ریاضیات و انتخابات

محمد صال مصلحیان
دانشگاه فردوسی مشهد

چکیده:

در این مقاله بعد از ارایهٔ تارخچه ای از کاربرد ریاضیات در انتخابات به تحلیل روشهای شمارش آراء و انتخاب برنده پرداخته و نشان داده ایم که چگونه در یک رأی گیری ممکن است با اعمال الگوریتمهای مختلف، نتیجه های متفاوت به دست آید. همچنین مهمترین پارادوکسهای انتخاباتی بررسی گردیده است.

مقدمه

ریاضیات علاوه بر نقش اساسی که در علوم تجربی ایفا می‌کند در توسعهٔ روشهای علوم انسانی نیز مؤثر است. به ویژه می‌توان به کاربردهای ریاضیات در تحلیل انتخابات (چگونگی انتخاب نامزدها (کاندیداها)، نحوه رأی دادن و تدوین ورقهٔ رأی، روشهای شمارش آراء و انتخاب برنده و نیز ارزشیابی سیستمهای انتخاباتی) اشاره کرد. اولین کاربرد ریاضیات در این زمینه به دوره انقلاب فرانسه بر می‌گردد به زمانی که دو فیلسوف و ریاضیدان فرانسوی (1733-1799) Jean de Charles Borda و Marquis de Condorcet (1743-1794) روشها و ایده‌های اساسی را در ارتباط با سیستمهای انتخاباتی مطرح کردند. از دیگر دانشمندانی که از ریاضیات برای پاسخ گویی به سؤالات انتخاباتی استفاده کرده اند می توان از Chareles Dodgson(1832-1898) , Duncan Black (1908-1991), John Kemeny (1926-1992) و Donald G. Saari نام برد.

در بسیاری از کشورها انتخابات در بسیاری از موقعیتها به چشم می خورد: انتخاب رییس جمهور، انتخاب اعضای شورای شهر، انتخاب فیلم برتر در یک جشنواره، انتخاب معلم نمونه، انتخاب اعضای شورای اجرایی انجمنهای علمی یا اعضای هیأت مدیرهٔ اتحادیه های صنفی و . . . . با این حال چگونگی انتخاب نامزدها، نحوه رأی دادن و روشهای تصمیم گیری در شمارش آراء به بررسی های نظری و ملاحظات فرهنگی، اجتماعی، اقتصادی و سیاسی وابسته است (برای مثال، انتخابات سال 2000 ریاست جمهوری ایالات متحده امریکا را در نظر بگیرید که در آن بوش برنده شد هر چند الگور اکثریت آراء را

به خود اختصاص داده بود!). اولین انتخابات شناخته شده به قرن ششم قبل از میلاد در یونان باستان برمی گردد که در آن مردم، نالایق ترین سیاستمدار خود را انتخاب می کردند و در صورتی که چنین سیاستمداری بیش از 6000 رأی (و در واقع اکثریت آرای منفی) را دریافت می کرد به ده سال تبعید از یونان محکوم می گشت. [7]

وقتی فقط دو نامزد در یک انتخابات وجود دارد مشکلات کمتر است. در این مقاله حالتی را در نظر میگیریم که حداقل سه نامزد وجود دارد و رأی گیری یک مرحله ای است (یعنی فقط یک بار از رأی دهندگان خواسته می شود که در رأی گیری شرکت کنند.)

شیوه های مختلفی برای رأی دادن وجود دارد: (الف) انتخاب فقط یک نفر از میان نامزدها (ب) مرتب کردن نامزدها به ترتیب اولویت (هیچ دو نامزدی نباید اولویت یکسان داشته باشند.) (پ) مرتب کردن نامزدها به ترتیب اولویت (نامزدها می توانند دارای اولویت یکسان باشند.) (ت) فقط انتخاب نامزدهای مورد نظر (ث) دادن رأی بلی یا خیر به هر نامزد (ج) ارایه فهرستی از نامزدهایی که مورد نظر نیستند و اولویت (رتبه) دادن به بقیه (یا با بدون امکان تخصیص اولویتهای یکسان) (چ) توزیع 100 امتیاز بین همهٔ نامزدها (ح) توزیع 100 امتیاز بین همهٔ نامزدهای مورد نظر (خ) . . .[4]

