ریاضی و جامعه
شاپا (چاپی): ۶۴۹۳-۲۳۴۵، شاپا(الکترونیکی): ۶۵۰۷-۲۳۴۵
جلد ۲، شماره ۴ (۱۳۹۹)، صص. ۵۰-۳۱

http://math-sci.iranjournals.ir
http://www.ui.ac.ir

جبرخطی در کتاب‌های دوره اول متوسطه

منصوره گیاهی صبور و محمد صال مصلحیان*

چکیده. در این مقاله، محتوای دانش جبرخطی را در کتاب‌های تازه تالیف شده دبیرستان (پایه‌های هفتم، هشتم و نهم) بررسی نموده، و ضمن بیان ضرورت‌ها، قدری محتوای جدید جبرخطی برای مقطع نهم دبیرستان پیشنهاد می‌کنیم. همچنین به‌مواردی اشاره می‌نماییم که تاییدی بر مناسب بودن این محتوای پیشنهادی است.

۱. مقدمه

معادلات خطی و فضاهای برداری به دلیل کاربرد فراوانی که در صنعت، پزشکی، اقتصاد و مدیریت [۱۶، ۱۱] دارند، از جمله مباحث بسیار مهم در ریاضیات به شمار می‌آیند، تا آن‌جا که یاددهی آن‌ها همواره از جایگاه ثابتی در آموزش دوره‌های متوسطه برخوردار بوده است. براساس جست و جوهای اینترنتی و کتابخانه‌ای [۲۷، ۲۶]، تعریف‌های زیر برای جبرخطی قابل ارائه است:

- جبرخطی شاخه‌ای از ریاضیات است که به بررسی و مطالعه ماتریس‌ها، بردارها، فضاهای برداری (فضاهای خطی) و تبدیلات خطی می‌پردازد (wikipedia).
- جبرخطی مطالعه‌ای بر روی دستگاه معادلات خطی و خواص تبدیلات آن‌ها است (wolfram).

درواقع، جبرخطی نوعی نگاه ساده به مسائل پیچیده محیط اطراف است که در آن به‌جای نوشتن معادلات غیرخطی که علاوه بر داشتن دشواری، نیازمند زمان نسبتاً طولانی برای حل هستند، از معادلات خطی استفاده می‌شود.

در این جست و جوی تاریخی، بیان می‌کنیم که در حالی‌که حل معادلات خطی به‌کمک ماتریس‌ها با نام ”گاوس“ پیوند خورده است، در ایده حل دستگاه‌های معادلات توسط گاوس هیچ اثری از ماتریس‌ها دیده نمی‌شود. به نظر نگارندگان بهتر است که این ابزار مهم را که امروزه دارای ارزش است، در دوره عمومی دبیرستان (پایه نهم) به‌دست دانش‌آموز دهیم تا در سال‌های بعد از توانایی بیشتری برخوردار شوند. نکته قابل توجه دیگر آن است که حدود ۲۰۰۰ سال قبل از گاوس، (۲۰۰BC) در چین باستان، نه تنها دستگاه‌های خطی دو معادله دو مجهول، که دستگاه‌هایی با شش مجهول حل شده‌اند[۳]. بنابراین به نظر می‌رسد برای آموزش مفاهیم اولیه جبرخطی به دانش آموزان پایه‌های تحصیلی متوسطه، نیازی به ریاضیات پیشرفته نیست و حتی می‌توان ادعا کرد با اندکی راهنمایی، انتظار اختراع دوباره برخی مفاهیم از دانش‌آموز، انتظار دوری نخواهد بود. اگر گراسمن[1] در جست و جوهای هندسی، جبرخطی را اختراع نمود [۱] پس شهودی مناسب برای دانش آموزان دبیرستانی وجود دارد به‌طوری‌که مفاهیم اولیه را در پس زمینه ذهن آن‌ها، برای باروریِ سال‌های آینده در دانشگاه، پایه‌گذاری کند. پس با توجه به این‌که تدریس از جز

عبارات و کلمات کلیدی. جبرخطی، ماتریس، دوره اول دبیرستان، تاریخ جبرخطی، اصلاح محتوا.
*نویسنده مسئول
تاریخ دریافت: ۱۳۹۵/۰۹/۱۱ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۶/۰۲/۱۹ .

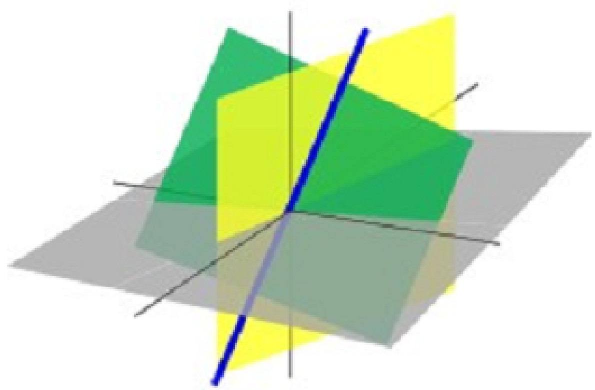
[1] Hermann Grassmann

به کل یک شیوه مؤثر در یادگیری است و از طرفی دانش آموز در پایه‌های هفتم و هشتم به‌طور کامل با بردارها و مختصات آشنا شده است، ادعا می‌کنیم دانش‌آموز نهم دبیرستان دارای شهودی نسبی برای درک دنیای $m \times n$ ها می‌باشد.

بنابر آن‌چه گفته شد، ابتدا نگاهی تاریخی به جبرخطی خواهیم داشت. در این مقاله طی نگاهی مختصر به سیستم آموزشی کشورمان در می‌یابیم که آموزش در ایران، همواره تغییرات پی‌درپی کتاب‌ها و چیدمان پایه‌های تحصیلی را به خود دیده است. در قدم بعد به سراغ کتاب‌های تازه تدوین شده‌ی سیستم آموزشی جدید می‌رویم و مباحث جبرخطی، به‌طور ویژه ماتریس‌ها و فضای برداری را در پایه‌های جدید هفتم، هشتم و نهم بررسی می‌کنیم. در انتها دلایل متعددی برای "لزوم تدریس ماتریس در آموزش عمومی" بیان می‌کنیم.

در آخرین قسمت از این مقاله، فصل پیشنهادی خود را با عنوان کلی "ماتریس‌ها" ارائه خواهیم کرد.

۲. جبرخطی چیست؟



شکل ۱:

همان‌طور که گفتیم جبرخطی مطالعه معادلات خطی، فضاهای برداری و خواص تبدیلات آن‌ها است. جبرخطی امکان آنالیز دوران‌ها و نگاشت‌های خطی در فضا را به وجود می‌آورد. معادله دایره‌ای که از سه نقطه مفروض می‌گذرد، حل زوج معادلات دیفرانسیل، مسائل انرژی در مکانیک کوانتوم، گرافیک بازی‌های رایانه‌ای و همچنین بسیاری مسائل دیگر در فیزیک، ریاضیات و مهندسی با استفاده از جبرخطی قابل پاسخ‌گویی هستند. امروزه از ماتریس و دترمینان به عنوان بزرگ‌ترین ابزارهای جبرخطی یاد می‌شود. همچنین یکی از اصلی‌ترین مسائل در جبرخطی، حل معادلات ماتریسی می‌باشد. برای حل معادله $AX = B$ می‌توان از معکوس ماتریس استفاده کرد، حال آن‌که روش حذف گاوسی یکی دیگر از روش‌های حل آن است[۲۷].

توضیحات بالا ممکن است در برخورد اول بسیار مبهم و کلی به‌نظر برسد به‌طوری که خواننده را به‌درستی متوجه چیستی جبرخطی نکند. پس بر اساس یک سنت قدیمی در ریاضیات، برای شناسایی بهتر آنچه جبرخطی نامیده می‌شود تاریخ شکل‌گیری و توسعه آن را بررسی می‌کنیم، چنان‌که هال[۲] روانشناس آمریکایی، بصیرت و آگاهی نسبت به تاریخ ریاضی را تعیین کننده چگونگی یادگیری افراد و ایجاد آمادگی در ذهن آن‌ها می‌داند[۱۴] و متیوس[۳] معتقد است درک بهتر مفاهیم و روش‌های علمی در استفاده از تاریخ علم محقق می‌شود[۱۵].

[2]Hull [3]Matthews

اگر ”ماتریس و حل معادلات $AX = B$“ را به عنوان نمادهای جبرخطی یا مهمترین مفاهیم آن درنظر بگیریم و به دنبال نقطه شروع آن‌ها، تاریخ را زیر و رو کنیم، به چینیان باستان می‌رسیم، اما برخلاف شرق، در غرب تا اواخر قرن ۱۹ از ماتریس‌ها استفاده نشد[۳].

