

ولی لزوماً نیست — نه همواره $A-B$ فشرده باشد

حل. چون A و B فشرده‌اند، پس هر دو بسته‌اند. لذا $A\cap B$ بسته است. اما $A\cap B\subseteq A$ و A فشرده، پس بسته در فشرده، $A\cap B$ فشرده است.



فرض کنیم $\{G_\alpha\}_{\alpha\in I}$ یک پوشش باز دلخواه برای $A\cup B$ باشد.

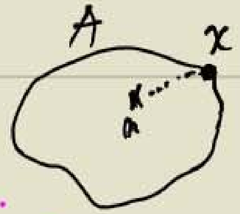
پس $A\cup B\subseteq\bigcup_{\alpha\in I}G_\alpha$. پس $\{G_\alpha\}$ پوشش باز برای A است. ($A\subseteq$, $B\subseteq$)

چون A فشرده است پس $\exists\alpha_1,\dots,\alpha_n\in I;\ A\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}G_{\alpha_i}$. به دلیل مشابه:

$$\exists\alpha_{n+1},\dots,\alpha_m\in I;\ B\subseteq\bigcup_{i=n+1}^{m}G_{\alpha_i}$$

پس $A\cup B\subseteq\bigcup_{i=1}^{m}G_{\alpha_i}$. لذا $A\cup B$ فشرده است.

اگر $A=[0,2]$, $B=[0,1]$ که فشرده‌اند، آنگاه $A-B=(1,2]$ نافشرده است.



تمرین.

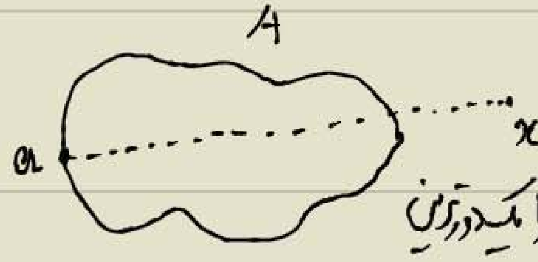
$$x\in\bar{A}\iff\underbrace{\inf_{a\in A}d(x,a)}=0$$

$d(x,A)$ فاصله نقطه x تا مجموعه A

حل: $(\Rightarrow)$ فرض کنیم $x\in\bar{A}$. اولاً $\forall a\in A;\ d(x,a)\geq 0$ – ثانیاً برای $\varepsilon>0$، چون x نقطه چسبندگی A است پس $N_\varepsilon(x)\cap A\neq\emptyset$ یعنی $\exists a\in A;\ d(x,a)<0+\varepsilon$.

$$\therefore\ \inf\{d(x,a):a\in A\}=0$$

$(\Leftarrow)$ فرض کنیم $\inf_{a\in A}d(x,a)=0$. فرض کنیم $N_r(x)$ یک همسایگی دلخواه x باشد. بنا به خاصیت مشخصه اینفیمم، $\exists a\in A;\ d(x,a)<r+0$ یعنی $N_r(x)\cap A\neq\emptyset$. لذا $x\in\bar{A}$. $\square$



تعریف. $F(x,A)=\sup_{a\in A} d(x,a)$ دورترین فاصله‌ی a تا x

اگر $a_0\in A$ ای باشد که $F(x,A)=d(x,a_0)$، آن گاه a_0 را یک دورترین نقطه‌ی A از x می‌گویند.

$d(x,A)=1=d(x,a_0),\ \forall a_0\in A$

$F(x,A)=1=F(x,a_0),\ \forall a_0\in A$

$$d(x,A)=\inf_{a\in A}|x-a|=\begin{cases}x-1 & x>1\\ 0 & x\in A\\ -x & x<0\end{cases}$$

$$F(x,A)=\sup_{a\in A}|x-a|=\begin{cases}x & x\geq 1\\ \max\{x,1-x\} & x\in A\\ -x+1 & x<0\end{cases}$$

تمرین. فرض کنید $A\subseteq X$ ، $x\in X$. در این صورت $F(x,A)<+\infty$ اگر و تنها اگر A کراندار باشد.

توجه کنید که همیشه $d(x,A)<+\infty$ زیرا مجموعه‌ی $d(x,a)$ها از پایین کراندار به ۰ است.

حل. $(\Leftarrow)$ فرض کنیم $F(x,A)<+\infty$ پس $\forall a\in A;\ d(x,a)\leq F(x,A)$ پس A کراندار است.

$(\Rightarrow)$ بالعکس فرض کنیم A کراندار باشد. پس $\sup_{a,b\in A} d(a,b)=d(A)<+\infty$. گیریم $b\in A$ یک نقطه‌ی دلخواه ولی از حالا به بعد ثابت باشد.

$$d(x,a)\leq d(x,b)+d(a,b)\leq \underbrace{d(x,b)+d(A)}_{\text{یک کران بالا}}$$

$$\overbrace{\sup_{a\in A} d(x,a)}^{F(x,A)}<+\infty.\ \square$$

تعریف. دو شیء ریاضی که عدد حقیقی نیستند به نام‌های $+\infty$، $-\infty$ را به $\mathbb{R}$ اضافه می‌کنیم:

$\overline{\mathbb{R}}^*=\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ (دستگاه اعداد حقیقی توسیع یافته)

قرارداد مهم: $\forall x\in\mathbb{R};\ -\infty<x<+\infty$

همچنین قرارداد مهم: $+\infty+x=+\infty$ ، $+\infty+(+\infty)=+\infty$ ، $a\cdot(\pm\infty)=\begin{cases}\mp\infty & a<0\\ \pm\infty & a>0\end{cases}$ ... ولی $+\infty-(+\infty)$ ، $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ ، ... تعریف نمی‌شوند.

همچنین در $\overline{\mathbb{R}}^*$ هر مجموعه از بالا کراندار (به $+\infty$) است. پس هر مجموعه سوپریمم دارد. $\sup A=\begin{cases}\in\mathbb{R} & \text{اگر } A \text{ در } \mathbb{R} \text{ از بالا کراندار}\\ +\infty & \text{در غیر این صورت}\end{cases}$. بحث‌های sup، inf را هم دوباره می‌نویسیم ...

دستگاه وسعت یافته اعداد حقیقی

تعریف. فرض کنیم $+\infty$ و $-\infty$ دو شئ، یا چیز باشند که اعداد حقیقی نیستند. قرار می‌دهیم $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$

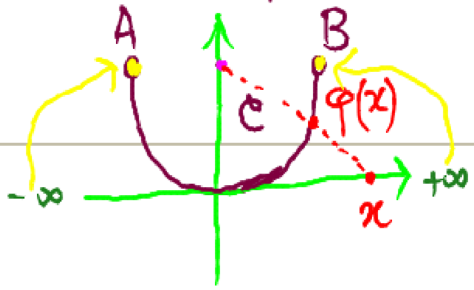
اعم از هر چیزی است: زنده، غیر زنده، ذهنی، عینی

$$-\infty \xrightarrow{\quad \mathbb{R} \quad} +\infty$$

$$\forall r\in\mathbb{R};\ -\infty < r < +\infty$$

همچنین $+\infty + r = +\infty$ ، $-\infty + (-\infty) = -\infty$ ، ...

هر مجموعه‌ای از $\mathbb{R}$، در $\mathbb{R}^*$ از بالا به $+\infty$ و از پایین به $-\infty$ کراندار است، ولذا هر زیرمجموعه در $\mathbb{R}^*$ در $\mathbb{R}^*$ کراندار است.



$$\begin{cases} \varphi: \mathbb{R} \xrightarrow[\text{برو}]{1-1} C \\ x \longmapsto \varphi(x) \end{cases}$$

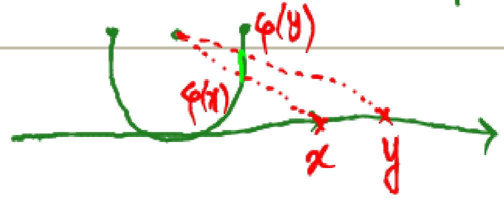
می‌توان تابع جدید ۱-۱ و پوشا $\tilde\varphi$ را به صورت ذیل تعریف کرد:

$$\tilde\varphi: \mathbb{R}^* \longrightarrow C\cup\{A,B\}$$ مجموعه فشرده در $\mathbb{R}^2$

$$\tilde\varphi(x)=\begin{cases}\varphi(x) & x\in\mathbb{R}\\ B & x=+\infty\\ A & x=-\infty\end{cases}$$

تمرین ساده. اگر $\varphi: X \to (Y,d)$ مجموعه، یک تابع ۱-۱ (و پوشا) باشد آنگاه $r(x,y)=d(\varphi(x),\varphi(y))$ آنگاه r یک متر روی X است.

بنابه تمرین بالا، متر اقلیدسی روی $C\cup\{A,B\}$ یک متر جدید روی $\mathbb{R}^*$ به دست می‌دهد:



چون $\tilde\varphi$ یک به یک و پوشا است و $C\cup\{A,B\}$ فشرده است، $\mathbb{R}^*$ با متر جدید فشرده می‌شود.

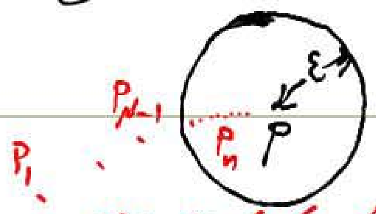
بخش دوم: دنباله‌ها

تعریف. یک تابع روی $\mathbb{N}$ را یک دنباله می‌گویند. در این درس دنباله‌ها توابعی از $\mathbb{N}$ به توی یک فضای متریک (اگر ذکر نشوند) می‌باشند.

اگر $f:\mathbb{N}\to X$, $n\mapsto f(n)$ یک دنباله باشد و $P_n=f(n)$. آنگاه f را با $\{P_n\}$ و از نقاط $P_1,P_2,\dots$ هم برد f یعنی $\{P_1,P_2,\dots\}$ را برد دنباله می‌گویند.

تعریف: دنباله $\{p_n\}$ در فضای متریک (X,d) را همگرا به نقطه $p\in X$ می‌گوییم هرگاه

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists N>0,\ \forall n\ge N;\ d(p_n,p)<\varepsilon$$



به عبارت دیگر حداکثر تعداد متناهی از p_nها خارج همسایگی قرار گیرند.

قضیه: حد دنباله در صورت وجود منحصر به فرد است.