از نظر ریاضی دلایل مختلفی برای تحلیل انتخابات و بررسی انواع شیوه های رأی دادن وجود دارد: توصیف آنچه در عمل اتفاق افتاده است و ارایه یک مدل ریاضی برای آن، مطالعهٔ وضعیتهای دیگری که ممکن بود اتفاق بیافتد و ارایه نتایج حاصل، طراحی مدلهای دیگر رأی دادن، حل مشکلات سیستمهای انتخاباتی موجود و . . . [10]

قضیه عدم امکان اَرو

در دهه 1950 اقتصاددانی به نام اَرو Kenneth Joseph Arrow علاقمند گردید یک سیستم دموکراتیک کامل برای انتخابات (رأی دادن با تعیین اولویت نامزدها) به وجود آورد که در آن الف) هر نتیجه ممکنی بالقوه قابل حصول باشد (non-imposition)، ب) از هر وضعیت ممکن، نتیجه‌ای حاصل شود (universality) ، ج) برنده با رأی فقط یک نفر تعیین نشود، د) حذف بعضی از نامزدها در اولویت داده شده به نامزدهای دیگر تأثیر نگذارد (independence of irrelevant alternatives)، هـ) اگر اولویت یک نامزد در یک برگهٔ رأی ارتقا داده شود، فقط وضعیت همان نامزد در نتیجه رأی گیری بهبود یابد (monotonicity). اما وی در قضیه‌ای تحت عنوان Arrow`s impossibility و موسوم به پارادوکس اَرو [1] ثابت کرد که با حداقل 3 نامزد و حداقل 2 رأی دهنده هیچ مکانیسم فاقد تناقض که در پنج اصل موضوع عادلانه فوق صدق کند وجود ندارد! [5] وی به خاطر تحقیقاتش در سال 1972 برندهٔ جایزهٔ نوبل در اقتصاد شد. باید توجه نمود تا از این قضیه سوء تعبیر نشود. در واقع این قضیه مانع از مقایسه روشهای اخذ رأی و انتخاب بهترین آنها نمی‌شود. همچنین امکان یافتن سیستمهای عادلانه‌ای که در اصول موضوع دیگری صادق باشند را رد نمی کند.

برنده انتخابات کیست؟!

فرض کنید در جریان یک انتخابات با حضور 55 رأی دهنده (به شیوه مرتب کردن 5 نامزد A، B، C، D و E به ترتیب اولویت (بدون امکان تخصیص اولویتهای یکسان)) برگه‌های رأی در قالب شش صورت زیر (در جدولی موسوم به جدول اولویتها) به دست آمده باشد[6]:

	نوع 1	نوع 2	نوع 3	نوع 4	نوع 5	نوع 6
اولویت اول	A	B	C	D	E	E
اولویت دوم	D	E	B	C	B	C
اولویت سوم	E	D	E	E	D	D
اولویت چهارم	C	C	D	B	C	B
اولویت پنجم	B	A	A	A	A	A
	18 رأی	12 رأی	10 رأی	9 رأی	4 رأی	2 رأی

پنج الگوریتم کلاسیک برای انتخاب برنده وجود دارد[11]:

- (*روش بیشترین رأی اول*) تعداد دفعاتی که هر نامزد، رأی اول (اولویت اول) را در ورقه‌های رأی به خود اختصاص داده است شمرده و نامزد با بیشترین تعداد رأی اول، و نه لزوما" اکثریت آراء (یعنی نصف رأی دهندگان به علاوه یک نفر)، به عنوان برنده انتخاب می‌شود. براساس این شیوه که در آن فقط از سطر اول اطلاعات استفاده می شود، A (با 18 رأی اول) برنده است.

نوع 1	نوع 2	نوع 3	نوع 4	نوع 5	نوع 6
A	B	C	D	E	E
18 رأی	12 رأی	10 رأی	9 رأی	4 رأی	2 رأی

توجه کنید که گرچه A حتی ثلث آراء اول را هم به دست نیاورده است ولی برنده شده است. ضمنا" ممکن است دو نفر بیشترین رأی اول را به دست آورده باشند.

