مشتق از دیدگاه کاراتئودوری

تألیف: س. کوهن
ترجمه محمد صال مصلحیان

گروه ریاضی محض، دانشگاه فردوسی مشهد
moslehian@um.ac.ir

چکیده. تعریف کاراتئودوری از مشتق چنین است: می‌گوییم تابع f در نقطه $a \in D_f$ مشتق‌پذیر است هرگاه یک تابع φ وجود داشته باشد که در a پیوسته باشد و برای هر x در یک بازه باز U شامل a،

$$f(x) - f(a) = \varphi(x)(x-a).$$

در این مقاله به بررسی این تعریف از مشتق می پردازیم. نشان می دهیم که با تعریف استاندارد (کوشی) از مشتق معادل است و می تواند در اثبات ساده تری از بعضی قضایای مقدماتی مشتق به کار رود.

همه ما با تعریف زیر که توسط لویی کوشی (در سال ۱۸۲۳) برای مشتق ارائه شده‌است آشنا هستیم:
"فرض کنید f روی بازه باز U تعریف شده‌باشد و $a \in U$. می‌گوییم تابع f در a مشتق‌پذیر است هرگاه

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

و یا به طور معادل

$$\lim_{h\to \circ} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

موجود و متناهی باشد و در این صورت مشتق f در a را با $f'(a)$ نشان داده و آن را برابر

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \left(= \lim_{h\to \circ} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right)$$

تعریف می‌کنیم."
می‌دانیم بر اساس این تعریف از نظر آموزشی درک برهان قضیه مشتق‌پذیری تابع مرکب و قضیه مشتق‌پذیری تابع معکوس (برای دانشجویان درس ریاضی عمومی) مشکل است. ولی می‌توان تعریفی معادل برای مشتق ارائه داد و به کمک آن قضایای مزبور (و نیز قضایای مهم دیگری) را به طور ساده‌تر (برای دانشجویان درس آنالیز ریاضی و حتی دانشجویان مستعد ریاضی عمومی) اثبات نمود.
چنین تعریفی را اولین بار کنستانتین کاراتئودوری (۱۸۷۳–۱۹۵۰) ارائه داد. وی تعریفش را بر

واژگان کلیدی. مشتق کاراتئودوری، مشتق، قضیه مشتق تابع معکوس، قضیه مشتق ترکیب توابع .

اساس این نکته به دست داد که اگر تابعی در نقطه‌ای به مفهوم کلاسیک مشتق‌پذیر باشد، آنگاه در آن نقطه پیوسته است.

تعریف کاراتئودوری از مشتق چنین است:
می‌گوییم تابع f در نقطه $a \in D_f$ مشتق‌پذیر است هرگاه یک تابع φ وجود داشته باشد که در a پیوسته باشد و برای هر x در یک بازه باز U شامل a،

$$f(x) - f(a) = \varphi(x)(x - a).$$

از نظر هندسی وقتی $x \neq a$، $\varphi(x)$ شیب قاطعی است که دو نقطه $(x, f(x))$ و $(a, f(a))$ را به هم وصل می‌کند و لذا وقتی x به سمت a میل می‌کند این قاطع به طور پیوسته به خط مماس نزدیک می‌شود.

به سادگی می‌توان مشتق‌پذیری از راست (چپ) f در یک نقطه را بر حسب پیوستگی از راست (چپ) φ در این نقطه تعریف نمود.
حال در رابطه با تعریف کاراتئودوری به چند مطلب اشاره می‌نمائیم.

۱- تابع φ به نقطه بستگی دارد بدین معنی که در بررسی مشتق‌پذیری (به معنای کاراتئودوری) در دو نقطه متمایز $a_۱$ و $a_۲$ احتمالاً توابع $\varphi_۱$ و $\varphi_۲$ متفاوتی ظاهر می‌شود.

۲- اگر f در a به معنای کاراتئودوری مشتق‌پذیر باشد، آنگاه f در a پیوسته است زیرا

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a}(f(a) + \varphi(x)(x - a)) = f(a) + \varphi(a)(a - a) = f(a)$$

۳- حداکثر یک تابع φ وجود دارد که در شرایط تعریف کاراتئودوری صدق می‌کند. زیرا اگر ψ تابعی دیگر باشد، آنگاه برای هر $x \neq a$ در یک بازه باز شامل a،

$$\psi(x) = \varphi(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

و لذا بنا به پیوستگی φ و ψ در a، $\varphi(a) = \psi(a)$. پس φ و ψ در یک بازه باز شامل a مساوی خواهند بود. بنابراین اگر f در a به معنای کاراتئودوری مشتق‌پذیر باشد، می‌توان مشتق کاراتئودوری f در a را برابر $\varphi(a)$ تعریف کرد.

۴- تابع f در a به معنای کلاسیک مشتق‌پذیر است اگر و فقط اگر بر حسب تعریف کاراتئودوری مشتق‌پذیر باشد زیرا اگر f به معنای کلاسیک مشتق‌پذیر باشد، آنگاه تابع

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} & x \neq a \\ f'(a) & x = a \end{cases}$$

در تعریف کاراتئودوری از مشتق صدق می‌کند و اگر f به معنای کاراتئودوری مشتق‌پذیر باشد، آنگاه چون φ در a پیوسته است،

$$\lim_{x \to a} \varphi(x) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

موجود است و بنابراین f به معنای کلاسیک مشتق‌پذیر است.