برهان: فرض کنیم $\{p_n\}$ دارای دو حد p, q باشد و فرض کنیم $p\neq q$ (خلف). بنابه تعریف ۱۵

$$\exists N_1\ \forall n\ge N_1;\ d(p_n,p)<\frac{d(p,q)}{3}$$

$$\exists N_2\ \forall n\ge N_2;\ d(p_n,q)<\frac{d(p,q)}{2}$$

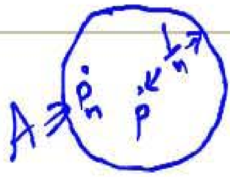
پس $d(p_{2N_1+N_2},p)<\frac{d(p,q)}{3}$, $d(p_{2N_1+N_2},q)<\frac{d(p,q)}{2}$. لذا

$$d(p,q)\le d(p_{2N_1+N_2},p)+d(p_{2N_1+N_2},q)<\frac{d(p,q)}{3}+\frac{d(p,q)}{2}=\frac{5}{6}d(p,q)$$

پس $1<\frac{5}{6}$. ✗ . □

قضیه: فرض کنیم $p\in X$, $A\subseteq X$. در این صورت $p\in\bar{A}$ اگر و فقط اگر دنباله‌ای مانند $\{p_n\}$ در A وجود داشته باشد که $p_n\to p$.

برهان: فرض کنیم $p\in\bar{A}$.



$$\forall n\ \exists p_n\in A;\ \underbrace{p_n\in N_{\frac{1}{n}}(p)\cap A}_{0\le d(p_n,p)<\frac{1}{n}}$$

گیریم $\varepsilon>0$. بنابه ح.۱.۱.ح پس $\exists N;\ \frac{1}{N}<\varepsilon$

$$\forall n\ge N;\ d(p_n,p)<\frac{1}{n}\le\frac{1}{N}<\varepsilon$$

پس $p_n\to p$. ////

بالعکس فرض کنیم $p_n\in A$, $p_n\to p$. گیریم $N(p)$ یک همسایگی دلخواه از p باشد. بنابه تعریف ۱۵

$$\exists N\ \forall n\ge N;\ d(p_n,p)<r$$

$$p_N\in N(p)\cap A\neq\emptyset.$$

پس $p\in\bar{A}$. □

نتیجه. A بسته است اگر و فقط اگر به ازای هر $\underbrace{\text{دنباله } \{p_n\} \text{ در } A}_{\forall n;\ p_n\in A}$ که $p_n \xrightarrow{X} p$، داشته باشیم $p\in A$.

برهان. ($\Leftarrow$) فرض کنیم A بسته باشد. فرض کنیم $\{p_n\}$ دنباله‌ای در A باشد، $p\in X$، $p_n\to p$. بنا به قضیه قبل، $p\in\bar{A}=A$. ////

($\Rightarrow$) فرض کنیم $p\in\bar{A}$. بنا به قضیه بالا، دنباله‌ای مانند $\{p_n\}$ در A وجود دارد که $p_n\to p$. بنا به فرض ما، $p\in A$. $\square$

$\bar{A}\subseteq A$

تمرین. $p\in A'$ اگر و فقط اگر دنباله‌ای مانند $\{p_n\}$ در A باشد که $p_n\to p$ & $\forall n;\ p_n\neq p$.

قضیه. اگر $\lim_n p_n = p$ آنگاه $\{p_n\}$ کراندار است یعنی برد آن کراندار است.

برهان.

$$\exists N\ \forall n\geq N;\ d(p_n,p)<1$$

$$\forall n;\quad \underset{q}{d(p_n,\underset{m}{p})}\leq \underbrace{\max\{1,\ d(p_1,p),\ d(p_2,p),\dots,\ d(p_{N-1},p)\}}_{M}.\ \square$$

تعریف. دنباله $\{p_n\}$ را کوشی می‌گوییم هرگاه

$$\forall\varepsilon\ \exists N\ \forall m,n\geq N;\ d(p_n,p_m)<\varepsilon$$

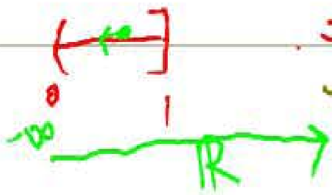
قضیه. هر دنباله همگرا، کوشی است.

برهان. گیریم $\lim_{n\to\infty} P_n = P$ و $\varepsilon>0$ دلخواه. پس $\exists N\ \forall k\geq N;\ d(P_k,P)<\frac{\varepsilon}{2}$

$$\forall m,n\geq N;\ d(P_n,P_m)\leq d(P_n,P)+d(P_m,P)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\ \square$$

عکس مطلب بالا درست نیست.

مثال) $\{\frac{1}{n}\}$ در $\mathbb{R}$ به 0 همگراست ولی $\{\frac{1}{n}\}$ در $(0,1]$ (متر نسبی) واگراست.



ح) گیریم $\frac{1}{n}\to q$ در $(0,1]$ پس
$\forall\varepsilon\ \exists N\ \forall n\geq N;\ |\frac{1}{n}-q|<\varepsilon$

پس $\frac{1}{n}\to q$ در $\mathbb{R}$. اما در $\mathbb{R}$، $\frac{1}{n}\to 0$

پس $q=0$. ✗

$\{\frac{1}{n}\}$ در $\mathbb{R}$ کوشی است پس
$\forall\varepsilon\ \exists N\ \forall m,n\geq N\ |\frac{1}{n}-\frac{1}{m}|<\varepsilon$
این تعریف وقتی $\{\frac{1}{n}\}$ را به عنوان دنباله‌ای در $(0,1]$ در نظر می‌گیریم، صادق است پس

$\{\frac{1}{n}\}$ در $(0,1]$ کوشی است.

تمرین. هر دنباله کوشی، کراندار است.

تعریف. فضای متریک (X,d) را کامل (تام) می‌گوییم هرگاه هر دنباله کوشی در آن، همگرا باشد.
Complete

قضیه (مهم). هر فضای متریک فشرده، کامل است.

لم ۱. دنباله $\{p_n\}$ در (X,d) کوشی است اگر و فقط اگر $\lim_{N\to\infty}\operatorname{diam}(E_N)=0$ که در آن
$E_N=\{P_N,P_{N+1},\dots\}$

برهان. فرض کنیم $\{p_n\}$ در (X,d) کوشی باشد و $\varepsilon>0$ داده شده.

$$\underbrace{\exists N_0\ \forall m,n\geq N_0;\ d(P_n,P_m)<\frac{\varepsilon}{2}}$$

$\frac{\varepsilon}{2}$ یک کران بالا برای $\{d(x,y)\mid x,y\in E_{N_0}\}$

$$d(E_{N_0}) = \sup_{x,y\in E_{N_0}} d(x,y) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\forall N\ge N_0;\ |d(E_N) - 0| \le d(E_{N_0}) < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \qquad (N\ge N_0 \Rightarrow E_N \subseteq E_{N_0})$$

لذا $\lim_{N\to\infty} d(E_N)=0$. ////

p,q گزاره‌ها کی خواهند: $p\Rightarrow(q\Rightarrow r) \equiv (p\wedge q)\Rightarrow r$

گیریم $\lim_{N\to\infty} d(E_N)=0$ و $\varepsilon>0$ داده شده باشد. پس

$$\exists N_0\ \forall N\ge N_0;\ |d(E_N)-0|<\varepsilon$$

لذا $d(E_{N_0})<\varepsilon$ پس

$$\forall x,y\in E_{N_0};\ d(x,y)\le d(E_{N_0})<\varepsilon$$

به عبارت دیگر

$$\forall m,n\ge N_0;\ d(P_n,P_m)<\varepsilon\ . \ \square$$

تخصیص:

$$\frac{\forall x;\ F(x)}{\therefore F(a)}$$

$\sup\emptyset$ چیست؟

هر $a\in\mathbb{R}^*$ یک کران بالای $\emptyset$ است:

$$\forall x;\ (\underbrace{x\in\emptyset}_{F} \Rightarrow x\le a)$$

کوچکترین عدد در $\mathbb{R}^*$ ، $-\infty$ است لذا

$$\sup\emptyset=-\infty$$

نکته: اگر $d(A)=0$ آنگاه A تک عضوی است زیرا ($A\neq\emptyset$).

$$\sup_{x,y\in A} d(x,y)=d(A)=0$$

$$\forall x,y\in A;\ d(x,y)=0$$

$$\forall x,y\in A;\ x=y$$

A تک عضوی است.

تمرین حل شده: فرض کنیم (X,d) یک فضای متری فشرده باشد و $\{P_n\}$ در X کوشی باشد ...

قرار می‌دهیم $E_N=\{P_N, P_{N+1},\dots\}$

پس $\lim_{N\to\infty} d(\bar E_N)=\lim_{N\to\infty} d(E_N)=0$

از طرفی $E_1\supseteq E_2\supseteq\cdots$ پس $\bar E_1\supseteq \bar E_2\supseteq\cdots$. ضمناً خانواده $\{\bar E_N\}_{N=1}^{\infty}$ دارای خاصیت اشتراک متناهی است زیرا $\bigcap_{i=1}^{k}\bar E_{n_i}=\bar E_{\max_{1\le i\le k} n_i}\neq\emptyset$. بنابر قضیه ... $\bigcap_{i=1}^{\infty}\bar E_i\neq\emptyset$

فرض کنیم $p\in\bigcap_{i=1}^{\infty}\bar{E}_i$ ؛ نشان می‌دهیم $p_n\to p$ وقتی $n\to\infty$:

گیریم $\varepsilon>0$ داده شده باشد. چون $\lim_{N\to\infty} d(\bar{E}_N)=0$ بنابر تعریف حد

$$\exists N_0 \quad d(\bar{E}_{N_0})<\varepsilon$$

$$\sup_{x,y\in\bar{E}_{N_0}} d(x,y)<\varepsilon$$

$\forall n\geq N_0: p_n\in E_n\subseteq\bar{E}_{N_0}$, $p\in\bar{E}_{N_0}$

$$\forall n\geq N_0;\ d(p_n,p)\leq d(\bar{E}_{N_0})<\varepsilon.\ \square$$

قضیه: R^n (فضای n بعدی) کامل است.

برهان. فرض کنیم $\{x_n\}$ کوشی باشد. پس $\{x_n\}$ کراندار است یعنی برد آن $\{x_1,x_2,\dots\}$ کراندار است. لذا $\{x_1,x_2,\dots\}$ مشمول در یک حجره n بعدی I است. اما حجره‌ها فشرده‌اند. پس بنابه قضیه بالا دنباله $\{x_n\}$ در I همگرا است. لذا $\{x_n\}$ در R همگرا است. $\square$

قضیه. زیرمجموعه F از فضای متریک کامل (X,d) بسته است اگر و فقط اگر (F,d) کامل باشد.

برهان. ($\Leftarrow$) فرض کنیم F بسته باشد. گیریم $\{p_n\}$ یک دنباله کوشی در (F,d) باشد.

$$\forall\varepsilon\,\exists N\,\forall m,n\geq N;\ d(p_n,p_m)<\varepsilon$$

رابطه اخیر نشان می‌دهد که $\{p_n\}$ در (X,d) کوشی است. چون (X,d) کامل است پس

$$\exists p\in X;\ \lim_n p_n=p$$

چون p_nها در F اند و F بسته است پس $p\in F$. لذا $\{p_n\}$ در (F,d) به p همگرا است. لذا (F,d) کامل است.