در سال ۱۷۵۰ و در فرانسه، اویلر[4] پیشرفتی در سیستم معادلات خطی ایجاد کرد. او ابتدا این سؤال را مطرح کرد که آیا دستگاه متشکل از n معادله و n مجهول می‌تواند دارای جواب منحصر به فرد باشد یا خیر؟ سپس طی مثالی نقض، به بحث درباره نقاط تقاطع منحنی‌ها پرداخت و به این ترتیب مشاهدات اویلر باعث پیشرف ادراک ما از استقلال خطی[5] شد. همچنین در سال ۱۸۱۱ گاوس روش کم‌ترین مربعات را برای یافتن جواب تقریبی دستگاه معادلات سیال خطی شامل دوازده معادله و شش مجهول ارائه داد و همزمان، روش حذفی خودش را یافت، درباره انواع جواب‌های ممکن بحث کرد و شرایط دستگاه معادلات خطی را برای هر یک از حالت‌های جواب یکتا، بدون جواب و بی‌نهایت جواب، نشان داد. در واقع گاوس قبل‌تر یعنی در سال ۱۸۰۹ در مقاله‌ای توضیح داد که چطور بر اساس حذف کردن می‌توان مجموعه جواب را تشخیص داد. اما او جزئیات روش حذفی خود را نه در سال ۱۸۰۹ که در مقاله‌ای در سال ۱۸۱۱ در حالی انتشار داد که در آن از ماتریس‌ها استفاده نشده بود. اما سرانجام کلمه ”ماتریس[6]“ توسط ریاضی‌دان انگلیسی جیمز جوزف[7] در سال ۱۸۵۰ در حالی‌که بر روی دترمینان[8] مطالعه می‌کرد، به‌وجود آمد. او عقیده داشت دترمینان، زاییده ماتریس است. در لاتین ”ماتریس“ به معنای ”رحم“ و ”زهدان“ می‌باشد. در سال ۱۸۵۷ سیلوستر[9] و کیلی[10] مقاله‌ای را درباره نظریه ماتریس‌ها ارائه دادند. در این مقاله کیلی ماتریس‌ها را به صورت زیر معرفی کرد و سپس ماتریس‌ها را به عنوان اشیاء ریاضی که می‌توانند تحت اعمال جمع، ضرب و معکوس قرار گیرند، توسعه داد[۳].

$\mathrm{X}=ax+by+cz,$ $\mathrm{Y}=a'x+b'y+c'z,$ $\mathrm{Z}=a''x+b''y+c''z,$	$(\mathrm{X},\mathrm{Y},\mathrm{Z})=\left(\begin{array}{ccc} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{array}\right)(x,y,z)$

شکل ۲:

در سال ۱۸۷۵ فروبنیوس[11] تعریف وابستگی و استقلال خطی را بیان کرد و به این ترتیب حرکت بزرگی برای ایجاد مفهوم فضای برداری صورت گرفت. در سال ۱۸۸۸ ریاضی‌دان ایتالیایی جوزف پئانو[12] تعریفی مدرن را برای فضاهای برداری و تبدیلات خطی ارائه داد. اما کارهای پئانو و تعریف او از فضای برداری تا سال ۱۹۱۸ که ویل[13] درکتاب ”فضا–زمان –ماده“[14] از قضیه پئانو استفاده کرد، مورد توجه قرار نگرفت[۳]. این درحالی بود که حدود ۳۰ سال قبل از پئانو، گراسمن جبرخطی را به طرزی صوری یعنی به طوری که مستقل از هر تعبیری به خصوص تعابیر هندسی باشد، معرفی کرد[۱]. ماتریس در اواخر قرن نوزدهم به شدت به فیزیک مرتبط شد و سپس روند توسعه آن تا پایان جنگ جهانی دوم بسیار کند گشت[۳]. تا این که با تلاش‌های الگا تئوسکی تاد[15] در آنالیزِ لرزش‌های هواپیماها در جنگ جهانی دوم، ”ماتریس‌ها“ از یک ابزارِ صرف به یک نظریه مهم در ریاضیات، تبدیل شدند[۲۸].

اما چنان‌چه پیشتر گفته شد، نخستین مثال‌های استفاده از جبرخطی با حل معادلات خطی چند مجهولی در چین باستان شناخته شده است. کتاب ”حساب در نه بخش“[16] یکی از کتاب‌های چین باستان است که شامل ۲۴۶ مسئله و راه حل آن‌ها می‌باشد و قدمت آن به قرن ۳ پیش از میلاد باز می‌گردد. این کتاب در اصل بازنویسی کتاب قدیمی‌تری است که در زمان امپراطوری شاه هوآنگ[17] سوزانده شد. مسائل این کتاب، از مباحثی در میدان‌ها (که باعث پیشرفت هندسه، کسرها و ریشه‌های مربعی و مکعبی است) و تجارت، بازرگانی و موارد مربوط به مالیات تشکیل شده‌است[۳].

---

[4]Euler [5] inclusive independence [6]matrix [7]Joseph James [8]determinant [9]Sylvester [10]Cayley [11]Frobenius [12]Peano [13]Weyl
[14]Space-Time-Matter [15]Todd Olga Taussky [16] Nine Chapters on the Mathematical Art [17]Ch’in Shih Huang

شن[18]، کراسلی[19] و لون[20] در سال ۱۹۹۹ پس از ترجمه کتاب ''حساب در نه بخش''، طی بررسی‌هایی بیان داشتند که بیش از هفت روش مختلف برای حل معادلات خطی در چین باستان وجود داشته است. اگرچه بسیاری از روش‌ها برای دستگاه با حداکثر دو معادله مناسب بودند اما مقاله این ریاضی‌دانان به روش‌های کلی‌تر بخش هشتم کتاب می‌پردازد که با عنوان ''آرایه مستطیلی''[21] ترجمه شده‌است. این بخش شامل ۱۸ مسئله است که همه آن‌ها درباره دستگاه معادلات خطی شامل ۲ تا ۶ مجهول می‌باشند. این ۱۸ مسئله، مسائلی حل کردنی مانند محاسبه مقدار حجم، قیمت و میزان جاگیری حیوانات و گندم، محاسبه مقدار مرغ مصرفی یک خانواده براساس سطح اجتماعی آن‌ها، به‌دست آوردن نیروی کشیدن اسب‌ها تا مسائلی معماگونه مانند ترکیب دو سکه متفاوت را دربردارد[۳].

توصیه می‌کنیم که معلم در تدریس خود، با اشاره به سیر تاریخی مباحث مورد بحث، دانش‌آموز را برای کشف دوباره مفاهیم و راه‌حل‌ها ترغیب کند. همچنین در قسمت‌های بعدی این مقاله فعالیت‌هایی مطابق مسائل روزانه دانش‌آموزان ارائه می‌کنیم.

حال تغییرات نظام آموزشی کشورمان را از نگاه می‌گذرانیم، سپس به بررسی محتوای کتاب‌های ریاضی پایه‌های جدید می‌پردازیم و پیشنهاداتی برای اصلاح برخی مطالب ارائه خواهیم داد.

۳. نگاهی به آموزش و پرورش کشور

''ارتقا کیفیت آموزشی'' همواره یکی از مهم‌ترین سیاست‌های آموزشی کشورمان را تشکیل داده است، در واقع توسعه و آبادانی هر کشوری وابسته به آموزش و پرورش آن می‌باشد، به همین دلیل نیز همواره سیاستگذاران و برنامه‌ریزان درسی با ایجاد تغییرات قصد بهبود آن را داشته‌اند.

نظام آموزشی ایران از سال ۱۳۴۵ تاکنون تغییرات زیادی را به خود دیده است. تا قبل از این سال، دوران تحصیل دانش آموزان شامل ۶ سال دبستان و ۶ سال دبیرستان (۳سال دوره اول عمومی و ۳سال دوره بِه–بخش) در رشته‌های فنی و نظری (ریاضی، طبیعی و انسانی) می‌شد. اما در سال‌های بعد از ۴۵، به ۵سال دبستان، ۳ سال راهنمایی و ۴ سال دبیرستان تغییر یافت. در سال ۷۰، طول دوره دبستان ۵سال، راهنمایی ۳ سال، دبیرستان ۳سال و پیش دانشگاهی ۱سال تصویب شد. طی سال‌های بعد جابه‌جایی اساسی در این ۱۲ سال تحصیلی ایجاد نشد اما دبیرستان بین ۴ سال و ۳سال متغیر بود. در سال ۹۰ نیز طی تغییرات دیگری سیستم آموزشی کشور به ۶سال دبستان و ۶ سال دبیرستان (۳سال دوره اول و ۳سال دوره دوم) تغییر یافت.

در هر برهه از زمان با توجه به نیازها و پژوهش‌هایی که این نیازمندی‌ها را تایید می‌کنند، لازم است که سیستم آموزشی بازبینی و در صورت لزوم دستخوش تغییراتی شود. امروزه در راس قرارگرفتن رویکردهای برآمده از عصر جدید در تعلیم و تربیت از جمله دیدگاه مبتنی بر چگونگی یادگیری (فراشناخت) و یادگیری فرآیند مدار و مستقل موجب حرکت تدریجی و باز تعریف مفاهیم اساسی تعلیم و تربیت شده است [۱۳]. از جمله اصلی‌ترین اموری که توسط سیاستگذاران و برنامه‌ریزان درسی برای نیل به یک کیفیت مطلوب صورت گرفته است می‌توان به ''تغییر و بررسی برنامه‌ها، عناوین و محتوای کتاب‌های درسی'' اشاره کرد که برقراری تناسب میان مطالب آموزشی و نیازهای روز جامعه و بروز بیشتر استعدادهای دانش‌آموزان از اهداف آن محسوب می‌شوند. همچنین تحقیقات کاربردی و بررسی‌های فراوانی پیرامون علل عدم یادگیری، عدم رشد خلاقیت، عقب افتادگی تحصیلی دانش آموزان و در آخر نداشتن مهارت مورد نیاز در هنگام ورود به بازار کار، اجرا شده است.