۵- اگر f مشتق‌پذیر باشد، بنا به رابطه

$$\varphi(a) = \lim_{x \to a} \varphi(x) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

می‌توان $f'(a)$ را برای نمایش مشتق کاراتئودوری f در a نیز به کار برد.
بنابراین از اکنون به بعد ما تفاوتی بین معنای کاراتئودوری و معنای کلاسیک مشتق‌پذیری قائل نمی‌شویم.
به عنوان نمونه با استفاده از تعریف کاراتئودوری نشان می‌دهیم که مشتق تابع $f(x) = x^n$ در a برابر $f(a) = na^{n-۱}$ است:
چون برای هر x،

$$x^n - a^n = (x^{n-۱} + ax^{n-۲} + \cdots + a^{n-۲}x + a^{n-۱})(x-a)$$

تابع همه جا پیوسته

$$\varphi(x) = x^{n-۱} + ax^{n-۲} + \cdots + a^{n-۲}x + a^{n-۱}$$

در شرایط تعریف کاراتئودوری از مشتق صدق می‌کند و لذا

$$f'(a) = \varphi(a) = na^{n-۱}.$$

اینک به اثبات بعضی از قضایای مهم مشتق‌پذیری با استفاده از صورت‌بندی کاراتئودوری از مشتق می‌پردازیم:

قضیه ۱. *(قاعده خطی بودن مشتق و قاعده لایب‌نیتز) اگر توابع f و g در a مشتق‌پذیر باشند و α و β دو عدد حقیقی دلخواه باشند، آنگاه توابع $\alpha f + \beta g$ و fg نیز در a مشتق‌پذیرند و*

$$(\alpha f + \beta g)'(a) = \alpha f'(a) + \beta g'(a) \qquad (\text{آ})$$

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a). \qquad (\text{ب})$$

برهان. (آ) واضح است.
(ب) چون f و g در a مشتق‌پذیرند توابعی مانند φ و ψ وجود دارند که در a پیوسته‌اند و به ترتیب روی بازه‌های باز U و V تعریف شده‌اند به قسمی که برای هر $x \in U$،

$$f(x) - f(a) = \varphi(x)(x-a)$$

و برای هر $x \in V$،

$$g(x) - g(a) = \psi(x)(x-a).$$

بنابراین برای هر $x \in U \cap V$،

$$\begin{aligned}(fg)(x) - (fg)(a) &= f(x)g(x) - f(a)g(a)\\ &= f(x)(g(x) - g(a)) + g(a)(f(x) - f(a))\\ &= f(x)\psi(x)(x-a) + g(a)\varphi(x)(x-a)\\ &= (f(x)\psi(x) + g(a)\varphi(x))(x-a).\end{aligned}$$

اما تابع $f(x)\psi(x) + g(a)\varphi(x)$ در a پیوسته است. پس fg در a مشتق‌پذیر است و

$$(fg)'(a) = f(a)\psi(a) + g(a)\varphi(a) = f(a)g'(a) + g(a)f'(a).$$

□

قضیه ۲. *(قاعده زنجیری) اگر تابع f در نقطه a و تابع g در نقطه $b = f(a)$ مشتق‌پذیر باشند، آنگاه تابع $h = g \circ f$ در a مشتق‌پذیر است و*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a).$$

برهان. چون g در b مشتق‌پذیر است یک تابع ψ وجود دارد که در b پیوسته است و برای هر s در یک بازه باز شامل b مانند V،

$$g(s) - g(b) = \psi(s)(s - b).$$

همچنین چون f در a مشتق‌پذیر است، یک تابع φ وجود دارد که در a پیوسته است و برای هر x در یک بازه باز شامل a مانند U،

$$f(t) - f(a) = \varphi(t)(t - a).$$

بنا به پیوستگی f در a می‌توان U را به قسمی اختیار کرد که اگر $t \in U$، آنگاه $f(x) \in V$. اینک مشاهده می‌شود که برای هر $x \in U$،

$$\begin{aligned} h(t) - h(a) = g(f(t)) - g(f(a)) &= \psi(f(t))(f(t) - f(a)) \\ &= (\psi \circ f)(t)\varphi(t)(t - a). \end{aligned}$$

همچنین تابع $(\psi \circ f)\varphi$ در a پیوسته است و مقدارش در a، $g'(f(a))f'(a)$ می‌باشد. لذا h در a مشتق‌پذیر است و

$$h'(a) = g'(f(a))f'(a).$$

□

قضیه ۳. *(قضیه تابع معکوس) فرض کنید f روی یک بازه باز I شامل c پیوسته و یک به یک باشد و نیز $f'(c)$ موجود و مخالف صفر باشد. در این صورت $g = f^{-1}$ در $d = f(c)$ مشتق‌پذیر است و*

$$g'(d) = \frac{1}{f'(c)}$$

برهان. چون f در c مشتق‌پذیر است، تابعی مانند φ وجود دارد که در c پیوسته است و برای هر x در یک بازه باز شامل c (که می‌توان آن را با I یکی انگاشت)،

$$f(x) - f(c) = \varphi(x)(x - c)$$

چون f روی I پیوسته و یک به یک است، برای هر $x \in I$، $\varphi(x) \neq 0$. اما نقش یک بازه باز تحت یک تابع یک به یک و پیوسته یک بازه باز است. پس نقش I تحت f، که مشمول در حوزه تعریف g است، بازه بازی مانند J است،(و به علاوه g روی J پیوسته است).

اینک برای هر $y \in J$ داریم

$$y - d = f(g(y)) - f(c) = \varphi(g(y))(g(y) - c)$$

یا

$$g(y) - c = \frac{1}{\varphi(g(y))}(y - d).$$

چون $\frac{1}{\varphi \circ g}$ در d پیوسته است، پس g در d مشتق‌پذیر است و

$$g'(d) = \frac{1}{\varphi(g(d))} = \frac{1}{f'(c)}.$$

□

مراجع

1. S. Kuhn, The derivative à la Carathéodory, Math. Monthly 98(1991), no. 1, 40–44.