($\Rightarrow$) فرض کنیم (F,d) کامل باشد. برای اینکه نشان دهیم F بسته است، دنباله $\{p_n\}$ در F را در نظر می‌گیریم که به نقطه $p\in X$ همگرا است (نشان می‌دهیم $p\in F$). پس $\{p_n\}$ در (X,d) کوشی است. لذا $\{p_n\}$ در (F,d) کوشی است. چون (F,d) کامل است، نقطه $q\in F$ وجود دارد که $\lim_n p_n=q$ در (F,d). پس $\lim_n p_n=q$ در (X,d). لذا $p=q\in F$. لذا F بسته است. $\square$

تمرین: فرض کنید $\underline{x}_n = (x_{1,n}, x_{2,n}, \dots, x_{k,n}) \in \mathbb{R}^k$ و $\underline{a} = (a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{R}^k$. ثابت کنید $\underline{x}_n \to \underline{a}$ در $\mathbb{R}^k$ اگر و فقط اگر $\forall 1\le i\le k;\ x_{i,n} \to a_i$ در $\mathbb{R}$.

حالت $k=2$: $(x_n, y_n) \to (a,b)$ اگر و فقط اگر $x_n \to a$ & $y_n \to b$

حل: فرض کنیم $\underline{x}_n \to \underline{a}$ و $1 \le i \le k$ را مقدار دلخواه و از حالا به بعد ثابت بگیرید و $\varepsilon>0$ داده شده باشد. بنابه تعریف ۱۰

$$\exists N\ \forall n\ge N;\ d(\underline{x}_n,\underline{a})<\varepsilon$$

$|x_{i,n}-a_i| \le$ (نامساوی)

پس $x_{i,n}\to a_i$ ////

$$|x_i-y_i| = \sqrt{(x_i-y_i)^2} \le d(\underline{x},\underline{y}) = \sqrt{(x_1-y_1)^2+\dots+(x_k-y_k)^2} \le \sum_{i=1}^{k} |x_i-y_i|$$

نامساوی P۲ در $\mathbb{R}^k$

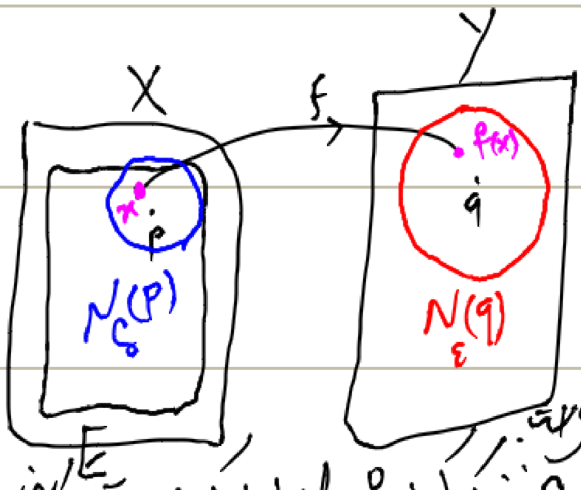
بالعکس، فرض کنیم برای هر i، $x_{i,n}\to a_i$ و $\varepsilon>0$ داده شده باشد. بنابه تعریف ۱۰،

$$\forall 1\le i\le k\ \exists N_i\ \forall n\ge N_i;\ |x_{i,n}-a_i|<\frac{\varepsilon}{k}$$

پس چنانچه $N = N_1+2N_2+\dots+kN_k$ داریم

$$\forall n\ge N;\quad n\ge N_i\ (1\le i\le k) \Rightarrow |x_{i,n}-a_i|<\frac{\varepsilon}{k}\ (i=1,2,\dots,k) \Rightarrow d(\underline{x}_n,\underline{a}) \le \sum_{i=1}^{k} |x_{i,n}-a_i| < \sum_{i=1}^{k} \frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon \quad \square$$

(نامساوی)



بحث حد و پیوستگی

تعریف: فرض کنیم $f: \underset{D_f}{E} \subseteq X \to Y$ تابعی باشد (فضاهای متری) و $p\in E'$ (نقطه حدی E است p)، $q\in Y$، می‌گوییم $\lim_{x\to p} f(x)=q$ هرگاه هر قدر بخواهیم بتوانیم مقادیر $f(x)$ را به q نزدیک کنیم مشروط بر این که x به قدر کافی به p نزدیک شده باشد، یعنی

$$\forall N_\varepsilon(q)\ \exists N_\delta(p)\ \forall_{x\in E,\ x\neq p};\ x\in N_\delta(p) \Rightarrow f(x)\in N_\varepsilon(q)$$

تذکر: $2x+1=7$

دو راه برای تبدیل گزاره‌نما به گزاره داریم: الف) به جای متغیر، عنصر خاصی از مجموعه مرجع قرار داده شود. ب) از سورهای عمومی و وجودی استفاده شود.

$\exists x;\ 2x+1=7$ یا $\forall x;\ 2x+1=7$ — متغیر پابند (ظاهری)

متغیری که همراه یک سور بیاید در دامنه عمل آن سور است را متغیر پابند (ظاهری) و در غیر این صورت متغیر را آزاد می‌نامند. متغیر آزاد

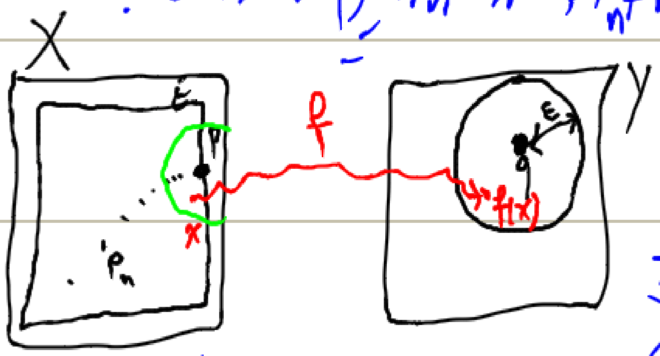
مانند متغیر ثابت (معلوم) عمل می‌کنند.

به عبارت دیگر
$$\forall \varepsilon\ \exists \delta\ \forall x\in E:\ \big(0<d(x,p)<\delta \Rightarrow d(f(x),q)<\varepsilon\big)$$

تمرین: نشان دهید حد هر تابع در صورت وجود یکتاست.

قضیه (۳): $\lim\limits_{x\to p} f(x)=q$ اگر و فقط اگر به ازای هر دنباله $\{p_n\}$ در E که $p_n\neq p$ و $p_n\to p$ داشته باشیم $f(p_n)\to q$.

برهان: فرض کنیم $\lim\limits_{x\to p} f(x)=q$ و $\{p_n\}$ دنباله‌ای در E باشد که $p_n\neq p$ ، $p_n\to p$. اگر $\varepsilon>0$ داده شده باشد،



بنابه تعریف حد داریم
$$\exists \delta\ \forall x;\ 0<d(x,p)<\delta \Rightarrow d(f(x),q)<\varepsilon \quad (*)$$

چون $p_n\to p$ پس $\exists N\ \forall n\geq N;\ d(p_n,p)<\delta$

لذا
$$\forall n\geq N;\ \underbrace{0<d(p_n,p)}_{p_n\neq p}<\delta \overset{(*)}{\Longrightarrow} d(f(p_n),q)<\varepsilon$$

این نشان می‌دهد که $f(p_n)\to q$. ////

برای اثبات عکس فرض کنیم $\lim\limits_{x\to p} f(x)\neq q$ پس بنابه نقیض تعریف $\varepsilon>0$ وجود دارد که

$$\cancel{\exists \varepsilon}\ \forall\delta\ \exists x\in E;\ 0<d(x,p)<\delta\ \&\ d(f(x),q)\geq\varepsilon$$

پس برای هر n با فرض $\delta=\frac{1}{n}$ ، x که آن را p_n می‌نامیم وجود دارد که $\underbrace{0<d(p_n,p)}_{p_n\neq p}<\frac{1}{n}$ و $d(f(p_n),q)\geq\varepsilon$ (۱) پس

$p_n\to p$. بنابه فرض قضیه، $f(p_n)\to q$. پس بنابه تعریف حد دنباله
$$\exists N;\ d(f(p_N),q)<\varepsilon \quad (2)$$

بنابه (۱)، $d(f(p_N),q)\geq\varepsilon$ (۳). (۲)، (۳) نقیض همند. پس $\lim\limits_{x\to p} f(x)=q$. $\square$

$$\sim(\exists b\ \forall\varepsilon\ \exists N\ \forall n\geq N;\ |a_n-b|<\varepsilon)$$
$$\equiv \forall b\ \exists\varepsilon\ \forall N\ \exists n\geq N,\ |a_n-b|\geq\varepsilon$$

تمرین: ثابت کنید $a_n=\begin{cases}1 & \text{زوج } n\\ -1 & \text{فرد } n\end{cases}$ حد ندارد. حل:

اگر $b=1$ آنگاه $\varepsilon=1$ اختیار می‌کنیم. در این صورت برای هر N، ضابطه $n=2N+1$ آنگاه $|a_n-b|=|-1-1|=2\geq1$، اگر $b=-1$ آنگاه ... و اگر $b\neq\pm1$ آنگاه ... $\square$

تمرین: ثابت کنید $\{\sin n\}$ حد ندارد.

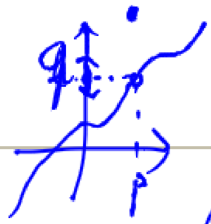
تعریف. می‌گوییم تابع f در نقطهٔ $x=p$ پیوسته است هرگاه

$$\forall \varepsilon\, \exists \delta\, \forall x\in E;\quad d(x,p)<\delta \Rightarrow d(f(x),f(p))<\varepsilon$$

تبصره. اگر $p\in E\cap E'$، f در p پیوسته است اگر و تنها اگر

$$\forall \varepsilon\, \exists \delta\, \forall x\in E;\ 0<d(x,p)<\delta \Rightarrow d(x,p)<\delta \Rightarrow d(f(x),f(p))<\varepsilon$$

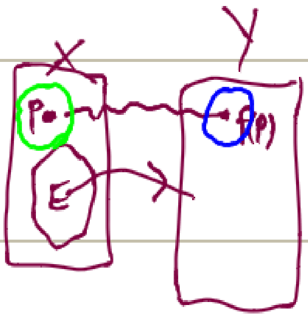
یعنی $\lim\limits_{x\to p} f(x)=f(p)$ و بالعکس اگر $\lim\limits_{x\to p} f(x)=f(p)$ آنگاه



$$\forall \varepsilon\, \exists \delta\, \forall x\in E;\ \boxed{0<}\, d(x,p)<\delta \Rightarrow d(f(x),f(p))<\varepsilon$$

$$\forall \varepsilon\, \exists \delta\, \forall x\in E;\ d(x,p)<\delta \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 0<d(x,p)<\delta \Rightarrow d(f(x),f(p))<\varepsilon \ \text{(فرض)} \\ d(x,p)=0 \Rightarrow x=p \Rightarrow d(f(x),f(p))=0<\varepsilon \end{array}\right\} \Rightarrow d(f(x),f(p))<\varepsilon$$

لذا f در p پیوسته است.