به‌طور خاص در ریاضیات، بررسی نتایج آزمون تیمز[22] بیانگر فاصله زیاد دانش‌آموزان ایرانی با میانگین جهانی است. در بسیاری از اوقات دیده می‌شود دانش‌آموز خلاقیت لازم برای حل مسائل را، به دلیل فهم ناعمیق از مباحث درسی، دارا نیست. عمق فهم مباحث درسی، با چیدمان کتاب‌های درسی و وجود پیوستگی در آن‌ها رابطه مستقیم دارد، برای مثال در نظام آموزشی گذشته دانش‌آموز در سال سوم دبیرستان در کتاب ریاضی گسسته با مبحث ''ماتریس'' به عنوان یک مفهوم جدید مواجه می‌شود

[18]Shen [19]Crossley [20]Lun [21] Rectangular Arrays [22]Third International Mathematics and Science Study (TIMSS)

درحالی‌که ارتباط آن را با مباحثی که درگذشته خوانده است درک نمی‌کند. آن‌چه باعث پیوند بین بازنمایی‌های مسئله و مفاهیم و ساختارهای ریاضی می‌شود، فراشناخت نامیده می‌شود. فراشناخت نوعی از یادگیری است که در آن دانش‌آموز قادر است برای حل مسئله، طرح‌واره‌ای مناسب از مفاهیم ریاضی انتخاب کند. درواقع، دانش‌آموز بعد از فهمیدن مسئله، به بررسی راه‌هایی میپردازد که از طریق آنها، موقعیت توصیف شده در مسئله را با مفاهیم و ساختارهای ریاضی مناسب، همگرا کند. این همان دانشی است که شونفیلد[۲۳] در بررسی حل مسئله، آن را دانش فراشناختی نامید[۱۰]. به‌نظر می‌رسد یکی از علل ایجاد تغییرات درکتاب‌های درسی از سال ۹۳ به بعد، دیدگاه فراشناختی به یادگیری دانش‌آموزان بوده است که در ادامه به بررسی محتوایی این کتاب ها خواهیم پرداخت.

۴. بررسی محتوای جبرخطی کتاب‌های جدید

هدف این بخش بررسی بیشتر محتوا و کیفیت آموزشی کتاب‌های ریاضی در مبحث جبرخطی دوره‌های جدید هفتم، هشتم و نهم دبیرستان است. آن‌چه در صفحات پیش رو از نظرتان می‌گذرد، شامل موارد زیر می‌باشد:

توصیف محتوای فصل، اصلاح و افزودن محتوای آموزشی، نقد محتوای فصل، اصلاح تمرینات و اضافه کردن موارد مورد نیاز، پیشنهادهایی برای آموزش فصل ماتریس‌ها درکتاب نهم دبیرستان است.

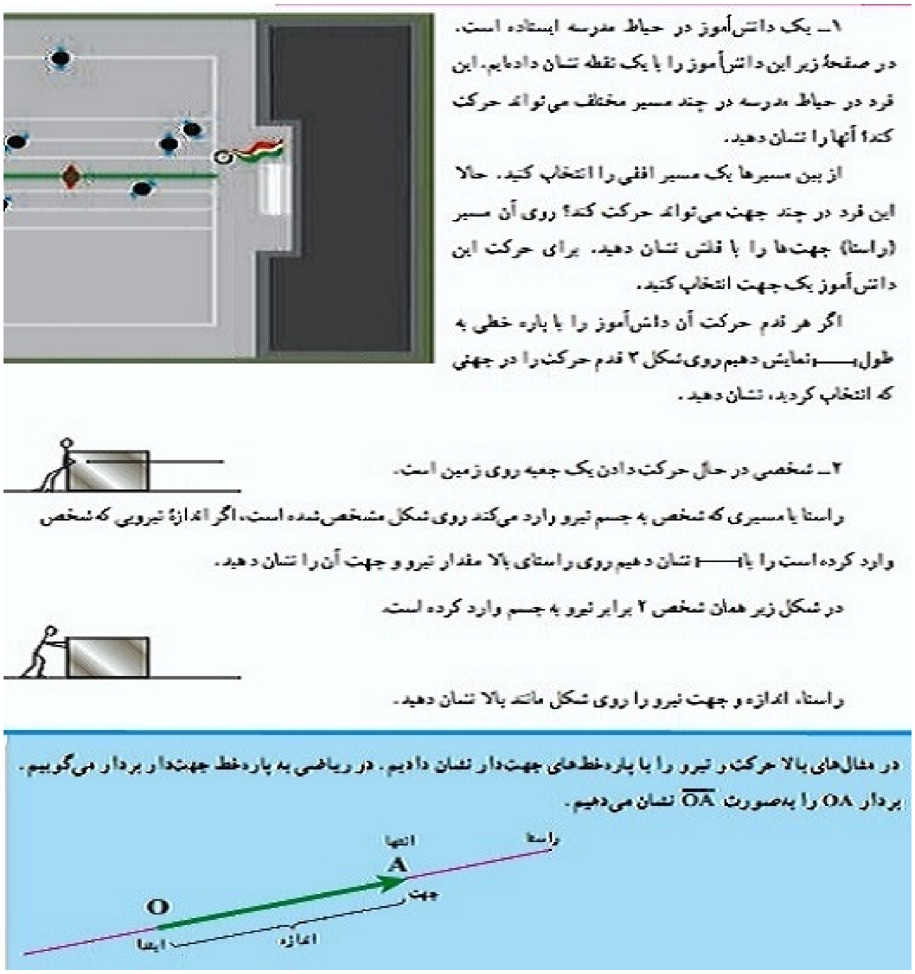
ابتدا به توصیف آن‌چه از جبرخطی درکتاب‌های جدید دبیرستان آورده شده‌است، می‌پردازیم و در همین حین تمریناتی را که نیاز به اصلاح و تغییر دارند را مشخص می‌کنیم، همچنین نکاتی را خطاب به معلمان برای آموزش مؤثرتر مفاهیم و اجرای مفیدتر تمرین‌ها بیان می‌داریم. در انتهای این بخش بعضی از نارسایی‌های این کتاب‌ها را شرح می‌دهیم و برای رفع آن پیشنهاداتی ارائه می‌دهیم. بررسی، نقد و اصلاح جبرخطی درکتاب ریاضی را با سال هفتم متوسطه آغاز می‌کنیم.

- کتاب ریاضی هفتم دبیرستان

فصل ۷ کتاب سال اول دوره اول دبیرستان به مختصات و بردارها -با همین عنوان- اختصاص یافته است. این کتاب در مختصات و بردار دو دیدگاه ترسیمی و تحلیلی دارد، که در نود درصد مطالب ارائه شده تاکید بر شیوه ترسیمی برای حل مسائل و درک آن‌ها است. جملات اول فصل مانند دیگر فصل‌های کتاب، به کاربرد اشاره دارد و در این فصل بر کاربرد مختصات تاکید شده است. پاره خط جهت‌دار، بردارهای مساوی و قرینه، مختصات و بردار انتقال بخش‌های فصل ۷ این کتاب هستند. فصل با کاربردهایی از جهت با معرفی پاره خط جهت‌دار شروع شده است.

با توجه به فعالیت صفحه ۹۰ و نکته درسی پایین این صفحه پیشنهاد می‌شود در همین درسنامه، تساوی (هم‌سنگی) بردارها نیز آموزش داده شود.

---
[23] Alan H. Schoenfeld

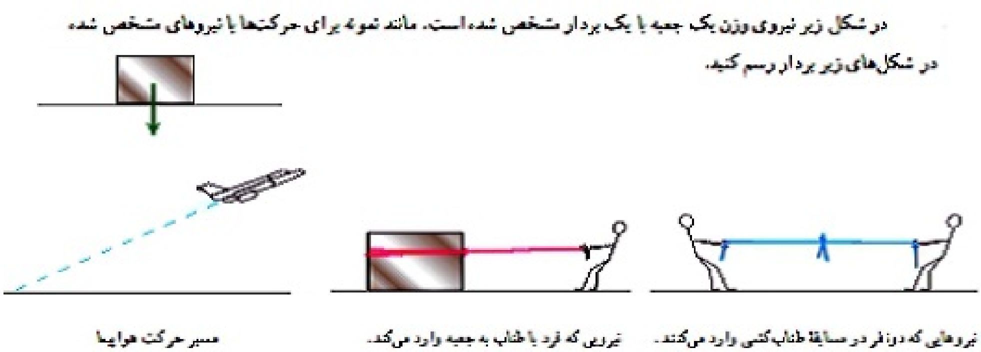


۱ــ یک دانش‌آموز در حیاط مدرسه ایستاده است.
در صفحهٔ زیر این دانش‌آموز را با یک نقطه نشان داده‌ایم. این فرد در حیاط مدرسه در چند مسیر مختلف می‌تواند حرکت کند؟ آنها را نشان دهید.
از بین مسیرها یک مسیر افقی را انتخاب کنید. حالا این فرد در چند جهت می‌تواند حرکت کند؟ روی آن مسیر (راستا) جهت‌ها را با فلش نشان دهید. برای حرکت این دانش‌آموز یک جهت انتخاب کنید.
اگر هر قدم حرکت آن دانش‌آموز را با پاره خطی به طول ⟝⟞ نمایش دهیم روی شکل ۲ قدم حرکت را در جهتی که انتخاب کردید، نشان دهید.

۲ــ شخصی در حال حرکت دادن یک جعبه روی زمین است.
راستا یا مسیری که شخص به جسم نیرو وارد می‌کند روی شکل مشخص شده است. اگر اندازهٔ نیرویی که شخص وارد کرده است را با ⟝⟞ نشان دهیم روی راستای بالا مقدار نیرو و جهت آن را نشان دهید.
در شکل زیر همان شخص ۲ برابر نیرو به جسم وارد کرده است.
راستا، اندازه و جهت نیرو را روی شکل مانند بالا نشان دهید.