تبصره: نوع دیگری از رأی گیری (که سابقهٔ آن به قرن 13 میلادی بر می گردد) موسوم به **Approval Voting** وجود دارد که در آن رأی دهندگان هر تعداد دلخواه از نامزدهای مورد نظر خود را انتخاب می کنند و سپس برنده کسی معرفی می شود که بیشترین رأی (صرف نظر از اولویت) را به دست آورده باشد. فایدهٔ این روش این است که بعد از رأی گیری، حذف (یا اضافه کردن) یک نامزد در تعداد کل رأی های دیگران تأثیر ندارد. از طرفی، بر خلاف روش بیشترین رأی اول که ممکن است رأی فردی به یک نامزد به علت کم بودن رأی کل آن نامزد به هدر رود، رأی دهنده با انتخاب چند نامزد، احتمال تأثیر رأیش را در نتیجهٔ نهایی افزایش می دهد. همچنین احتمال وقوع مبارزات انتخاباتی منفی کاهش می یابد. ضمنا" اجرای این روش ساده تر از روشهای دیگر رأی دادن به نظر می رسد.[3]
برای توضیح این روش فرض کنید در مثال ما، رأی دهندگان فقط دو سطر اول در جدول (*) را تأیید کنند. پس برگه های رأی به صورت زیر خواهند بود:

نوع 1	نوع 2	نوع 3	نوع 4	نوع 5	نوع 6
A	B	C	D	E	E
D	E	B	C	B	C
18 رأی	12 رأی	10 رأی	9 رأی	4 رأی	2 رأی

بنابراین D با 27 رأی برنده است.

● *(روش حذفی)* تعداد دفعاتی که هر نامزد، رأی اول را در ورقه‌های رأی به خود اختصاص داده است، شمرده می‌شود، نامزد با اکثریت آراء برنده است ولی اگر هیچ نامزدی اکثریت آراء را کسب نکرد، به جز دو نفر که بیشترین رأی اول را به دست آورده‌اند، بقیه بازنده اعلام می‌شوند و سپس با حذف صوری بازندگان و شمارش مجدد آراء درمورد دو نفر، فرد با بالاترین (و ضمناً اکثریت) آراء اول به عنوان برنده اعلام می‌شود. بر مبنای این روش ابتدا A (با 18رأی) و B (با 12رأی) انتخاب می‌شوند و در مرحله بعد B (با 37=2+4+9+10+12 رأی) به عنوان برنده معرفی می گردد.

A	B				
		B		B	
			B		B
B	A	A	A	A	A
18 رأی	12 رأی	10 رأی	9 رأی	4 رأی	2 رأی

این روش تا حدی معضل عدم کسب اکثریت آراء را در روش "بیشترین رأی اول" مرتفع می کند، گرچه ممکن است بیش از دو نفر بیشترین رأی اول را به دست آورده باشند.

● (*روش حذف دنباله‌ای*) تعداد دفعاتی که هر نامزد، رأی اول را در ورقه‌های رأی به خود اختصاص داده است، شمرده می‌شود. نامزد با اکثریت آراء برنده است ولی اگر هیچ نامزدی اکثریت را کسب نکند، نامزد با کمترین رأی اول حذف می‌گردد و دوباره آراء شمارش می‌گردد. این کار را آن قدر تکرار می‌کنیم تا یکی از نامزدها اکثریت آراء اول را به دست آورد. بر این اساس، چون هیچ نامزدی اکثریت رأی اول را به دست نیاورده است، ابتدا E (با 6 رأی اول)، سپس D (با 9 رأی اول) و بالآخره B (با 16 رأی اول) حذف می‌شود. اینک C (با 37رأی اول) برنده است.

A		C			
			C		C
C	C			C	
	A	A	A	A	A
18 رأی	12 رأی	10 رأی	9 رأی	4 رأی	2 رأی

● (*روش کُندرسه Condorcet*) نامزدها دو به دو مقایسه می‌شوند. برنده کسی است که در این مسابقات دو نفره (و در کل) بقیهٔ نامزدها را شکست دهد. با بکار بردن این روش، E برنده است زیرا E از A، B، C و D به ترتیب 37، 33، 36 و 28 دفعه برتر و 18، 22، 19 و 27 دفعه فروتر است. (در شکل زیر E با A مقایسه شده است.)