اگر $p\in E-E'$. در این صورت هر تابعی مانند f در p پیوسته است زیرا

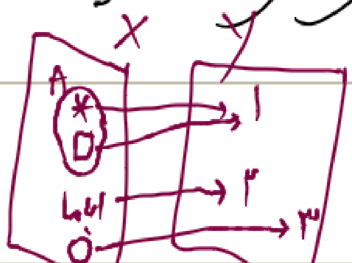
چون p نقطهٔ منفرد E است پس $\exists N_{\delta_0}(p);\ N_{\delta_0}(p)\cap E=\{p\}$

فرض کنیم $N_\varepsilon(f(p))$ یک همسایگی دلخواه از $f(p)$ باشد در این صورت

$$\forall x\in N_{\delta_0}(p)\ \forall x\in E;\ d(x,p)<\delta_0 \Rightarrow x\in N_{\delta_0}(p)\cap E \Rightarrow x=p \Rightarrow d(f(x),f(p))=0<\varepsilon$$

تعریف. می‌گوییم تابع $f: X\to Y$ در X پیوسته است هرگاه در هر نقطهٔ X پیوسته باشد.

قضیه (مهم). تابع $f: X\to Y$ در X پیوسته است اگر و فقط اگر به ازای هر مجموعهٔ باز V، نقش معکوس V تحت f یعنی $f^{-1}(V)$ باز باشد.

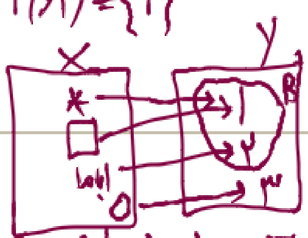


$f(A)=\{1\}$

یادآوری: اگر $f: X\to Y$ یک تابع باشد، $A\subseteq X$، $B\subseteq Y$ آنگاه

$f(A)=\{f(x)\mid x\in A\}$ نقش A تحت f

$f^{-1}(B)=\{x\in X\mid f(x)\in B\}$ نقش معکوس B تحت f



$f^{-1}(B)=\{*,\square,\text{بابا}\}$

خواص مهم:

$x\in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x)\in B$

$x\in A \Rightarrow f(x)\in f(A)$ & $y\in f(A) \Rightarrow \exists x\in A;\ f(x)=y$

تمرین:

۱. $A\subseteq f^{-1}(f(A))$

$x\in A \Rightarrow f(x)\in \underbrace{f(A)}_{B} \Rightarrow x\in f^{-1}(\underbrace{f(A)}_{B})$

۲. $f(f^{-1}(B))\subseteq B$

$y\in f(\underbrace{f^{-1}(B)}_{A}) \Rightarrow \exists x\in \underbrace{f^{-1}(B)}_{\equiv f(x)\in B};\ y=f(x)\in B$

۳. $A_1\subseteq A_2 \Rightarrow f(A_1)\subseteq f(A_2)$

$y\in f(A_1)\Rightarrow \exists x\in A_1;\ y=f(x) \xrightarrow[y=f(x)]{x\in A_2} \underbrace{f(x)}_{y}\in f(A_2)$

۴. $B_1\subseteq B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1)\subseteq f^{-1}(B_2)$

$x\in f^{-1}(B_1)\Rightarrow f(x)\in B_1 \xrightarrow{\text{فرض}} f(x)\in B_2 \Rightarrow x\in f^{-1}(B_2)$

۵. $f^{-1}(A\cap B)=f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)$

$x\in f^{-1}(A\cap B)\Leftrightarrow f(x)\in A\cap B \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\in A\Leftrightarrow x\in f^{-1}(A)\\ f(x)\in B\Leftrightarrow x\in f^{-1}(B)\end{cases} \Leftrightarrow x\in f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)$

۶. $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$

$f(A\cap B)\subseteq f(A)\cap f(B)$

گیریم $y\in f(A\cup B)$. پس $x\in A\cup B$ وجود دارد که $y=f(x)$. اما $x\in A$ یا $x\in B$.

دو حالت در می‌گیرد:

الف) $x\in A$ پس $f(x)\in f(A)$ لذا $y=f(x)\in f(A)\cup f(B)$

ب) $x\in B$ پس $f(x)\in f(B)$ لذا $y=f(x)\in f(A)\cup f(B)$

در هر صورت، داریم $y\in f(A)\cup f(B)$.

بالعکس گیریم $y\in f(A)\cup f(B)$ پس $y\in f(A)$ یا $y\in f(B)$. دو حالت پیش می‌آید:

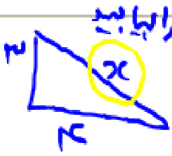
الف) $y\in f(A)$ پس $x\in A$ هست که $y=f(x)$ لذا $x\in A\cup B$ بنابراین $f(x)\in f(A\cup B)$

ب) $y\in f(B)$ ″ ″ ″ B ″ ″ ″ ″

در هر صورت، داریم $y\in f(A\cup B)$. □

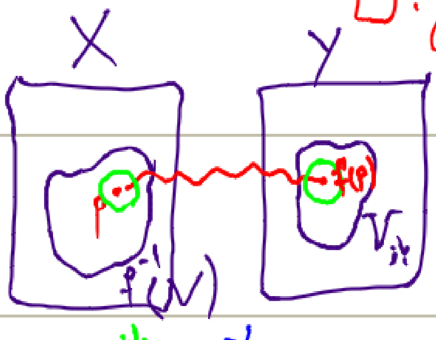
در $f^{-1}(B)$، f^{-1} به معنای معکوس f نیست، تمام $f^{-1}(B)$ به معنی نقش معکوس

مثال: x را بیابید



تمام $\sqrt{2}$ به معنای جذر ۲ است،

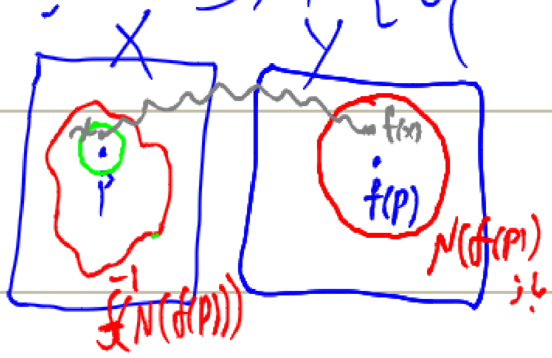
f پیوسته است اگر نقش معکوس بازها، باز باشد.



قضیه: فرض کنیم f از X به Y پیوسته باشد و V در Y باز باشد. می‌خواهیم ثابت کنیم $f^{-1}(V)$ باز است: گیریم $p\in f^{-1}(V)$ پس $f(p)\in V$. چون V باز است یک همسایگی $N(f(p))$ از $f(p)$ وجود دارد که $N(f(p))\subseteq V$. بنا به تعریف پیوستگی، یک همسایگی $N(p)$ از p وجود دارد که $\underbrace{f(N(p))\subseteq N(f(p))}_{\equiv\ x\in N(p)\Rightarrow f(x)\in N(f(p))}$. حال نشان می‌دهیم $N(p)\subseteq f^{-1}(V)$ در این صورت نقطه p درونی $f^{-1}(V)$ می‌شود:

$x\in N(p) \Rightarrow f(x)\in N(f(p)) \Rightarrow f(x)\in V \Rightarrow x\in f^{-1}(V)$.

بالعکس فرض کنیم که نقش معکوس هر مجموعه باز تحت f، باز باشد. نشان می‌دهیم که f در هر نقطهٔ p از X پیوسته است. گیریم $N(f(p))$ یک همسایگی دلخواه از $f(p)$ باشد. چون این مجموعه (همسایگی) باز است، پس بنا به فرض $f^{-1}(N(f(p)))$ نیز باز است.



اما $p\in f^{-1}(N(f(p)))$ زیرا $f(p)\in N(f(p))$، پس بنا به تعریف باز بودن،

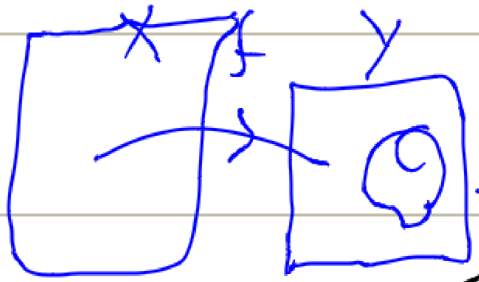
$$\exists N(p);\quad N(p)\subseteq f^{-1}(N(f(p))).$$

این نشان می‌دهد که

$$x\in N(p)\Rightarrow x\in f^{-1}(N(f(p)))\Rightarrow f(x)\in N(f(p)).\ \square$$

۱۳۹۰,۲,۲۷

نتیجه: $f: X\to Y$ در X پیوسته است اگر و فقط اگر تصویر معکوس هر مجموعه بسته، بسته باشد.

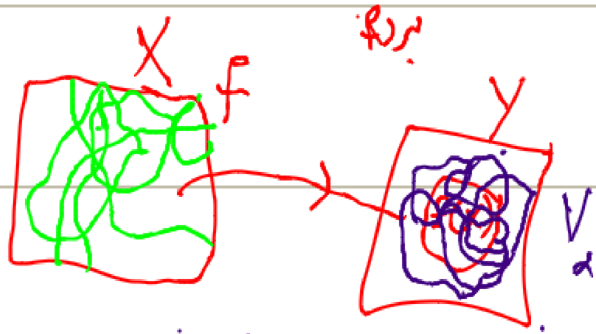


برهان: ($\Leftarrow$) اگر C بسته باشد آنگاه $Y-C$ باز است پس $f^{-1}(Y-C) = X - f^{-1}(C)$ باز است پس $f^{-1}(C)$ بسته است.

$$x\in f^{-1}(Y-C) \Leftrightarrow f(x)\in Y-C \Leftrightarrow f(x)\notin C \Leftrightarrow x\notin f^{-1}(C) \Leftrightarrow x\in X-f^{-1}(C).$$

($\Rightarrow$) فرض کنیم V در Y باز باشد پس $Y-V$ بسته است لذا $f^{-1}(Y-V) = X-f^{-1}(V)$ بسته است پس $f^{-1}(V)$ باز است. □

قضیه: اگر $f: X\to Y$ یک نگاشت پیوسته باشد و X فشرده باشد آنگاه $\underbrace{f(X)}_{\text{برد}}$ فشرده است.