در مثال‌های بالا حرکت و نیرو را با پاره‌خط‌های جهت‌دار نشان دادیم. در ریاضی به پاره‌خط جهت‌دار بردار می‌گوییم.
بردار OA را به‌صورت $\overline{OA}$ نشان می‌دهیم.

در کار در کلاس صفحه ۹۱ دانش آموز با مثالی مواجه می‌شود که مسیر درس را مشخص می‌کند. در حالی‌که نیروهایی که تا به حال مشخص کرده است افقی یا عمودی بوده‌اند، در مسیر حرکت هواپیما این نیرو مورب است. در اینجا لازم است معلم کنجکاوی لازم را درباره تجزیه بردارها در ذهن دانش آموز ایجاد کند. پیشنهاد نگارندگان این است که معلم حتماً از طریق پرسش‌های پی‌درپی دانش‌آموز را برای کشف دوباره تجزیه بردارها راهنمایی کند.

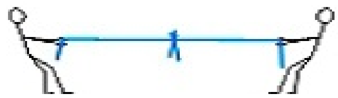


در شکل زیر نیروی وزن یک جعبه با یک بردار مشخص شده است. مانند نمونه برای حرکتها یا نیروهای مشخص شده در شکل‌های زیر بردار رسم کنید.

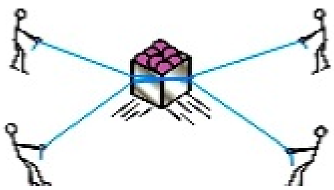
پیشنهاد می‌کنیم تمرینات صفحه ۹۱ و صفحه ۹۲ و حالات مشابه به‌صورت بازی در کلاس انجام شود.

۲ــ دو دانش‌آموز در حال طناب کشیدن هستند.

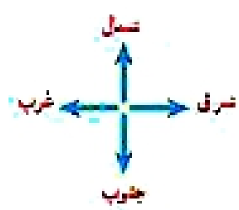
راستا، جهت و اندازهٔ نیروهای این دو نفر را نسبت به محل مشخص شده روی طناب با دو بردار نشان بدهید.

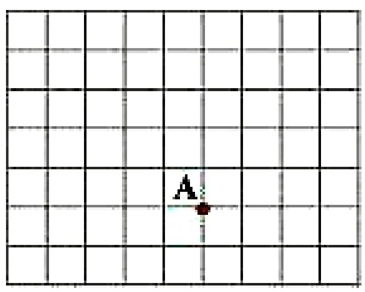


۱ــ شکل زیر تصویر یک جعبه است که چند نفر آن را با طناب می‌کشند. نیروهایی که به این جعبه وارد می‌شود را با بردار در تصویر از بالا نشان دهید.



تمرین ۲ صفحه ۹۲ دانش آموز را برای جمع بردارها آماده می‌کند. اما در این کتاب بحثی از جمع برداری نیست.



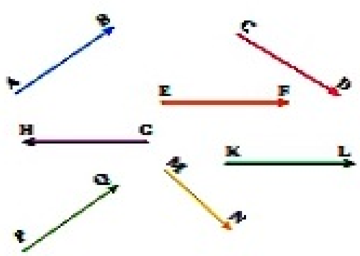


۲ــ با توجه به ۴ جهت نشان داده شده حرکت نقطهٔ A را نشان دهید.

از نقطه A، ۳ واحد به سمت شرق، ۲ واحد به سمت شمال، ۴ واحد به سمت غرب و ۴ واحد به سمت جنوب حرکت کنید. محل نهایی نقطه را با B نشان دهید.

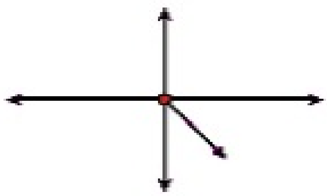
همچنین در کار در کلاس ۳ صفحه ۹۳ از دانش‌آموز خواسته شده تا بردارهای مساوی را بیابد که برای جلوگیری از ابهام توصیه می‌شود در صورت سوال ذکر شود که با کمک خطکش این کار را انجام دهد.

۳ــ بردارهای مساوی را پیدا کنید.



بهتر است تجزیه بردارها در قالب فعالیت ۳ صفحه ۹۴ تدریس شود.

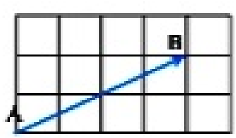
۳ــ با توجه به نیروهای وارد شده در شکل مقابل، جسم به کدام طرف حرکت می‌کند؟ چرا؟



سپس وارد قسمت مختصات می‌شویم. این مبحث با اشاره به طریقه پیدا کردن مختصات یک نقطه شروع شده است. باز هم روش این فصل ترسیمی است. فعالیت صفحه ۹۷ برای آشنایی با بردارهایی بیان شده است که افقی و عمودی نیستند. این تمرین نیز مرتبط با تجزیه می‌باشد.

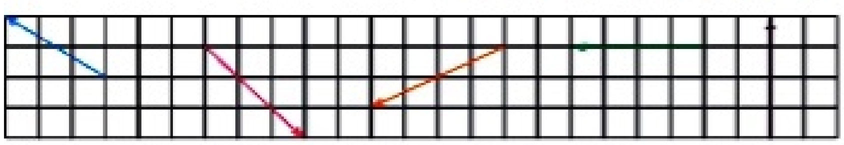
پیشنهاد می‌شود پس از این تمرین‌ها و فعالیت‌هایی که هریک به گونه‌ای تجزیه برداری را بیان می‌کنند، این مبحث تدریس شود. در ادامه نیز می‌توان مبحث بردارهای یکه مختصات را آورد.

۱ــ در شکل مقابل حرکت از نقطهٔ A به B با بردار AB نشان داده شده است.



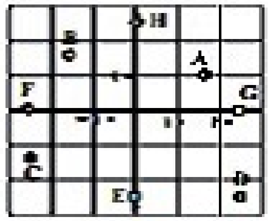
اگر بتوانیم فقط افقی یا عمودی حرکت کنیم (قرار می‌گذاریم که همیشه ابتدا افقی و سپس عمودی حرکت می‌کنیم.)

مسیر حرکت از A تا B را نشان دهید. در بردارهای زیر نیز مسیر را مشخص کنید.



۲ــ در بردار سؤال بالا برای حرکت از A به B، ۴ واحد به سمت مثبت محور طول و سپس ۲ واحد به سمت مثبت محور عرض‌ها حرکت می‌کنیم. این بردار را در صفحهٔ مختصات می‌توانیم به صورت $\begin{bmatrix} ۴ \\ ۲ \end{bmatrix}$ نمایش دهیم. مختصات سایر بردارها را بنویسید.

تمرین صفحه ۹۸ به طور غیر مستقیم جمع برداری را نشان می‌دهد. دانش آموز معمولا می‌تواند این رابطه را تشخیص دهد. پس این تمرین برای ایجاد آمادگی بیشتر برای بخش بعد (بردار انتقال) است.

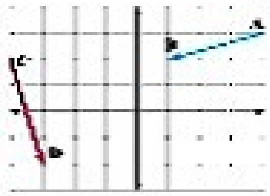


۱ـ با توجه به شکل مختصات هر نقطه را به‌صورت تقریبی بنویسید.

A=[ ] B=[ ] C=[ ] D=[ ]

E=[ ] F=[ ] G=[ ] H=[ ]

۲ـ بردار $\begin{bmatrix} -۲ \\ ۴ \end{bmatrix}$ را در محور مختصات زیر طوری رسم کنید که ابتدای بردار نقطهٔ $\begin{bmatrix} ۳ \\ -۴ \end{bmatrix}$ باشد.

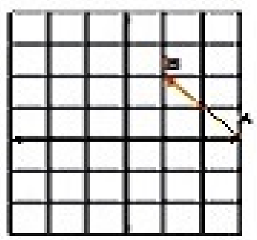


مختصات نقطهٔ انتهای آن را بنویسید.

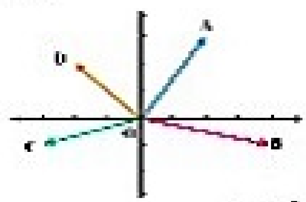
با توجه به شکل، مختصات نقطه‌ها و بردارهای زیر را بنویسید.

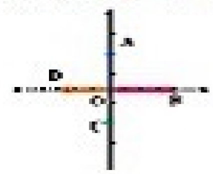
A=[ ] B=[ ] $\overline{AB}$=[ ] C=[ ] D=[ ] $\overline{CD}$=[ ]

۳ـ ابتدا مختصات بردار AB را تعیین کنید. قرینهٔ بردار AB را نسبت به محور طول‌ها رسم کنید و مختصات قرینهٔ $\overline{AB}$ را بنویسید. قرینهٔ بردار AB را نسبت به مبدأ مختصات پیدا کنید و مختصاتش را بنویسید.

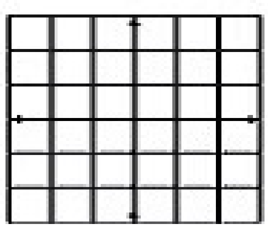


۴ـ مختصات بردارها را در شکل‌های زیر بنویسید.