	نوع 1	نوع 2	نوع 3	نوع 4	نوع 5	نوع 6
اولویت اول	A	B	C	D	E	E
اولویت دوم	D	E	B	C	B	C
اولویت سوم	E	D	E	E	D	D
اولویت چهارم	C	C	D	B	C	B
اولویت پنجم	B	A	A	A	A	A
	18 رأی	12 رأی	10 رأی	9 رأی	4 رأی	2 رأی

● (روش بردا *Borda*) در هر برگهٔ رأی و به هر نامزد تعداد نامزدهایی که پایین‌تر (با اولویت کمتر) از نام وی درج شده‌اند نسبت داده می‌شود و سپس برای هر نامزد، جمع کل اعداد نسبت داده شده موسوم به عدد بُردا محاسبه می‌گردد. برنده، نامزد با بیشترین عدد بُردا است. بر مبنای این روش، عدد بُردای A، B، C، D و E به ترتیب 72، 101، 107، 3.1+2.12+1.10+4.9+2.4+2.2=136 و 134 است و بنابراین D برنده است.

	نوع 1	نوع 2	نوع 3	نوع 4	نوع 5	نوع 6
اولویت اول	A	B	C	D	E	E
اولویت دوم	D	E	B	C	B	C
اولویت سوم	E	D	E	E	D	D
اولویت چهارم	C	C	D	B	C	B
اولویت پنجم	B	A	A	A	A	A
	18 رأی	12 رأی	10 رأی	9 رأی	4 رأی	2 رأی

روش بردا تنها روشی است که به طور همزمان تمام اطلاعات در جدول اولویتها را به کار می برد. ثابت شده است که روش بردا و روش Approving voting از بقیه روشها در تعیین برنده کارآمدتر هستند.

تبصره: می توان با روشی موسوم به روش وزندار به اولویتها وزن داد و سپس جمع کل امتیاز هر نامزد را برای تعیین برنده به کار برد. در واقع روش بردا روشی است که در آن اگر n نامزد در انتخابات شرکت داشته باشند، به اولویتهای اول، دوم، سوم و . . . به ترتیب n-1 ، n-2 ، . . . و 0 امتیاز داده می شود. همچنین روش بیشترین رأی اول، حالت خاصی از روش وزندار است که در آن به اولویت اول وزن یک و به بقیه اولویتها وزن صفر داده می شود.[12]

به این ترتیب بر حسب این که چه روشی در انتخاب برنده به کار رود، همهٔ نامزدها می توانند برنده محسوب گردند!

پارادوکسهای انتخاباتی

فرض کنید فقط سه نامزد A، B و C و تعداد 100 رأی دهنده در یک رأی گیری شرکت کرده باشند و آراء، در جدول اولویتها به صورت ذیل ظاهر شده باشند:

	نوع 1	نوع 2	نوع 3
اولویت اول	A	B	C
اولویت دوم	B	C	A
اولویت سوم	C	A	B
	35 رأی	33 رأی	32 رأی

روش کندرسه می تواند با پارادوکسهایی روبرو شود. در حقیقت در این مثال، بنا به الگوریتم کُندرسه، نامزد A از B ، نامزد B از C ،و نامزد C از A برتر است و لذا هیچ برنده ای وجود نخواهد داشت. ضمنا" در اینجا رابطهٔ برتری، خاصیت تعدی نیز ندارد!

گاهی در انتخابات، تغییری کوچک در شرایط یک سیستم ممکن است منجر به تغییراتی عظیم گردد، یعنی با آشوب (Chaos Theory) روبرو شویم[8]. برای توضیح فرض کنید روش حذفی و یا حذف دنباله ای را در مورد جدول اولویتهای فوق به کار ببریم. در این صورت ابتدا C حذف می شود و سپس A با 67 رأی اول در برابر B با 33 رأی اول برنده می گردد. حال فرض کنید قبل از انتخابات، A چنان نطق انتخاباتی به عمل آورد که بعضی از رأی دهندگان که B را در اولویت اول در نظر داشتند رأی خود را عوض کرده و اولویت اول را به A نسبت بدهند و نهایتا" جدول اولویتها به صورت زیر به دست آید:

	نوع 1	نوع 2	نوع 3
اولویت اول	A	B	C
اولویت دوم	B	C	A
اولویت سوم	C	A	B
	37 رأی	31 رأی	32 رأی

اینک با روش حذفی و یا حذف دنباله ای ابتدا B حذف می شود و سپس C با 63 رأی اول در برابر A با 37 رأی اول برنده می شود. بنابراین یک نطق انتخاباتی موفق توسط یک نامزد ممکن است باعث شکست وی شود!