برهان: فرض کنیم $\{V_\alpha\}$ یک پوشش باز دلخواه برای $f(X)$ باشد پس

$$f(X)\subseteq \bigcup V_\alpha$$

$$X\subseteq f^{-1}(f(X))\subseteq f^{-1}\left(\bigcup V_\alpha\right)=\bigcup f^{-1}(V_\alpha)$$

بنابه فشردگی X، $\exists\, \alpha_1,\dots,\alpha_n;\ X\subseteq \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(V_{\alpha_i})$ پس

$$f(X)\subseteq f\left(\bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(V_{\alpha_i})\right) = \bigcup_{i=1}^{n} f(f^{-1}(V_{\alpha_i}))\subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_{\alpha_i}$$

لذا $f(X)$ فشرده است. □

قضیه: اگر $f: X\to \mathbb{R}$ بر فضای فشرده X پیوسته باشد آنگاه $\exists\, p,q\in X\ \forall x\in X;\ f(p)\le f(x)\le f(q)$

f ماکزیمم خود را در q اختیار می‌کند
f مینیمم در p اتفاق می‌افتد

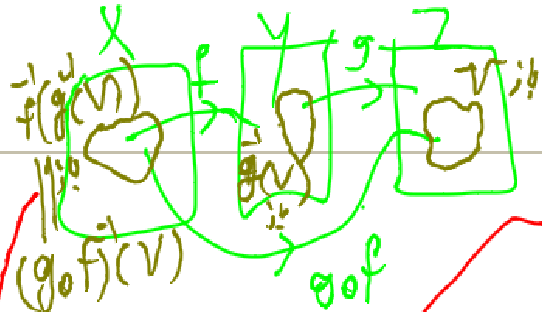
قضیه اکسترمم مطلق

برهان: چون f پیوسته و X فشرده است، بنابه قضیه قبل، $f(X)$ در $\mathbb{R}$ فشرده است پس بنابه قضیه هاینه-بورل $f(X)$ بسته و کراندار است. چون کراندار است پس از بالا و پایین کراندار است لذا $\sup f(X)$ و $\inf f(X)$ موجودند.

$\exists p,q\in X;\ \sup f(X)=f(q)\ \&\ \inf f(X)=f(p)$ لذا $\inf f(X),\ \sup f(X)\in \overline{f(X)}=f(X)$ پس

پس تابع پیوسته (حقیقی مقدار) روی مجموعه فشرده، مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق خود را اختیار می‌کند

لم. اگر $f:X\to Y$ روی X (در نقطه p) و $g:Y\to Z$ روی Y (در نقطه $f(p)$) پیوسته باشد آنگاه $g\circ f$ روی X (در نقطه p) پیوسته است.



برهان. بدون شرح

$$x\in f^{-1}(g^{-1}(V))\Leftrightarrow f(x)\in g^{-1}(V)\Leftrightarrow g(f(x))\in V$$
$$\Leftrightarrow (g\circ f)(x)\in V\Leftrightarrow x\in (g\circ f)^{-1}(V)$$

لم. تابع قدرمطلق $|\cdot|:\mathbb{C}\to\mathbb{R}$ پیوسته است.

برهان. گیریم $\varepsilon>0$ داده شده باشد. چنانچه $\delta=\varepsilon$ اختیار شود داریم

$$\forall z\in\mathbb{C};\ |z-z_0|<\delta\Rightarrow \big||z|-|z_0|\big|\le|z-z_0|<\delta<\varepsilon.$$

نامساوی مثلث

پس تابع $|\cdot|$ در z_0 پیوسته است. □

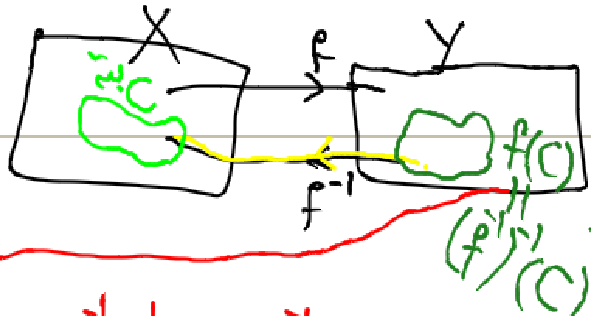
تمرین. تابع $\left\{\begin{array}{l}\|\cdot\|:\mathbb{R}^k\longrightarrow\mathbb{R}\\ \|(x_1,\dots,x_k)\|=\left(\sum|x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\end{array}\right.$ پیوسته است.

با توجه به دو لم بالا، قضیه‌ای داریم

قضیه. اگر $f:X\to\mathbb{C}$ و X فشرده باشد آنگاه $\exists p,q\in X\ \forall x\in X;\ |f(p)|\le|f(x)|\le|f(q)|$

برهان. تابع $|f|:X\to\mathbb{R}$ به عنوان ترکیب دو تابع پیوسته f و $|\cdot|$، پیوسته است. □

قضیه. اگر $f:X\to Y$ پیوسته باشد و X فشرده و f دوسویی یک‌به‌یک باشد، در این صورت f^{-1} پیوسته است.

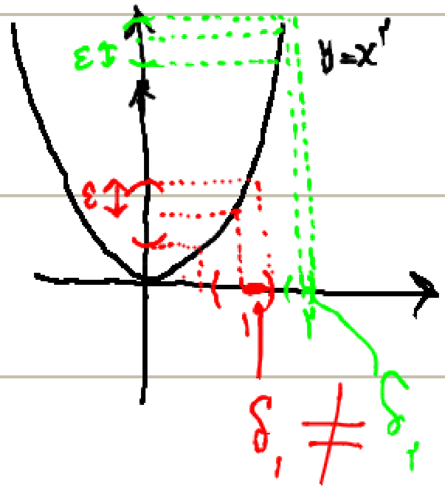


برهان. گیریم C در X بسته باشد. چون X فشرده است C فشرده است. چون f پیوسته است پس $f(C)$ فشرده و لذا بسته است. بنابراین $(f^{-1})^{-1}(C)$ بسته است. پس f^{-1} پیوسته است. □

$$y\in(f^{-1})^{-1}(C)\Rightarrow \underbrace{f^{-1}(y)}_{x}\in C\Rightarrow f(x)\in f(C)\Rightarrow y\in f(C)$$

$\boxed{\text{اگر } f \text{ معکوس پذیر باشد آنگاه } y=f(x)\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)}$ $\Rightarrow y=f(x)$

$$y\in f(C)\Rightarrow\exists x\in C;\ y=f(x)\Rightarrow x\in C,\ x=f^{-1}(y)\Rightarrow f^{-1}(y)\in C\Rightarrow y\in(f^{-1})^{-1}(C).\ \square$$



تعریف. تابع $f:X\to Y$ روی X پیوسته یکنواخت است هرگاه

$$\forall\varepsilon\ \exists\delta\ \forall p,q\in X;\ d(p,q)<\delta \Rightarrow d(f(p),f(q))<\varepsilon$$

یادآوری پیوستگی f روی X:

$$\forall p\ \forall\varepsilon\ \exists\delta\ \forall q\in X;\ d(p,q)<\delta \Rightarrow d(f(p),f(q))<\varepsilon$$

به وضوح هر تابع پیوسته یکنواخت، پیوسته است.

مثال) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$، $f(x)=x^2$ پیوسته است ولی پیوسته یکنواخت نیست:

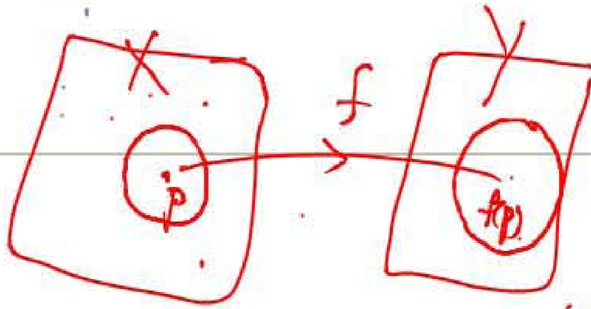
$$\exists\varepsilon\ \forall\delta\ \exists \overset{x}{p},\overset{y}{q}\in X;\ \underbrace{d(p,q)}_{|x-y|}<\delta \ \&\ \underbrace{d(f(p),f(q))}_{|x^2-y^2|}\geq\varepsilon$$

گیریم $\varepsilon=\frac{1}{2}$. حال هر $\delta>0$، قرار می‌دهیم

در این صورت

$$|x-y| = \qquad <\delta \qquad \& \qquad |x^2-y^2| = \qquad > \frac{1}{2}. \ \square$$

قضیه: اگر $f: X\to Y$ روی X پیوسته باشد، X فشرده باشد آنگاه f روی X پیوسته یکنواخت است.



حل: فرض کنیم $\varepsilon>0$ داده شده باشد.

بنا به تعریف پیوستگی

$$\forall p\,\exists \delta_p\,\forall x\in X;\ d(x,p)<\delta_p \Rightarrow d(f(x),f(p))<\frac{\varepsilon}{2}$$

$\{N_{\frac{\delta_p}{2}}(p)\}$ یک پوشش باز برای فضای X است (زیرا هر نقطه X به عنوان مرکز همسایگی نظیرش ظاهر شده است).

چون X فشرده است پس

$$\exists p_1,\dots,p_n;\ X\subseteq N_{\frac{\delta(p_1)}{2}}(p_1)\cup\dots\cup N_{\frac{\delta(p_n)}{2}}(p_n)\quad (*)$$

قرار می‌دهیم $\delta=\min\{\frac{\delta(p_1)}{2},\dots,\frac{\delta(p_n)}{2}\}$

عروس عروس عروس عروس

می‌گیریم p و q دو نقطه در X باشند که $d(p,q)<\delta$. با استفاده از $(*)$

$$\exists p_m;\ p\in N_{\frac{\delta(p_m)}{2}}(p_m)$$

بنا به فرض، از طرف دیگر $d(f(p),f(p_m))<\frac{\varepsilon}{2}$

$$d(q,p_m)\le d(q,p)+d(p,p_m)<\delta+\frac{\delta(p_m)}{2}\le\delta(p_m)$$

پس $d(f(q),f(p_m))<\frac{1}{2}\varepsilon$

~~بنابراین~~

$$d(f(p),f(q))\le d(f(p),f(p_m))+d(f(p_m),f(q))<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\ \square$$

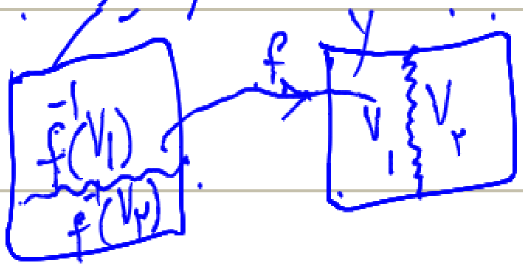
تمرین: نشان دهید تابع لیپ‌شیتز پیوسته یکنواخت است.

$$\exists M\ \forall x,y\in D;\ d(f(x),f(y))\le M\,d(x,y).$$

حل: گیریم $\varepsilon>0$ داده شده باشد. چنانچه $\delta=\frac{\varepsilon}{M}$ اختیار شود، خواهیم داشت

$$d(f(x),f(y)) \le M\, d(x,y) \le M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon. \;\square$$

قضیه. اگر $f:X\to Y$ پیوسته و پوشا باشد، X همبند باشد آنگاه Y نیز همبند است.