۵ـ از نقطهٔ $A=\begin{bmatrix} -۱ \\ -۴ \end{bmatrix}$ با بردار $\overline{AB}=\begin{bmatrix} ۴ \\ ۴ \end{bmatrix}$ و سپس با بردار $\overline{BC}=\begin{bmatrix} -۱ \\ ۴ \end{bmatrix}$ حرکت کرده‌ایم به نقطهٔ C رسیده‌ایم. با چه برداری می‌توانستیم از A به C حرکت کنیم؟



۶ـ مشخص کنید که نقاط مقابل در کدام ناحیه قرار دارد. $B=\begin{bmatrix} ۴۷ \\ -۸۹ \end{bmatrix}$ $A=\begin{bmatrix} -۲۵۰ \\ -۱۸۰ \end{bmatrix}$

$C=\begin{bmatrix} -۱۲۴ \\ ۲۵۴ \end{bmatrix}$ $D=\begin{bmatrix} -۲۰۰ \\ ۵ \end{bmatrix}$

در تمرین ۷ صفحه ۱۰۱ فرمولی کلی برای جمع ارائه می‌شود. پیشنهاد می‌شود به صورت مستقیم و مانند دیگر درسنامه‌های کتاب در کادر ویژه آورده شود.

۷ـ اگر نقطهٔ A به مختصات $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ را با بردار انتقال $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ منتقل کنیم تا به نقطهٔ B برسیم مختصات نقطهٔ B را به‌صورت جبری بنویسید.

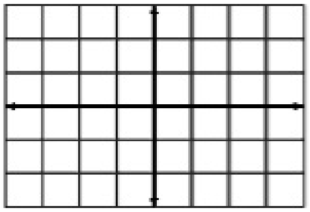
در تمام طول فصل از روش ترسیمی استفاده شد به جز تمرین ۱ صفحه ۱۰۲ که تاکید شده است بدون رسم شکل پاسخ داده شود.

۱ـ نقاط به مختصات $C=\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$ $A=\begin{bmatrix}1/5\\2\end{bmatrix}$ را پیدا کنید.

نقطهٔ A را با بردار $\overline{BC}$ منتقل کنید و مختصات نقطهٔ منتقل‌شده را بنویسید.

بدون رسم شکل ابتدا مختصات بردار $\overline{BC}$ را پیدا کنید.

بدون رسم شکل انتقال را انجام دهید.

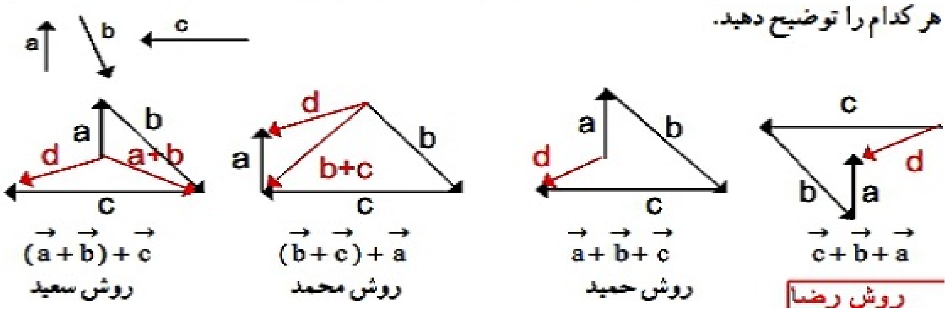


• کتاب ریاضی هشتم دبیرستان

توضیحاتی که برای معرفی این فصل آورده شده است به نیروها و تعادل اشاره دارد. مانند کتاب هفتم دو شیوه ترسیمی و تحلیلی را در پیش گرفته است. اما دانش آموز محاسبات بدون رسم شکل و تحلیلی بیشتری نسبت به سال قبل تجربه می‌کند. جمع و برآیند برداری، تجزیه، ضرب عدد در بردار، بردار واحد بخش‌های این فصل از کتاب هشتم هستند. در صفحه ۴۴ فعالیت‌هایی مربوط با جمع برداری آورده شده است که بسیار شبیه به مطالب بردار انتقال در سال قبل است پیشنهاد می‌شود ارتباط بین جمع و انتقال بردارها به‌وسیله یادآوری تمرین‌های انتقال سال گذشته بیشتر پرداخته شود.

فعالیت ۳ صفحه ۴۶ بیانگر شرکت پذیری و جابه‌جایی جمع برداری است. پیشنهاد می‌شود بدون رسم شکل و به روش تحلیلی نیز روابط نوشته و بررسی شوند.

۳ـ در زیر راه حل‌های دانش‌آموزان را برای پیدا کردن جمع ۳ بردار مشاهده می‌کنید. راه حل هر کدام را توضیح دهید.



تمرین ۴ صفحه ۴۷ برخورد بهتر و آشناتری را با بردارها از دیدگاه ماتریس‌های ۱ × ۲ به‌دست می‌دهد. پیشنهاد می‌شود برای جلوگیری از افزایش حجم کتاب درسی هشتم، مبحث ماتریس‌ها در سال نهم ارائه گردد.

۴ـ x و y را در هر تساوی به‌دست اورید؟

$$\begin{bmatrix}x+1\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\y-1\end{bmatrix}\qquad \begin{bmatrix}3\\-4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\6\end{bmatrix}\qquad \begin{bmatrix}5\\6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x\\6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$$

برخوردی بدون مقدمه با تفریق بردارها را در فعالیت ۲ صفحه ۴۹ مشاهده می‌کنیم که به‌صورت قرینه بیان شده‌است.

۲ـ مانند سؤال بالا بردارهای خواسته شده را رسم کنید.

$\vec z=3\vec x+2\vec y$

$\vec c=2\vec a-3\vec b$

و در انتها تمرین ۴ صفحه ۵۰ حل معادلات برداری یا همان معادلات ماتریسی را بیان می‌کند. توجه شود که x حتماً باید به‌صورت X نوشته شود. همچنین استفاده از علامت بردارها یعنی $\vec{}$ در کل فصل رعایت نشده است.

۴ــ معادله‌های برداری زیر را حل کنید.

$\begin{bmatrix} ۲ \\ ۵ \end{bmatrix} + x = \begin{bmatrix} -۴ \\ ۶ \end{bmatrix}$ $\quad$ $\begin{bmatrix} ۲ \\ ۵ \end{bmatrix} + x = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$ $\quad$ $-۳x = \begin{bmatrix} ۱۵ \\ -۹ \end{bmatrix}$ $\quad$ $۴x = \begin{bmatrix} ۱۲ \\ -۸ \end{bmatrix}$

۵ــ اگر $a=۲i-۳j$ و $b=\begin{bmatrix} -۱ \\ ۲ \end{bmatrix}$ باشد از معادله‌ی زیر بردار $\vec{x}$ را پیدا کنید.

$۲\vec{x}-j=۲a-b$

در انتهای این فصل تمرین بسیار خوب زیرآورده شده است. تمرین۵ صفحه ۵۴ که از این قرار است:

توجه شود که x باید به‌صورت X نوشته شود و علامت بردارها به‌صورت $\vec{a}$ و $\vec{b}$ رعایت شوند. در تمامی این فصل هیچ مثال یا تمرینی از بردارها یا مختصات غیر صحیح وجود ندارد. پیشنهاد می‌شود برای جلوگیری از ایجاد بدفهمی چند مثال با اعداد غیر صحیح و اعشاری نیز گنجانده شود.

نکته قابل ذکر این است که ارتباط بین مختصات و بردار هندسی مبهم است. دانش‌آموز می‌داند که بردار هندسی پاره‌خطی جهت‌دار است یعنی ابتدا و انتهای آن مشخص است. به او گفته شده است که هر بردار را می‌توان از مبدا مختصات رسم کرد. اما آیا این بردارها با بردار اولیه مساوی هستند؟ بلی، کافی است توجه داشته باشیم که بردارهای مساوی، یعنی بردارهایی که هم‌سنگ هستند و این خود به معنای هم‌اندازه، هم‌جهت و هم‌راستا بودن آن‌ها می‌باشد. پیشنهاد می‌کنیم تمرین بیشتری برای تساوی بردارها ارائه شود. همچنین توصیه ما این است که پس از تمرین‌های مختلف درباره کشف بردارهای مساوی توسط خود دانش آموز، تعریف آن توسط کتاب درسی ارائه شود. پس از رسم هر بردار از مبدا مختصات، درمی‌یابیم که در واقع هر بردار با نقطه انتهایش شناخته می‌شود. یعنی هر بردار با مختصات نقطه انتهایی مشخص می‌شود و این، همان ارتباطی است که مبهم بیان شده است، حتی می‌توان ادعا کرد به آن پرداخته نشده‌است، حال آن‌که برای نمایش مختصات از ماتریس‌هایی ۲×۱ استفاده می‌کنیم.

دانش‌آموز در پایان سال هشتم دبیرستان در حقیقت جمع، تفریق، صفر، قرینه ماتریس‌ها و ضرب عدد در ماتریس را آموخته است. کافی است که دنیای ریاضیات محدود او را از ۲×۱ها خارج و او را به دنیای $m \times n$ها دعوت کنیم تا به این وسیله دریای دانستنی‌های او را وسعت بخشیم و او را برای پذیرش مفاهیم عمیق‌تری از ریاضیات در سال‌های آتی آماده سازیم. به باور نگارندگان آن‌چه در سال‌های ابتدایی تحصیل اهمیت ویژه دارد نه تعداد زیاد تعاریف دشوار برای حفظ کردن، بلکه مفاهیم اساسی و پایه‌ای است که به رشد تفکر و استدلال ریاضی دانش‌آموز و یادگیرنده کمک کند. همچنین براساس این که تدریس مفاهیم از آن چه خاص است به مفاهیم کلی‌تر، یکی از ترتیب‌های آموزشی مناسب برای جبرخطی است، ادعا می‌کنیم دانش‌آموز کلاس هشتم، از ذهنی آماده برای درک مفاهیم ''ماتریس'' برخوردار است. خوب است به دانش آموزی که دو سال بعد در کتاب‌های تخصصی ریاضیات گسسته دبیرستانی با ماتریس‌ها و حل معادلات‌خطی (mمعادله و nمجهول) برخورد خواهد داشت، اطلاعات اندکی از ماتریس‌ها را در جای مناسب آن، یعنی جایی که با توجه به تاریخ پیدایش ماتریس، کشف ارتباط منطقی ماتریس و مختصات برای دانش‌آموزان دور از انتظار نباشد، ارائه دهیم. به این ترتیب می‌توان به تحقق فراشناخت در دانش‌آموز نیز کمک قابل توجهی کرد.