Donald G. Saari از دانشگاه کالیفرنیا (ایرواین) به طور نظری و با روش ریاضی ثابت کرد که اگر اطلاعی از اولویتهای رأی دهندگان وجود داشته باشد آنگاه می توان الگوریتم انتخابات را طوری طراحی

کرد که نتیجه ای از قبل تعیین شده به دست آید[9]. در مثال بالا، اگر شیوهٔ انتخاب چنین باشد که ابتدا بین دو نامزد، فرد با اکثریت آراء انتخاب و سپس وی با آخرین نامزد مقایسه شود، آنگاه به هرکس علاقه مند باشیم می توانیم (با در نظر گرفتن او به عنوان آخرین نامزد) وی را به عنوان برنده انتخابات معرفی کنیم!

اکنون فرض کنید فقط سه نامزد A، B و C و تعداد 100 رأی دهنده وجود داشته و جدول اولویتها به صورت زیر باشد:

	نوع 1	نوع 2
اولویت اول	A	C
اولویت دوم	B	B
اولویت سوم	C	A
	50 رأی	50 رأی

در این صورت 2، عدد بردای هر سه نامزد A، B و C است و لذا هیچ برنده ای وجود ندارد. البته در این وضعیت با به کار بردن هر یک از روشهای دیگر نیز هیچ برنده ای نمی تواند معرفی گردد!

نتیجه گیری:

ملاحظه شد که در رأی گیریها با اعمال الگوریتمهای مختلف، ممکن است نتیجه های متفاوت به دست آید به طوری که گرچه اوراق رأی تغییر نمی کنند، هر یک از نامزدها می توانند برنده محسوب شوند، بسته به این که کدام روش محاسبه آراء به کار برده شود. از طرف دیگر هر روش، محاسن و معایبی دارد و چنان که دیدیم، ممکن است ما را با معضلات (پارادوکسهای) انتخاباتی روبرو سازند[2].

قدردانی: از جناب آقای دکتر حسن حقیقی از گروه ریاضی دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی به خاطر جلب توجه نویسنده به کاربرد ریاضیات در انتخابات سپاسگزاری می گردد.

مراجع و منابعی برای مطالعهٔ بیشتر:

[1] K. J. Arrow, Social Choice and Individual Values, New York: John Wiley and Sons, 1951, 1963.

[2] S. Brams, Paradoxes in Politics, Free Press, New York, 1976.

[3] S. Brams, and P. Fishburn, Approval Voting, Birkhauser, Boston, 1983.

[4] P. Fishburn, The Theory of Social Choice, Princeton U. Press, Princeton, 1973.

[5] J. Geanakoplos, Three Brief Proofs of Arrow's Impossibility Theorem. Cowles Foundation discussion paper No.1123RRR. Cowles Foundation for Research in Economics, Yale University, New Haven, Connecticut, 2001.

[6] J. Malkevitch, Voting and elections. American Mathematical Society, 2002. Available at http://www.ams.org/new-in-math/cover/voting-introduction.html.

[7] J. J. O'Connor and E. F. Robertson, The history of voting. Available at http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/HistTopics/Voting.html

[8] D. Saari, Chaotic Elections! A Mathematician Looks at Voting. Providence, R.I.: American Mathematical Society, 2000. Available at http://www.ams.org/bookstore/pspdf/elect.pdf.

[9] D. Saari, Decisions and Elections, Cambridge U. Press, New York, 2001.

[10] A. Slinko, Mathematics and democracy, Available at http://matholymp.com/ARTICLES/MathDem.pdf

[11] P. Straffin, Topics in the Theory of Voting, Birkhauser, Boston, 1980.

[12] A. Taylor, Mathematics and Politics, Springer-Verlag, New York, 1995.