برهان (خلف) فرض کنیم Y ناهمبند باشد

پس $\exists\, V_1,V_2$; $Y=V_1\cup V_2$ & $V_1\cap V_2=\emptyset$

در این صورت $X=f^{-1}(Y)=f^{-1}(V_1\cup V_2)=f^{-1}(V_1)\cup f^{-1}(V_2)$ $D_f=X$

باز $f^{-1}(V_1)\cap f^{-1}(V_2)=f^{-1}(V_1\cap V_2)=f^{-1}(\emptyset)=\emptyset$ باز   f پیوسته است

$V_i\neq\emptyset \Rightarrow f^{-1}(V_i)\neq\emptyset$ $(i=1,2)$

پس یک ناهمبندی برای X داریم که ممکن نیست. $\square$

تمرین. ثابت کنید برد تابع حقیقی $f(x)=\dfrac{e^{\frac{\sin e^{x^{1390}}}{x^{1390}+1}}}{1390\tan^2 x+1}$ در $[0,1]$ یکبازه بسته به صورت $[a,b]$ است.

حل. $[0,1]$ همبند است، f پیوسته است پس برد f یعنی $f([0,1])$ همبند است

و لذا به صورت یک بازه است. از طرفی $[0,1]$ فشرده و f پیوسته است پس $A=f([0,1])$ فشرده است

فشرده در R بسته و کراندار است. چون کراندار است (A) پس $a,b\in\mathbb{R}$ هست چون

A بسته است پس $A=[a,b]$. $\square$

تمرین. ثابت کنید $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$، $g(x)=\|x-x_0\|$ پیوسته لیپشیتز است.

$$\underbrace{\big|\,\|x-x_0\|-\|y-x_0\|\,\big|}_{d(f(x),f(y))}\le\|(x-x_0)-(y-x_0)\|=\underbrace{\|x-y\|}_{d(x,y)} \;\square$$

مشتق: تابع $f:(a,b)\to \mathbb{R}$ را در نقطه $x_0\in(a,b)$ مشتق‌پذیر می‌گوییم

هرگاه $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ موجود و متناهی باشد. این حد را با ($f'(x_0)$ یا $\frac{df}{dx}(x_0)$) نمایش می‌دهیم.

1) $f(x)=|x|$ پیوسته است (زیرا $\big||x|-|y|\big|\le|x-y|$) ولی مشتق‌پذیر نیست زیرا:

$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=\lim_{\substack{x\to 0^+\\ 0<x<\delta}}\frac{x}{x}=\lim_{\substack{x\to 0^+\\ 0<x<1}}1=1$$

$x\to x_0^+ \longrightarrow \forall\varepsilon\,\exists\delta\,\forall x\in D_f;\ \boxed{0<|x-x_0|<\delta}\Rightarrow|f(x)-l|<\varepsilon$

$\boxed{x>x_0}$ $\quad x_0<x<x_0+\delta$

$$\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=-1$$

درستی رفع ابهام

می‌دانیم که اگر $\lim_{x\to a}f(x)=l$, $\lim_{x\to a}g(x)=l'$ آنگاه $\lim_{x\to a}(f(x)-g(x))=l-l'=\lim_{x\to a}f(x)-\lim_{x\to a}g(x)$

" " $=+\infty$, " $=-\infty$ " $=+\infty=+\infty-(-\infty)=\lim_{x\to a}f(x)-\lim_{x\to a}g(x)$

" " $=+\infty$, " $=l'$ آنگاه $\lim_{x\to a}(f(x)-g(x))=+\infty=+\infty-l'=\lim_{x\to a}f(x)-\lim_{x\to a}g(x)$

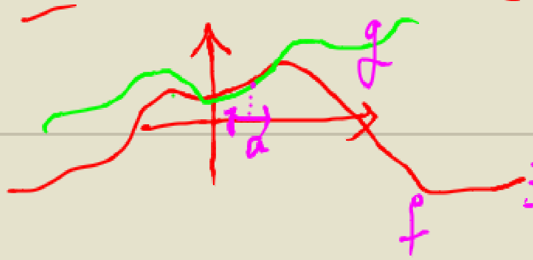
اما اگر $\lim f(x)=+\infty$, $\lim g(x)=+\infty$ درمورد $\lim(f(x)-g(x))$ چه؟ نمی‌توان گفت!

$\lim_{x\to 0}\underbrace{(\alpha+\frac{1}{x^2})}_{f}=+\infty$, $\lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{g}=+\infty$, $\lim_{x\to 0}(f(x)-g(x))=\alpha$

پس در $\mathbb{R}^*$، $+\infty-(+\infty)$ را تعریف نمی‌کنیم! پس برای محاسبه حد بالا چه باید کرد؟!

رفع ابهام می‌کنیم. ولی رفع ابهام صحیح چیست؟! رفع ابهام بعضی از حالت‌ها (۰): قضیه

موضعی کردن:



قضیه ۱: اگر $\exists\delta_0\ \forall x\in N_{\delta_0}(a)-\{a\};\ f(x)=g(x)$ و $\lim_{x\to a}f(x)=l$ آنگاه $\lim_{x\to a}g(x)=l$.

اثبات: فرض کنیم $\varepsilon>0$ داده شده باشد. چون $\lim_{x\to a} f(x)=l$،

$$\exists \delta_1, \forall x\in D_f, x\neq a;\quad x\in N_{\delta_1}(a)\Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon.$$

اکنون $\delta=\min\{\delta_0,\delta_1\}$ را

$$\forall x\in D_g, x\neq a;\quad x\in N_\delta(a)=N_{\delta_0}(a)\cap N_{\delta_1}(a)\Rightarrow \begin{cases} f(x)=g(x) \\ |f(x)-l|<\varepsilon \end{cases} \Rightarrow |g(x)-l|<\varepsilon.\ \square$$

قضیه (هم علامتی حد و تابع). اگر $\lim_{x\to a} f(x)=l>0$، آنگاه f در یک همسایگی محذوف a، مثبت است:

اثبات:
$$\exists \delta\, \forall x\in D_f, x\neq a;\quad x\in N_\delta(a)\Rightarrow \underbrace{|f(x)-l|<l}_{0=l-l<f(x)<l+l}\ (=\varepsilon)\ \square$$

قضیه (هم علامتی حد و تابع، دوم). اگر ① $\exists\delta\, \forall x\in N_\delta(a), x\neq a;\ f(x)>0$ و $\lim_{x\to a} f(x)=l$ موجود باشد ۲

آنگاه $l\geq 0$

برهان خلف (ε): فرض کنیم $l<0$. بنابر تعریف حد،

$$\exists \delta_1, \forall x\in D_f, x\neq a;\quad x\in N_{\delta_1}(a)\Rightarrow \underbrace{|f(x)-l|<-l}_{l-(-l)<f(x)<l+(-l)=0}\ (=\varepsilon)\quad ②$$

اگر $x_0 \in N_\delta(a)\cap N_{\delta_1}(a)$، $x_0\neq a$ (مثلاً $x_0=a+\frac{\min\{\delta,\delta_1\}}{2}$) آنگاه بنابه ① و ② داریم $f(x_0)<0$ و $f(x_0)>0$ ✗ $\square$

قضیه. هر تابع مشتق‌پذیر در نقطه x_0 در این نقطه پیوسته است.

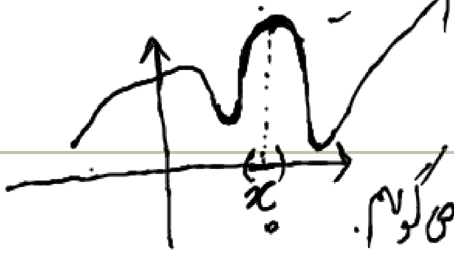
برهان:
$$\lim_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0))=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0)\right)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}(x-x_0)$$
$$=f'(x_0)\cdot 0=0$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0}\left((f(x)-f(x_0))+f(x_0)\right)=\lim_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0))+\lim_{x\to x_0} f(x_0)=0+f(x_0)=f(x_0).\ \square$$

به سادگی نشان داده می‌شود که مجموع، تفاضل، ضرب، حاصلضرب، حاصل تقسیم، ترکیب توابع مشتق‌پذیر، مشتق‌پذیر است.

تعریف. می‌گوییم تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با حوزه تعریف D_f در نقطه x_0 ماکزیمم نسبی (مینیمم نسبی) دارد، اگر

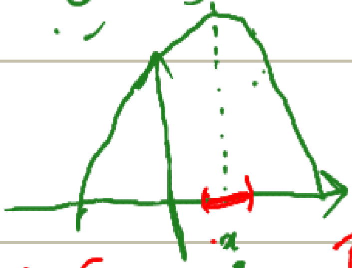
$$\exists N_r(x_0)\subseteq D_f\ \forall x\in N_r(x_0);\ f(x)\le f(x_0)$$
$$(f(x)\ge f(x_0))$$



اگر $\forall x\in D_f;\ f(x)\le f(x_0)$ آنگاه x_0 را نقطه ماکزیمم مطلق f می‌گوییم.
$(f(x)\ge f(x_0))$

قضیه (فرما). اگر f در x_0 اکسترمم نسبی داشته باشد و در همین نقطه مشتق‌پذیر باشد
ماکزیمم نسبی یا مینیمم نسبی
آنگاه $f'(x_0)=0$

برهان.



$$\exists\delta\ \forall x\in N_\delta(x_0);\ f(x)\le f(x_0)$$

$$x\in(x_0-\delta,x_0)\Rightarrow \frac{\overbrace{f(x)-f(x_0)}^{\le 0}}{\underbrace{x-x_0}_{<0}}\ge 0 \xRightarrow[\text{و تابع}]{\text{بنا به قضیه حفظ علامت (بقای علامت) در حد}} \underbrace{\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{f'(x_0^-)\ \text{مشتق چپ}}\ge 0$$

به دلیل مشابه، $f'(x_0^+)\le 0$ اما $f'(x_0)=f'(x_0^+)=f'(x_0^-)$ پس $f'(x_0)=0$ $\square$

قضیه (مقدار میانگین لاگرانژ) اگر f روی $[a,b]$ پیوسته و روی (a,b) مشتق‌پذیر باشد

آنگاه $\exists c\in(a,b);\ f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

برهان. قرار می‌دهیم $g(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x$ در این صورت g روی $[a,b]$ پیوسته

و روی (a,b) مشتق‌پذیر است. دو حالت در نظر می‌گیریم:

$\frac{f(a)b-f(b)a}{b-a}=g(b)=g(a)$

الف) $\forall x\in[a,b];\ g(x)=g(a)$ پس $\forall c\in(a,b);\ g'(c)=0$

ب) $\exists x_0\in[a,b];\ g(x_0)\ne g(a)$ ب.ک.ا.ع. فرض می‌کنیم $g(x_0)>g(a)$

چون g روی بازه فشرده $[a,b]$ پیوسته است پس ماکزیمم مطلق خود را در نقطه‌ای مانند c اختیار می‌کند. پس

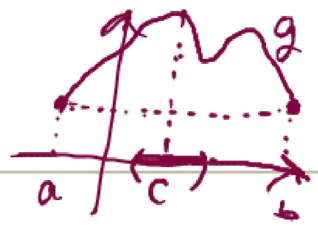
$$g(b)=g(a)<g(x)\leq g(c)$$

بنابراین $b\neq c\neq a$ پس $c\in(a,b)$ لذا یک همسایگی به شعاع r از c وجود دارد

$$N_r(c)\subseteq(a,b)\subseteq D_g$$

حتماً

$$\forall x\in N_r(c);\quad g(x)\leq \underbrace{g(c)}_{c\ \text{ماکزیمم مطلق}\ g}$$



بنابراین c نقطه ماکزیمم نسبی g است و g در c مشتق‌پذیر است

پس بنا به قضیه فرما $g'(c)=0$. □

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

تمرین. قضیه رول را از قضیه مقدار میانگین نتیجه بگیرید.