همچنین اهمیت ''ماتریس''ها به دلایلی که پیش از این ذکر شد و نیز این دلیل قابل توجه است که کاربرد آن در تقریباً تمامی رشته‌های دانشگاهی یافت می‌شود. پیشنهاد ما این است که در پایه نهم آموزش عمومی، گنجانده شود. بنابراین در این نوشتار یک فصل با عنوان کلی ''ماتریس‌ها'' برای دانش آموزان نهم دبیرستان معرفی می‌شود، که در ادامه مباحث مختصات و بردار سال‌های گذشته قرار دارد.

۵. فصل پیشنهاد شده: ماتریس

- معرفی ماتریس

در این قسمت علاوه بر ارائه چکیده[۲۴] فصلی برای تدریس ماتریس‌ها در کتاب نهم، نکاتی مبنی بر مناسب بودن تمرین‌ها و همچنین قسمت‌هایی تحت عنوان ''سخنی با معلم'' آورده شده است. ماخذ ما برای این بخش [۲] است.

فعالیت

۱) سعید و دوستانش در وسط حیاط مدرسه ایستاده‌اند. اگر سعید ۲ کاشی به راست و ۵ کاشی به سمت بالا حرکت کند. وضعیت او نسبت به مرکز (که مبدا در نظر گرفته شده است) چگونه است؟ مختصات نقطه‌ای که سعید آنجا قرار دارد را بنویسید.

الف) رضا ۳ کاشی به راست و ۴ کاشی به سمت بالا حرکت می‌کند. رضا در چه نقطه‌ای ایستاده است؟

ب) آیا می‌توانید محل ایستادن سعید و رضا را همزمان بیان کنید؟

پ) اگر آرش هم چند واحد به راست و به سمت بالا حرکت کند می‌توان همزمان با رضا و سعید حرکت او را بیان کرد؟ بابک و شایان چطور؟

ت) ناصر ۲ کاشی به سمت بالا و ۲ کاشی به سمت چپ حرکت می‌کند. مکان ناصر و سعید را همزمان بیان کنید. آیا چنین نمایشی به طور همزمان ممکن است؟

در ''ب'' دانش آموز با ماتریس ۲×۲ روبه رو می‌شود و در ''پ'' می‌آموزد که تعداد سطرها و ستون‌های یک ماتریس با توجه به تعداد آن‌چه قصد نمایش آن را داریم، می‌تواند تغییر کند. در این‌جا اگر حرکت کردن به راست و بالا را ستون‌ها و سعید و رضا را سطرهای ماتریس در نظر بگیریم، برای نمایش همزمان حرکت آرش، یک سطر دیگر به ماتریس قبلی اضافه خواهیم کرد. (به همین صورت برای بابک و شایان و ...)

در ''ت'' نیز بیان می‌کنیم که بالا و راست رفتن، از بالا و چپ رفتن متفاوت است و نمی‌توان این چهار مورد را در یک ماتریس ۲×۲ نمایش داد. اگر حرکت کردن به چپ را در ستون دیگری قرار دهیم، آنگاه ماتریس حاصل دارای ۳ ستون (بالا، راست و چپ حرکت کردن) و ۲ سطر (ناصر و سعید) خواهد بود. درنتیجه یک ستون به ماتریس قبلی اضافه خواهد شد.

۲) کلاس ریاضی دبیرستان ما سه ردیف و چهار ستون دارد.

الف) آرزو در ردیف اول، ستون سوم و مژگان ردیف دوم ستون اول می‌نشیند. به زبان ریاضی و به طور همزمان بنویسید آرزو و مژگان در چه نقاطی از کلاس قرار دارند.

ب) چند دانش آموز می‌توانند روی صندلی‌ها بنشینند؟

پ) جمعه‌ها کلاس ریاضی ما چه شکلی خواهد داشت؟

قسمت ''ب'' و ''پ'' برای دادن پیش زمینه ذهنی به دانش آموز برای درک بهتر چیستی درایه و ماتریس صفر آورده شده است.

دو فعالیت بالا طوری طراحی شده‌اند که دانش آموزان به راحتی قادر به درک مفهوم جدید ماتریس باشد. دانش‌آموز در سال گذشته چنین مسائلی را در ''مبحث مختصات و بردار'' پاسخ داده است. در اینجا توجه او را به واژه ''همزمان'' جلب و ماتریس‌ها را به عنوان آرایه‌ای برای نمایش اطلاعات به طور همزمان معرفی می‌کنیم.

چنان‌که متخصصان آموزش ریاضی بیان می‌دارند، تجربه‌های شخصی و مطالب آموخته شده‌ی گذشته، نقش بسیار مهمی در یادگیری و فهم مطالب ایفا می‌کنند. به همین دلیل برای معرفی ماتریس به دانش آموز کلاس نهم، از یادآوری تمرینات مختصات سال هشتم دبیرستان و همچنین فعالیت‌هایی که به‌طور روزمره دانش‌آموز با آن‌ها برخورد دارد، بهره جسته‌ایم.

۳) جدول زیر را سازمان هواشناسی برای هوای دوشنبه آینده پیش بینی کرده است:

---

[۲۴] (مطالبی که در ادامه از نظرتان خواهد گذشت به دلیل محدودیت تعداد صفحات، از۱۳ به ۷٫۵ صفحه کاهش یافته است که در صورت تمایل فصل کامل آن قابل ارائه خواهد بود.)

***	صبح	شب
مشهد	بارانی	ابری
تهران	آفتابی	ابری
اصفهان	ابری	وزش باد

الف) صبح در مشهد هوا چگونه است؟
ب) کجا و چه هنگام هوا آفتابی است؟
۴) انبارهای یک شرکت گاز در محل‌های A، B و C قرارگرفته اند. فاصله‌های سه خانه $k_۱$، $k_۲$ و $k_۳$ از این انبارها به قرار زیر می‌باشد:

فاصله A تا $k_۱$ ۵۰ ، فاصله A تا $k_۲$ ۳۰ ، فاصله A تا $k_۳$ ۲۰
فاصله B تا $k_۱$ ۷۰ ، فاصله B تا $k_۲$ ۵۰ ، فاصله B تا $k_۳$ ۴۰
فاصله C تا $k_۱$ ۶۰ ، فاصله C تا $k_۲$ ۲۵ ، فاصله C تا $k_۳$ ۴۵

این اطلاعات را می‌توان با استفاده از یک جدول مستطیل شکل به‌صورت زیر نمایش داد:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} \text{k1} & \text{k2} & \text{k3} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{A} \\ \text{B} \\ \text{C} \end{array} & \begin{bmatrix} ۵۰ & ۳۰ & ۲۰ \\ ۷۰ & ۵۰ & ۴۰ \\ ۶۰ & ۲۵ & ۴۵ \end{bmatrix} \end{array}$$

الف) فاصله‌ها را به km تبدیل کنید. آیا باز هم می‌توانید با جدولی شبیه به جدول بالا آن‌ها را بیان کنید؟
دیدیم که استفاده از این جدول‌های مستطیل شکل نمایش اطلاعات را ساده‌تر می‌کند و بیننده با یک نگاه، متوجه اطلاعات فراوانی می‌شود.
برای نمایش آسان‌تر بعضی اطلاعات از جدول‌های مستطیل شکل که به‌وسیله کروشه [.] و یا (.) محدود شده است، استفاده می‌شود. به این جدول‌ها ماتریس و به هر کدام از اعداد یا اطلاعات داخل کروشه یک عضو یا یک درایه ماتریس می‌گوییم.
آیا می‌توانید تعداد سطرها و ستون‌های ماتریس انبار شرکت گاز را بنویسید؟

قرارداد

آرایه واقع در سطر i ام و ستون j ام را با a_{ij} نمایش می‌دهیم.

فعالیت

۱. ماتریس مقابل چند سطر و چند ستون دارد؟

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۱ \\ ۷ & ۱ & ۴ \end{bmatrix}$$

الف– درایه $a_{۲۳}$ کدام است؟
ب– عدد ۱ در کدام درایه ها قرار دارد؟
ج– این ماتریس چند سطر و چند ستون دارد؟
۲. ماتریس B داده شده است:

$$B = \begin{bmatrix} ۳ & ۲ & ۱۱ & ۵ & ۲/۳ \\ ۱ & ۰ & ۵ & ۴۷ & ۷ \\ ۲ & ۲۴ & ۰/۵ & ۹۰ & ۱۱ \end{bmatrix}$$

الف- B چند سطر و چند ستون دارد؟
ب- درایه $b_{۳۴}$ کدام است؟ آیا درایه $b_{۴۳}$ نیز موجود است؟
ج- ۲ در کدام درایه قرار دارد؟
قصد ما از این گونه پرسش‌ها دادن سر نخ به دانش آموز کنجکاوی است که در ذهن خود به دنبال ارتباط های منطقی می‌گردد.
هرگاه در ماتریسی تعداد سطر و ستون‌ها باهم برابر باشند، یعنی $m = n$، آن ماتریس را یک ماتریس مربعی نامیم. درایه‌های a_{ij} را که $i = j$ قطر اصلی ماتریس مربعی می‌نامیم.
بردارها و مختصات یکی از انواع ماتریس ها هستند که ۲ سطر و ۱ ستون دارند. یعنی بردارها، ماتریس هایی ۲ در ۱ هستند.