نکته. اثبات بالا اثباتی در قضیه رول است.

قضیه. اگر f روی (a,b) مشتق‌پذیر باشد و $\forall x\in(a,b); f'(x)\geq 0$ آنگاه f صعودی است.

برهان. فرض کنیم $a<x<y<b$. تابع f روی $[x,y]$ پیوسته و روی (x,y) مشتق‌پذیر است. بنا به قضیه مقدار میانگین

$$\exists c\in(x,y);\quad f(y)-f(x)=\underbrace{f'(c)}_{\geq 0}\underbrace{(y-x)}_{>0}\geq 0 \quad \square$$

قضیه. اگر f روی (a,b) مشتق‌پذیر و صعودی باشد آنگاه $\forall x\in(a,b)\ f'(x)\geq 0$.

برهان. فرض کنیم $x_0\in(a,b)$.

$$\forall x\in(a,x_0);\quad \frac{\overbrace{f(x)-f(x_0)}^{\leq 0}}{\underbrace{x-x_0}_{<0}}\geq 0\Rightarrow f'(x_0)=f'(x_0^-)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0\ (\text{چرا؟})\quad \square$$

ثابت کنید معادله $1391x^{1391}+27x^{27}+11x^{11}+x+1=0$ دقیقاً یک جواب در $\mathbb{R}$ است.

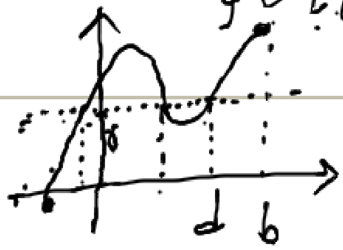
حل. تابع $f(x)=1391x^{1391}+27x^{27}+11x^{11}+x+1$ پیوسته و مشتق‌پذیر است. $f(1)>0$ و $f(-1)<0$

(بنابر قضیه مقدار میانی) دارد. اگر معادله دو جواب a و b داشته باشد یعنی $f(a)=f(b)=0$ آنگاه بنابر قضیه رل $\exists c\in(a,b); f'(c)=0$

$f'(c)=1391^2c^{1390}+27^2c^{26}+11^2c^{10}+1>0$ ✗ □

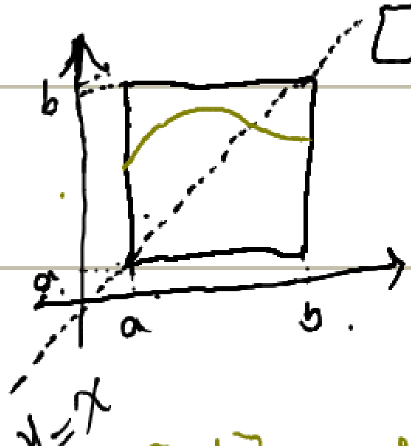
قضیه (مقدار میانی). اگر $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ روی $[a,b]$ پیوسته باشد و γ بین $f(a)$ و $f(b)$، آنگاه

$\exists d\in[a,b];\ f(d)=\gamma$



نتیجه. f پیوسته و $[a,b]$ بازه است پس $f([a,b])$ هم یک بازه است (به صورت بازه‌ای). چون $f(a),f(b)\in f([a,b])$ پس

اگر $\gamma\in f([a,b])$ آنگاه $\exists d\in[a,b];\ f(d)=\gamma$ □



قضیه (نقطه ثابت). اگر $f:[a,b]\to[a,b]$ پیوسته باشد آنگاه

$\exists x_0\in[a,b],\ f(x_0)=x_0$

$\underbrace{f(x_0)-x_0=0}$

اثبات. تابع $g(x)=f(x)-x$ در نظر بگیرید. این تابع در $[a,b]$ پیوسته است.

$g(b)=\underbrace{f(b)}_{f(b)\in[a,b]}-b\le 0\le \underbrace{f(a)}_{f(a)\in[a,b]}-a=g(a)$

$\exists x_0\in[a,b];\ g(x_0)=0$ □ بنابر قضیه مقدار میانی

$f(x_0)=x_0$

تعریف. فرض کنیم $f:[a,b]\to\mathbb{R}^k$ یک تابع برداری باشد. می‌گوییم f در نقطه $t=t_0$ مشتق‌پذیر است

$f(t)=(f_1(t),\dots,f_k(t))$

(توجه: $k=1$ ...) (اسکالر یا تابع حقیقی می‌نامیم) ($f_1,\dots,f_k$ را مولفه‌های f می‌نامیم)

هرگاه هر یک از مولفه‌های آن در t_0 مشتق‌پذیر باشد. ($f'(t_0)=(f_1'(t_0),\dots,f_k'(t_0))$)

قضیه. تابع برداری $f:X\to\mathbb{R}^k$، $f=(f_1,\dots,f_k)$ پیوسته است اگر و فقط اگر f_i ها پیوسته باشند.

لم. اگر $z\in\mathbb{R}^k$ و $f=(f_1,\dots,f_k)$ یک تابع برداری روی (a,b) و مشتق‌پذیر در t_0 باشد، آنگاه $g:(a,b)\to\mathbb{R}$، $g(t)=z\cdot f(t)$ در t_0 مشتق‌پذیر است و

$$g'(t_0)=z\cdot f'(t_0)$$

ضرب داخلی: $(z_1,\dots,z_k)\cdot(t_1,\dots,t_k)=\sum_{i=1}^{k} z_i t_i$

برهان.

$$g'(t_0):=\lim_{t\to t_0}\frac{g(t)-g(t_0)}{t-t_0}=\lim_{t\to t_0} z\cdot\left(\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}\right)=\lim_{t\to t_0}\sum_{i=1}^{k} z_i\underbrace{\frac{f_i(t)-f_i(t_0)}{t-t_0}}_{\text{توابع اسکالر}}$$

$$=\sum_{i=1}^{k} z_i\underbrace{\lim_{t\to t_0}\frac{f_i(t)-f_i(t_0)}{t-t_0}}_{f_i'(t_0)}\overset{\text{تعریف ضرب داخلی}}{=\!=}z\cdot f'(t_0).\ \square$$

قضیه (مقدار میانگین برای توابع برداری) اگر $f:[a,b]\to\mathbb{R}^k$ روی $[a,b]$ پیوسته باشد و روی (a,b) مشتق‌پذیر باشد آنگاه

$$\exists c\in(a,b);\ \|f(b)-f(a)\|\le\|f'(c)\|(b-a)$$

برهان. فرض کنیم $z=f(b)-f(a)\in\mathbb{R}^k$. قرار می‌دهیم $g:[a,b]\to\mathbb{R}$، $g(t)=z\cdot f(t)$. بنابه لم بالا g روی $[a,b]$ پیوسته است و روی (a,b) مشتق‌پذیر است. بنابه قضیه

$$\exists c\in(a,b);\quad g(b)-g(a)=g'(c)(b-a)$$

$$\underbrace{\underbrace{z\cdot f(b)-z\cdot f(a)}_{z\cdot(f(b)-f(a))}}_{z\cdot z\,=\,\|z\|^2\ge 0}=z\cdot f'(c)\,(b-a)$$

$x\cdot x=(x_1,\dots,x_k)\cdot(x_1,\dots,x_k)=\sum_{i=1}^{k}x_i^2=\|x\|^2$

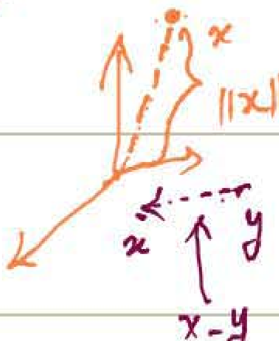
$z \cdot f'(c) \geq 0$

پس
$$\|z\|^2 = |z \cdot f'(c)|\,(b-a) \leq \|z\| \cdot \|f'(c)\|\,(b-a) \quad ⊛$$

یا $\|z\|=0$ که در این صورت به خودی خود $\|z\| \leq \|f'(c)\|(b-a)$ و یا $\|z\| \neq 0$ که در این صورت بنا بر ⊛ داریم $\|z\| \leq \|f'(c)\|(b-a)$. □

بحث شیرین: فضاهای باناخ

تعریف. فرض کنیم X یک فضای برداری روی $\mathbb{C}$ (یا روی $\mathbb{R}$) باشد. تابع $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ را یک نرم روی X می‌گویند هرگاه در سه شرط ذیل صدق کند:



الف) $\|x\|=0$ اگر $x=0$

ب) $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$

ج) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (نامساوی مثلث)

در این صورت $(X,\|\cdot\|)$ را یک فضای نرم‌دار می‌گوییم.

اگر قرار دهیم $d(x,y)=\|x-y\|$ آنگاه

$$d(x,y)=0 \iff \|x-y\|=0 \overset{(\text{الف})}{\iff} x-y=0 \iff x=y$$
$$d(y,x)=\|y-x\|=\|(-1)(x-y)\| \underset{(\text{ب})}{=} |(-1)|\,\|x-y\| = d(x,y)$$
$$d(x,y)=\|x-y\|=\|(x-z)+(z-y)\| \underset{(\text{ج})}{\leq} \|x-z\|+\|z-y\| = d(x,z)+d(z,y)$$

پس d تعریف شده در بالا واقعاً یک متر است. هر فضای نرم‌دار، یک فضای متریک است.

اگر (X,d) کامل باشد آنگاه $(X,\|\cdot\|)$ را فضای باناخ می‌گوییم.

مثال ①: روی $\mathbb{R}^k$ یا $\mathbb{C}^k$ نرم‌های ذیل قابل تعریفند:

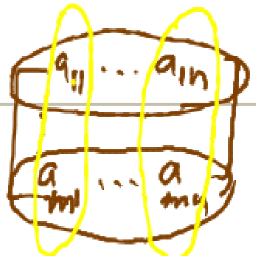
$$\underset{\text{نرم اقلیدسی}}{\|(x_1,\dots,x_k)\|} := \sqrt{\sum_{i=1}^{k}|x_i|^2}, \quad \|(x_1,\dots,x_k)\|_m = \max_{1\leq i\leq k}|x_i|$$

$$\|(x_1,\dots,x_k)\|_s = \sum_{i=1}^{k}|x_i|$$

$$\lambda(x_1,\dots,x_k)+(y_1,\dots,y_k) = (\lambda x_1+y_1,\dots,\lambda x_k+y_k)$$

۲) فرض کنیم $C(X)$ فضای توابع پیوسته $f: X \to \mathbb{C}$ (یا $\mathbb{R}$) باشد که در آن X یک فضای متریک فشرده است.

$$(\lambda f+g)(x) = \lambda f(x) + g(x) \quad , \quad \|f\| = \overset{\max}{\sup_{x\in X}} |f(x)|$$



۳) $M_{m\times n}(\mathbb{C})$ (یا $\mathbb{R}$) همراه اعمال ماتریسی با نرم‌های زیر

$$\|[a_{ij}]\|_r = \max_{1\le i\le m}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad , \quad \|[a_{ij}]\|_c = \max_{1\le j\le n}\left(\sum_{i=1}^{m}|a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

ماکزیمم طول بردارهای سطری — ماکزیمم طول بردارهای ستونی

$$\|[a_{ij}]\|_m = \max_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} |a_{ij}| \quad , \quad \|[a_{ij}]\|_\sigma = \boxed{\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}}|a_{ij}|$$

۴) $\ell^p = \left\{ \{x_n\} \mid \sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p < \infty \right\}$، $1\le p<\infty$، همراه اعمال $\lambda\{x_n\}+\{y_n\} = \{\lambda x_n + y_n\}$

و نرم $\|\{x_n\}\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

بخوانید: نرم p ی دنباله $\{x_n\}$

۵) $\ell^\infty = \left\{ \{x_n\} \mid \sup_n |x_n| < +\infty \right\}$ همراه اعمال بالا (۴) و نرم

$$\|\{x_n\}\|_\infty = \sup_n |x_n|$$

$d(x,y)=\|x-y\|$ — تحت انتقال پایا: $d(x+z,y+z)=d(x,y)$

همه مثال‌های بالا، فضای باناخ هستند.

مثالی از یک فضای متریک که فضای نرم‌دار نباشد یعنی متر آن از هیچ نرمی حاصل نشود.

فرض کنیم S فضای تمام دنباله‌های از اعداد حقیقی باشد و

$$d(\{x_n\},\{y_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x_n-y_n|}{2^n(1+|x_n-y_n|)}$$

مثالی از یک فضای نرم‌دار که باناخ (کامل) نباشد: $C([0,1])$، $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\,dx$.

تعریف. یک تابع $T:X\to Y$ بین فضای برداری که تبدیل خطی نامیده می‌شود هرگاه

$$T(\lambda x+x')=\lambda Tx+Tx'$$

اگر $Y=\mathbb{C}$ یا $\mathbb{R}$ آنگاه یک نگاشت خطی $f:X\to\mathbb{C}$ یا $\mathbb{R}$ را یک تابعک خطی می‌گویند.
(میدان اسکالرها)

linear functional

مثال. تابع $\left\{\begin{array}{l} f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R} \\ f(x,y,z)=y\end{array}\right.$ خطی است و لذا یک تابعک است:

$$f(\lambda(x,y,z)+(x',y',z'))=f(\lambda x+x',\lambda y+y',\lambda z+z')=\lambda y+y'=\lambda f(x,y,z)+f(x',y',z').$$

مثال) $\left\{\begin{array}{l} T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2 \\ T(x,y)=(-y,2x+y)\end{array}\right.$ خطی است زیرا

$$T(\lambda(x,y)+(x',y'))=T(\lambda x+x',\lambda y+y')=(-\lambda y-y',2(\lambda x+x')+\lambda y+y')$$

$$=\lambda(-y,2x+y)+(-y',2x'+y')=\lambda T(x,y)+T(x',y').$$

برای یک تابع حقیقی $g:E\to\mathbb{R}$، کراندار بودن به معنای این است که برد آن کراندار است یعنی $\sup\{|g(t)|:t\in E\}<\infty$.

اما این مفهوم در مورد توابع خطی به درد نمی‌خورد! زیرا هیچ تابع خطی $\neq 0$ به مفهوم بالا، کراندار نیست

زیرا اگر $T:X\to Y$ یک تابع خطی $\neq 0$ و کراندار به مفهوم بالا باشد، آنگاه به معنای این است که $\underbrace{\sup_{x\in X}\|Tx\|}_{M}<\infty$
(فضای نرم‌دار)

و $x_0\in X$ به طوری که $Tx_0\neq 0$. آنگاه برای n،

$$\underbrace{\|T(nx_0)\|}_{n\|Tx_0\|}\le M\Rightarrow n\le\frac{M}{\|Tx_0\|}$$

تعریف. نگاشت خطی $T:X\to Y$ را کراندار گوییم هرگاه

$$\sup_{x\in S_1(0)}\|Tx\|=\sup\{\|Tx\|:\|x\|=1\}<\infty$$

جالب

$$\sup\{\|Tx\| : \|x\|\leq 1\} = \boxed{\sup\{\|Tx\| : \|x\|<1\}} = \sup_{0\neq x}\frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$ قضیه

$$\sup\{\|Tx\| : \|x\|=1\} \equiv$$

برهان. فرض کنیم $\beta=\sup_{\|x\|=1}\|Tx\|$ و $\alpha=\sup_{x\neq 0}\frac{\|Tx\|}{\|x\|}$.

فرض کنیم $\|x\|=1$.

$$\|Tx\| = \frac{\|Tx\|}{1} = \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq \alpha$$

پس α یک کران بالا $\{\|Tx\| : \|x\|=1\}$ بنابراین $\beta\leq\alpha$.

فرض کنیم $x\neq 0$.

$$\underbrace{\frac{\|Tx\|}{\|x\|}}_{} \underset{\text{خاصیت نرم}}{=} \left\|\frac{Tx}{\|x\|}\right\| \underset{\text{خطی}}{=} \left\|T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leq \beta$$

$$\left\|\frac{x}{\|x\|}\right\| = \frac{\|x\|}{\|x\|} = 1$$

لذا β یک کران بالا برای مجموعه $\left\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|} : x\neq 0\right\}$ بنابراین $\alpha\leq\beta$.

$$\|T\| = \sup_{\|x\|\leq 1}\|Tx\|$$

$$\{\|Tx\| : \|x\|<1\} \subseteq \{\|Tx\| : \|x\|\leq 1\}$$

$$\sup \quad \| \quad \leq \sup \quad \|$$

$$\gamma = \sup_{\|x\|<1}\|Tx\| \leq \|T\|$$

فرض کنیم $\|x\|\leq 1$. فرض کنیم $0<\theta<1$ پس $\|\theta x\| = \underbrace{|\theta|}_{<1}\underbrace{\|x\|}_{\leq 1} < 1$ بنابراین:

$$\|T(\theta x)\| \leq \gamma \Rightarrow \theta\|Tx\|\leq\gamma \Rightarrow \|Tx\|\leq\frac{\gamma}{\theta} \Rightarrow \sup_{\|x\|\leq 1}\|Tx\|\leq\frac{\gamma}{\theta}$$

حد بگیر

بعد فرض کنیم

$\|T\|\leq\frac{\gamma}{\theta}$ حد گرفتن از θ

$$\theta\to 1$$

$$\|T\|\leq\gamma$$

نکته ۳. $\|T\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \Rightarrow \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \le \|T\|,\ x\neq 0 \Rightarrow \boxed{\|Tx\| \le \|T\|\,\|x\|,\ \forall x}$

قانون تابلو

قضیه. نگاشت خطی $T: X \to Y$ بین فضاهای نرمدار پیوسته است $\Leftrightarrow$ اگر کراندار باشد. 2

برهان. فرض کنیم T کراندار باشد. پس $\|T\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} < \infty$. لذا: $\forall x;\ \|Tx\| \le \|T\|\,\|x\|$

گیریم $x_0 \in X$ یک نقطه دلخواه باشد. داریم:

$$\|Tx - Tx_0\| = \|T(x-x_0)\| \underset{\text{قانون تابلو}}{\le} \|T\|\,\|x-x_0\|$$

شرط لیپشیتز

پس T در x_0 پیوسته است. (در واقع T پیوسته یکنواخت است.)

بالعکس فرض کنیم T پیوسته باشد. پس T در مبدأ پیوسته است. بنابراین:

در $x_0 = 0$

$0 + T(0) = T(0) = T(0+0) = T(0) + T(0)$

$$\exists \delta > 0\ \forall y;\ \|y - 0\| < \delta \Rightarrow \|Ty - T0\| < 1\ (\varepsilon)$$

بنابراین: $\|y\| < \delta \Rightarrow \|Ty\| < 1$. فرض کنیم: $\|x\| = 1$. $\left\|\frac{\delta x}{2}\right\| = \frac{\delta}{2} < \delta$ داریم:

$$\left\|T\left(\frac{\delta x}{2}\right)\right\| < 1 \Rightarrow \frac{\delta}{2}\|Tx\| < 1 \Rightarrow \|Tx\| < \frac{2}{\delta}$$

پس $\frac{2}{\delta}$ یک کران بالا برای $\{\|Tx\| : \|x\| = 1\}$. لذا $\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| \le \frac{2}{\delta}$ پس کراندار □

تمرین: اگر $T: X \to Y$ یک نگاشت خطی باشد آنگاه T روی X پیوسته است اگر و فقط اگر T در مبدا $x=0$ پیوسته باشد.

حل: فرض کنیم T در مبدا پیوسته باشد و $x_0 \in X$. می‌خواهیم نشان دهیم که T در x_0 پیوسته است. گیریم $\varepsilon>0$ داده شده باشد. بنابر تعریف پیوستگی T در مبدا،

$$\exists \delta \ \forall x; \quad \underbrace{\|x-0\|}_{\|x\|}<\delta \Rightarrow \underbrace{\|Tx-T0\|}_{\|Tx\|}<\varepsilon$$

با جانشینی x با $x-x_0$ داریم،

$$\forall x; \quad \|x-x_0\|<\delta \Rightarrow \underbrace{\|T(x-x_0)\|}_{\|Tx-Tx_0\|<\varepsilon}<\varepsilon$$

نتیجه می‌گیریم T در x_0 پیوسته است.

بالعکس فرض کنیم T در x_0 پیوسته باشد و $\varepsilon>0$ داده شده باشد. بنابر تعریف پیوستگی

$$\exists \delta \ \forall x; \quad \|x-x_0\|<\delta \Rightarrow \|Tx-Tx_0\|<\varepsilon$$

گیریم $\|y\|=\|y-0\|<\delta$، پس $\|\underbrace{(y+x_0)}_{x}-x_0\|<\delta$. بنابراین

$$\|\underbrace{T(y+x_0)}_{Ty+Tx_0}-Tx_0\|<\varepsilon \Rightarrow \|Ty\|<\varepsilon \Rightarrow \|Ty-T0\|<\varepsilon$$

پس T در مبدا پیوسته است. $\square$