کار در کلاس

با راهنمایی معلم، گروه‌هایی دو نفره با دوستان خود تشکیل دهید و سپس جواب هریک از موارد زیر را به معلمتان ارائه دهید.
الف- ماتریس‌های مربعی فعالیت بالا را مشخص کنید.
ب- چند ماتریس مربعی مثال بزنید.
پ- چند ماتریس ۲×۳ و ۳×۲ مثال بزنید.
ت- چند ماتریس مربعی ۲×۲ مثال بزنید.
ث- درباره ماتریس‌های ۲ در ۱ توضیح دهید.
یکی از انواع بدفهمی توسط دانش‌آموزان آن‌جایی رخ می‌دهد که به او این اجازه را نمی‌دهیم که درباره آن‌چه درک کرده صحبت کند، محیط‌های دوستانه و با نظارت معلم، امکان تثبیت مطالب در ذهن دانش‌آموز را ایجاد می کند. همچنین در هنگام گفت و گو، ربط معنادارِ مطالب گسسته و جدا آموخته شده به یکباره پدیدار خواهد شد.
سخنی با معلم: در این قسمت دانش‌آموز باید به درستی به این اکتشاف که ”ماتریس ها نمایشی از مختصات را به‌دست می دهند“ برسد. او را در این امر یاری کنید، اما نه به گونه‌ای که چیزی برای کشف باقی نماند.

[۱۹] تمرین

۱- در جدول زیر مشخصات قاره ها نوشته شده است:

***	مساحت بر حسب کیلومتر مربع	جمعیت	بلندترین ارتفاع برحسب متر
آسیا	۴۴۱۵۰۰۰۰	۸۰۰۰۰۰۰۰۰۰	۷۸۴۸
آفریقا	۳۰۵۰۰۰۰۰	۷۵۰۰۰۰۰۰۰	۵۸۹۵
آمریکا	۴۱۹۸۰۰۰۰	۶۴۷۸۹۰۰۰۰	۶۹۵۹
اروپا	۱۰۰۵۰۰۰۰۰	۷۳۶۲۴۰۰۰۰	۴۸۱۰
اقیانوسیه	۸۹۶۵۰۰۰	۴۵۶۹۸۰۰۰۰	۴۰۰۰

الف- ماتریس مربوط به اطلاعات بالا را بنویسید.
ب- آیا این ماتریس مربعی است؟ چرا؟
ج- تعداد سطر ها و ستون‌های آن‌را بنویسید.
۲- یک ماتریس ۲در ۵ بنویسید که درایه‌های آن حروف الفبای انگلیسی باشند.
۳- سه ماتریس دلخواه بنویسید به طوری که مجموع قطر اصلی هر یک ۲۵ باشد.
۴- ماتریسی ۳ در ۳ بنویسید که همه درایه‌های آن صفر باشد. چه اسمی برای آن پیشنهاد می کنید؟

• تساوی ماتریس‌ها

فعالیت

ماتریس‌های زیر را در نظر بگیرید.

$$A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & ۲ & ۵ \\ ۰,۷ & ۶ & ۴ \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} ۷ & ۲ & ۵ \\ ۰,۷ & b_{۲۲} & ۴ \end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix} ۷ & ۲ \\ c_{۲۱} & ۶ \end{bmatrix}$$

آیا می‌توان گفت ماتریس A مساوی ماتریس B است؟

چه وقت می‌توان چنین ادعایی کرد؟

آیا می‌توان گفت ماتریس C همان ماتریس A است؟ دلیل بیاورید.

برای برقراری تساوی بین دو ماتریس شرط‌هایی لازم است اما قبل از پاسخ‌گویی به این فعالیت نباید معلم این شروط را به دانش‌آموز دیکته کند، هدف از این فعالیت کمک به کشف امکان برابر بودن توسط خود دانش‌آموز می‌باشد.

کار در کلاس

۱- اگر منظور از عضوهای متناظر در دو ماتریس، اعضایی باشند که در یک جایگاه (جایگاه مشابه) قرارگرفته‌اند، اعضای متناظر دو ماتریس زیر را با خط به یکدیگر وصل کنید:

$$A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} b_{۱۱} & b_{۱۲} & b_{۱۳} \\ b_{۲۱} & b_{۲۲} & b_{۲۳} \end{bmatrix}$$

دو ماتریس A و B مساوی هستند هرگاه الف و ب با هم اتفاق بیفتند:

الف) تعداد سطرهای دو ماتریس باهم و تعداد ستون‌های دو ماتریس با هم برابر باشند.

ب) اعضای متناظر در دو ماتریس با هم برابر باشند.

تمرین

۱- آیا ماتریس‌های زیر برابرند؟

$$\begin{bmatrix} ۱ & \frac{۴}{۲} \\ \frac{۱}{۴} & \frac{۲۵}{۵} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰,۲۵ & ۵ \end{bmatrix},$$

برابر بودن دو درایه از دو ماتریس، به شکل نوشتار آن بستگی ندارد. برای مثال $\frac{۴}{۲}$ و ۲ برابر هستند.

۲- ماتریس‌های مقابل چه وقت با هم برابر خواهند بود؟

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \\ u & v \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۴ & ۰ \\ ۱ & ۲ \\ ۵ & ۳ \end{bmatrix}$$

۳- x و y را طوری بیابید که دو ماتریس مقابل برابر باشند:

$$\begin{bmatrix} x+y & ۳ \\ x-y & ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۵ & ۳ \\ ۳ & ۰ \end{bmatrix}$$

• جمع ماتریس‌ها

در سال قبل (پایه هشتم)، مشاهده کردیم که نتیجه جمع ۲ بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ، برداری مانند $\vec{c}$ است، به‌طوری که رابطه جمع برای بردارها و مختصات به‌صورت زیر برقرار است و نوشتیم:

$$\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}z\\t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x+z\\y+t\end{bmatrix}=\overrightarrow{c}$$

تمرین

۱- x و y را در هر تساوی به‌دست آورید:

$$\begin{bmatrix}۵\\-۵\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x\\۶\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲\\۱\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}x^{۲}\\۳\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-۴\\۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰\\y\end{bmatrix}$$

۲- حاصل جمع‌های زیر را به‌دست آورید:

$$\begin{bmatrix}۳\\-۲\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۴\\۶\end{bmatrix}=$$

کار در کلاس

با هم کلاسی‌های خود درباره جمع ماتریس‌ها گفت و گو کنید و بیان کنید که آیا می‌توان به همین صورت مجموع دو ماتریس m در n را نوشت؟ **فعالیت**

با شروع مدرسه آقای جلالی برای هر یک از سه دخترش لوازم زیر را خریداری کرد:

***	مدادتراش	پاک کن	مداد	دفتر	گیره دفتر
مهشید	۲	۳	۳	۳	۸
مهکامه	۱	۲	۴	۵	۸
مهدیس	۱	۱	۲	۵	۲

خانم آقای جلالی نیز لوازمی که از سال گذشته برای هر یک از بچه‌ها باقی مانده است را مشخص کرده است:

***	مدادتراش	پاک کن	مداد	دفتر	گیره دفتر
مهشید	۰	۱	۱	۳	۵
مهکامه	۱	۲	۱	۰	۳
مهدیس	۰	۲	۲	۲	۶

مشخص کنید که در مجموع، امسال هریک از بچه‌ها چه تعداد لوازم دارند.

تعریف: مجموع دو ماتریس A و B که هر دو از مرتبه $m \times n$ هستند (یعنی تعداد سطرها با هم و تعداد ستون‌ها با هم مساوی‌اند.) ماتریسی است مانند C از مرتبه $m \times n$ که هر عضو آن مساوی مجموع عضوهای متناظرش در A و Bمی‌باشد.

تمرین

۱- دو ماتریس زیر داده شده‌اند، ماتریس $A+B$ را بنویسید:

$$A=\begin{bmatrix}۲ & ۱ & ۳\\ ۷ & ۱۳ & ۱\end{bmatrix}, \qquad B=\begin{bmatrix}۱۴ & ۵ & ۵ & ۳\\ ۷ & ۶ & ۹ & ۱\end{bmatrix}$$

۲- ماتریس A داده شده است، مجموع آن را با خودش محاسبه کنید:

$$A=\begin{bmatrix}۲ & ۱ & ۳ & \frac{۵}{۱۰}\\ ۷ & ۱۳ & ۱ & ۶\\ -۲,۱ & ۷ & ۳ & -۱۱\end{bmatrix}$$

سخنی با معلم: در تمرین‌های مربوط به جمع دو ماتریس حتما علت امکان‌پذیر بودن جمع را بیان کنید.

- ضرب عدد در ماتریس

فعالیت

۱- ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$ داده شده است، ماتریس $۲A$ را بنویسید.
طبق تعریف $۲A = A + A$ داریم:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} =$$

یعنی برای تعیین ماتریس $۲A$،عدد حقیقی ۲ را باید در تمام عضوهای A ضرب کرد.

کار در کلاس

درگروه‌هایی سه یا چهار نفره درباره شباهت‌های ضرب عدد در ماتریس و ضرب عدد در بردار، با هم گروهی‌های خود بحث کنید.

فعالیت

در یک جعبه انار که آقای ناصری از بازار خریداری کرده است ۱۶ عدد انار ساوه به وزن ۲,۵ کیلوگرم و ۱۴ عدد انار جهرم به وزن ۱,۷۵ کیلوگرم موجود است. ابتدا ماتریس نشان‌دهنده این جعبه انار را بنویسید و سپس ماتریس پنج جعبه انار را مشخص کنید.

تمرین

۱- حاصل ضرب‌های زیر را به‌دست آورید:

$$a * \begin{bmatrix} ۳ & ۸ & ۰ \\ ۵ & \frac{۱}{۴} & -۹ \\ ۳ & ۱ & -۲ \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} ۳ & ۸ & ۰ \\ ۵ & \frac{۱}{۴} & -۹ \\ ۳ & ۱ & -۲ \end{bmatrix} * a =$$

۲- در تمرین شماره ۱ حالت‌های زیر را محاسبه کنید:
$a = ۲$ ، $a = \sqrt{۲}$ ، $a = \frac{۱}{۲}$

تعریف:

عدد حقیقی k و ماتریس A داده شده است. منظور از kA ماتریسی است که از ضرب عدد k در هر عضو A به‌دست می‌آید.

به‌عبارت دیگر، هرگاه $A = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \cdots & a_{۱n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m۱} & a_{۲۲} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ به‌طوری که k عدد حقیقی است، داریم:

$$k \times A = k \times \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \cdots & a_{۱n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m۱} & a_{۲۲} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_{۱۱} & ka_{۱۲} & \cdots & ka_{۱n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ ka_{m۱} & ka_{۲۲} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix}$$

- قرینه یک ماتریس

فعالیت

۱- در دستگاه مختصات زیر بردار $\begin{bmatrix} ۲,۵ \\ -۳ \end{bmatrix}$ را نشان دهید. قرینه این بردار را نیز رسم کنید.

۲-گروه‌هایی سه تا چهار نفره تشکیل دهید. با دوستانتان بحث کنید که با توجه به شکل و دانسته‌های سال قبل، چه اتفاقی برای قرینه یک بردار می افتد؟ با توجه به رابطه بردارها و ماتریس‌ها، با کمک هم گروهی‌هایتان رابطه‌ای برای قرینه یک ماتریس m در n پیشنهاد کنید.

توجه نکردن دانش‌آموز به شباهت و تفاوت‌های دو مبحثی که می‌توانند شبیه به هم باشند/نباشند یا فقط پشت سر هم تدریس شوند به‌طوری که به نوعی تداعی‌گر آموخته‌های پیشین او باشند، می‌تواند یکی از دلایل استدلال و تعمیم نادرست مطلب توسط دانش آموز باشد. پس انجام این نوع "کار در کلاس"ها به منظور آشکار شدن نکات پنهان در تدریس، بسیار قابل توجه است.

تعریف: قرینه ماتریس A، ماتریسی است که هر عضو آن قرینه عضو متناظرش در A باشد.

قرینه ماتریس $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & a_{22} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}$ برابر است با ماتریس $-A=\begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ -a_{m1} & -a_{22} & \cdots & -a_{mn}\end{bmatrix}$

تمرین

قرینه ماتریس‌های زیر را بنویسید:

$$\begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x & 6y & x^2 \\ -2x & \frac{y}{x} & xy \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 3 & 7 \\ 8 & 5 & 63 \\ -\sqrt{3} & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

تمرینات دوره ای

۱- به جای X ماتریس مناسب قرار دهید:

$$\begin{bmatrix} 2 & \frac{4}{3} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{10} & \frac{2}{3} & \frac{5}{7} \end{bmatrix} + X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

با توجه به عبارت بالا تعریف دیگری برای قرینه ماتریس بیاورید.

۲- مثال مقابل را در نظر بگیرید:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

ماتریسی بنویسید که جمع آن با هر ماتریس دیگری مانندA_{mn} برابر خود A_{mn} شود.

برای این گونه ماتریس‌ها نامی پیشنهاد کنید.

۳-عبارت مقابل را محاسبه کنید:

$$3\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} =$$

۴- x, y, z, t را به‌دست آورید:

$$-x\begin{bmatrix} 3/5 & 0 \\ 4 & 1/05 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0/81 & t \\ z & 1/05+y \end{bmatrix}$$

مراجع

[1] D. Fearnley-Sander, Australiam Mathematical Society, *Hermann Grassman And The Creation Of Linear Algebra*, 1979.

[2] M.-K. SIU, *On the learning and teaching of tertiary algebra*.

[3] C. Larson, *On the Histories of Linear Algebra: The Case of Linear Systems*, Proceedings of the 13th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education.

[4] J. Liesen, *Hermann Graßmann And The Foundations of Linear Algebra*, SIAM Conference On Applied Linear Algebra, Monterey, CA, USA, 2009.

[5] J. Christensen, *A Brief History of Linear Algebra*, Final Project Math 2270 Grant Gustafson University of Utah, 2012.

[6] A. Samuele, N. Presmeg, M. Alessandra Mariotti and O. Zaslavsky, *On examples in mathematical thinking and learning*.

[۷] س. امامیپور و ح. شمس، سبک‌هاي یادگیري و شناختی: نظریه‌ها و آزمون‌ها، ۲، تهران: انتشارات سمت، ۱۳۸۹ ۳۴–۵ .

[۸] ش. بخشعلی‌زاده، س. غلام آزاد و ن. بروجردیان، شناسایی بدفهمی‌های رایج دانش آموزان پایه چهارم ابتدایی در حوزه محتوایی ریاضی، وزارت آموزش و پرورش–سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی–پژوهشگاه مطالعات آموزش و پرورش، ۱۳۹۲.

[۹] ج. پولیا، چگونه مسئله را حل کنیم، ترجمه احمد آرامژ، انتشارات کیهان، تهران، ۱۳۷۹.

[۱۰] م. حق وردی، ویژگی‌های مسائل کلامی ریاضی دوره راهنمایی و راهکارهای تسهیل فرآیند حل آن‌ها، دو فصل نامه نظریه و عمل در برنامه درسی، شماره ۳، تابستان و پاییز ۱۳۹۳.

[۱۱] م. رحیمیان و ا. کرایه‌چیان، کاربرد تجزیه مقدار تکین در الگوگذاری تصویر، دانشگاه فردوسی مشهد، هفتمین سمینار جبرخطی و کاربردها، ۱۳۹۲.

[۱۲] ک. سلکرک، مهارت‌های تدریس، ترجمه منوچهر مجاور و دکتر احمد صادقی، انتشارات آستان قدس رضوی، مشهد، ۱۳۷۲.

[۱۳] ح. صبوری خسروشاهی، آموزش و پرورش در عصر جهانی شدن چالش‌ها و راهبردهاي مواجهه با آن، مطالعات راهبردی جهانی شدن، پیش شماره اول، ۱۳۸۹.

[۱۴] س. ح. علم الهدایی، اصول آموزش ریاضی، انتشارات نما، مشهد، ۱۳۸۸.

[۱۵] ش. غفاری، اهمیت آموزش ماهیت و تاریخ علم، مجله رشد، ۳ .no ۲۹.

[۱۶] ف. ولی‌زاده و ر. کامیابی گل، محاسبه نرخ نویز سیگنال ECG به کمک فیلتر و موجک، دانشگاه فردوسی مشهد، هفتمین سمینار جبرخطی و کاربردها، ۱۳۹۲.

[۱۷] کتاب ریاضی، پایه ششم، ۱۳۹۱.

[۱۸] کتاب ریاضی، پایه هفتم، ۱۳۹۲.

[۱۹] کتاب ریاضی، پایه هشتم، ۱۳۹۲.

[۲۰] کتاب ریاضی، پایه نهم، ۱۳۹۴.

[۲۱] کتاب ریاضیات عمومی، سال دوم دبیرستان ۱۳۵۴.

[۲۲] کتاب ریاضیات جدید، سال چهارم دبیرستان، رشته ریاضی و فیزیک ۱۳۶۱.

[۲۳] کتاب ریاضیات جدید، سال چهارم دبیرستان، رشته ریاضی و فیزیک ۱۳۵۶.

[۲۴] دفتر اطلاع رسانی و سنجش افکار، نظام آموزشی جمهوری اسلامی ایران.

[25] http://www.amoozesh118.com.

[26] https://fa.wikipedia.org/wiki/.

[27] http://mathworld.wolfram.com/LinearAlgebra.html.

[28] http://science.jrank.org/pages/3946/Linear-Algebra.html.

[29] http://www.ualr.edu/lasmoller/matrices.html.

منصوره گیاهی صبور
مشهد، دانشگاه فردوسی مشهد، گروه ریاضی محض
mansouresabour@gmail.com

منصوره گیاهی صبور متولد ۱۳۷۲ مشهد است. ایشان دانشجوی کارشناسی ریاضیات و کاربردها در دانشگاه فردوسی مشهد است.

محمد صال مصلحیان
مشهد، دانشگاه فردوسی مشهد، گروه ریاضی محض
moslehian@um.ac.ir

محمد صال مصلحیان استاد دانشگاه فردوسی مشهد است. علائق پژوهشی وی آنالیز تابعی، نظریه عملگرها و جبر خطی است. عضویت در هیأت تحریریه چندین مجله بین المللی معتبر، حضور در سه دوره شورای اجرایی انجمن ریاضی ایران، سردبیری خبرنامه و بولتن انجمن ریاضی، و عضویت (مدعو) در شاخه ریاضی فرهنگستان علوم از سوابق اجرایی وی است.